УДК 624.073

РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ НА КОНТУРЕ

Заврак Н.В., к.т.н., доцент
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
nvzavrak@yandex.ua

Аннотация. Излагается методика расчета неоднородных анизотропных прямоугольных пластин с произвольным закреплением на контуре, которая сводится к краевой задаче. Для решения системы уравнений в перемещениях используется метод конечных разностей (МКР) в комбинации с различными вариантами аналитических решений. Целесообразно строить численное решение краевой задачи так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и загружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загружения при разыскании решений в которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. В качестве примеров приведены результаты расчета для серии квадратных ортотропных пластин с жестко закрепленным краем под действием равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузки.

Ключевые слова: краевая задача, неоднородные анизотропные прямоугольные пластины, опорное закрепление, контур.

РОЗРАХУНОК НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН З ДОВІЛЬНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ НА КОНТУРІ

Заврак М.В. к.т.н., доцент
Одеська державна академія будівництва та архітектури
nvzavrak@yandex.ua

Анотація. Викладається методика розрахунку неоднорідних анізотропних прямокутних пластин з довільним закріпленням на контурі, яка зводиться до крайової задачі. Для вирішення системи рівнянь в переміщеннях використовується метод кінцевих різниць (МКР) в комбінації з різними варіантами аналітичних рішень. Доцільно будувати чисельне розв'язання крайової задачі так, щоб у складних випадках опорного закріплення і навантаження рішення шукалося не безпосередньо, а у вигляді поправок до відомого рішення для простих випадків опорного закріплення і навантаження при розшуку рішень в яких можуть бути використані аналітичні методи або МКР з рідкою сіткою. В якості прикладів наведені результати розрахунку для серії квадратних ортотропних пластин з жорстко закріпленим краєм під дією рівномірно розподіленого та зосередженого навантаження.

Ключові слова: крайова задача, неоднорідні анізотропні прямокутні пластини, опорне закріплення, контур.

CALCULATION OF NON-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATES WITH ARBITRARY FIXATION ON THE CONTUR

Zavrak N.V., PhD., Assistant Professor
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
nvzavrak@yandex.ua

Abstract. Methods of calculating the non-homogeneous anisotropic rectangular plates with arbitrary fixation on the contour is set forth, which is reduced to a boundary value problem. To solve a system of equations in terms of displacements using finite difference method (FDM) in combination with different variations of analytical solutions.

It is advisable to construct a numerical solution of the problem so that in difficult cases the support fixing and uploading solution sought, not directly, but in the form of amendments to the known solution for simple cases of reference to consolidate and uploading at finding the solutions which the analytical methods or the FDM with sparse mesh may be used. Given as examples are the results of calculation for a series of square orthotropic plates with a fixed boundary under the action of uniformly distributed and concentrated load.

Keywords: regional task, non-homogeneous anisotropic rectangular plates, supporting fixing, contour.

Введение. Несмотря на большое разнообразие методов расчета неоднородных анизотропных пластин, встречаются существенные трудности при их практической реализации. Они определяются не только сложностью интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, но и сложностью удовлетворения сопутствующих им граничных условий. Очень редко при решении практических задач такой расчет может быть проведен в аналитическом виде. Целесообразно, а иногда и единственно возможно использовать современные численные методы. Наиболее простым из них является метод конечных разностей (МКР). Причем, при использовании этого метода, оказывается, что решение может быть найдено с достаточной степенью точности в одних случаях опорного закрепления, например, шарнирно-подвижного – на простой и достаточно редкой сетке, в других же, например, жестком защемлении – только на сложной или весьма густой сетке, что делает соответствующий расчет очень трудоемким даже при использовании современной вычислительной техники.

Для ослабления указанного недостатка целесообразно строить численное решение так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и загружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загружения, при разыскании которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. Такая методика расчета, хотя и несколько усложняет нахождение искомого решения для сложных случаев закрепления, так как его приходится осуществлять в два шага, тем не менее, в конечном счете, оказывается более эффективной, поскольку позволяет находить составные части искомого решения с применением аналитических соотношений или сравнительно простых по структуре и небольших по числу систем конечноразностных уравнений.

Целью этого исследования было изложить методику расчета, реализующую сформулированную идею и результаты ее использования проиллюстрировать на примерах.

Объекты и методы исследования. Задача расчета неоднородной анизотропной прямоугольной пластины с произвольным закреплением на контуре может сводится к нахождению решения краевой задачи общего вида:

$$L(w)\big|_{\Omega} = f, \qquad R_i(w)\big|_{S_i^{\Gamma}} = \rho_i, \qquad \Gamma_i(w)\big|_{S_i^{\Gamma}} = \varphi_i, \tag{1}$$

где:

$$L(w) = \vec{B}^T D \vec{B} w, \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \qquad R_1(w) = \begin{cases} \mp \dfrac{\partial w}{\partial x} & при \quad x = 0 \ и \ a \\ \mp \dfrac{\partial w}{\partial y} & при \quad y = 0 \ и \ b \end{cases}; \tag{2}$$

$$R_2(w)=w\begin{cases} & при \quad x=0 \quad и \quad a \\ & при \quad y=0 \quad и \quad b \end{cases}; \quad \Gamma_{23}=\begin{cases} Q_x+\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} & при \quad x=0 \; и \; a \\ Q_y+\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} & при \quad y=0 \; и \; b \end{cases};$$

$$\Gamma_1(w)=\begin{cases} M_x & при \quad x=0 \quad и \quad a \\ M_y & при \quad y=0 \quad и \quad b. \end{cases}$$

$\Omega=\{0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$ – прямоугольная область, которую занимает пластина; $S=\{x=0$ и a, $y=0$ и $b\}$ – ограничивающие эту область прямолинейные части контура; f – интенсивность приложенной к пластине поперечной нагрузки; ρ_i и φ_i – заданные на участках $S_i^R<S$ и $S_i^\Gamma=S-S_i^R$ контура значения угла поворота, прогиба, изгибных моментов и приведенных поперечных сил; D – квадратная матрица жесткости порядка 3 с элементами, зависящими от координат x и y.

Меняя S_i^R и S_i^Γ, из формул (1) и (2) можно получить краевые дифференциальные задачи, описывающие состояние рассматриваемой пластинки при всех возможных способах закрепления и загружения ее края.

Предположим, что ищется решение задачи (1), причем известно решение соответствующей “жесткой” задачи:

$$L(v)\big|_{\Omega}=f, \qquad R_i(v)\big|_S=\rho_i. \tag{3}$$

В работе (1) показано, что между решениями (1) и (3) имеет место зависимость:

$$u(x,y)=v(x,y)+\sum_{j=1}^{\infty}X_j\chi_j(x,y), \tag{4}$$

где:

$$X_j=\iint_{\Omega}\chi_j f d\omega-\sum_{i=1}^{2}\int_{S_i^R}T_i(\chi_j)\rho_i ds-\sum_{i=1}^{2}\int_{S_i^\Gamma}\Gamma_i(\chi_j)\rho_i ds+\sum_{i=1}^{2}\int_{S_i^\Gamma}R_i(\chi_j)\varphi_i ds, \tag{5}$$

а $\chi_j(x,y)$, (j=1,2,…) – система специальным образом построенных координатных функций. Для их составления нужно найти полную систему решений вспомогательной однородной краевой задачи:

$$L(\psi_k)\big|_{\Omega}=0, \qquad R_i(\psi_k)\big|_{S_i^R}=0, \tag{6}$$

и проортонормировать ее по билинейному выражению:

$$F(p,q)=\iint_{\Omega}\left(\vec{B}p\right)^T D\vec{B}q d\omega. \tag{7}$$

Последнее может быть выполнено по формуле:

$$\chi_j(x,y)=\sum_{k=j}^{1}b_{jk}\psi_k(x,y) \qquad j=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где:

$$b_{jk}=c_j \text{ при } k=j; \qquad b_{jk}=-c_j\sum_{i=j-1}^{k}\alpha_{jl}b_{lk}, \text{ при } k=j-1,\ldots,2,1, \tag{9}$$

далее:

$$\alpha_{jl}=c_l\left\{\beta_{jl}-\sum_{m=l-1}^{1}\alpha_{jm}\alpha_{lm}\right\}; \qquad c_j=\left(\beta_{jj}-\sum_{l=j-1}^{1}\alpha_{jl}^2\right)^{-1/2}, \tag{10}$$

и, наконец, $\beta_{jk}=F(\psi_j,\psi_l)$.

Важная особенность описанного способа решения заключается в следующем: если построена система координатных элементов χ_j, то с ее помощью можно легко получить функцию прогибов *u* при любых нагрузках *f*, φ_i и смещениях ρ_i. Для этого необходимо лишь вычислить соответствующие коэффициенты X_j по формуле (5).

В случае, когда пластина однородна, элементы матрицы жесткости *D* не зависят от координат *x, y*; при этом решения задачи (6) могут быть построены в аналитическом виде [1]. Метод конечных разностей для расчета пластин был развит и успешно применен в работах [2, 3]. Значительно сложнее дело обстоит в рассматриваемом сейчас случае неоднородной пластины. Так как при этом коэффициенты уравнения (6) переменные, то решения его могут быть, как правило, найдены только в результате применения какого-нибудь численного метода. С этой целью используется метод конечных разностей.

Очевидно, что формула (4) может быть использована не только для нахождения функции *u* по известной функции *v*, но и для определения функции *v*, если мы знаем какую-нибудь функцию *u*. Последняя может быть иногда построена и в аналитической форме для неоднородной пластины, все четыре кромки которой прикреплены шарнирно к недеформируемой опоре.

В работе [4] приведены результаты расчета квадратной ортотропной пластины с жесткостями $D_{12} = \sqrt{D_{11}D_{22}}$ и при различных $\varepsilon = \sqrt[4]{D_{22} / D_{11}}$ под действием равномерно распределенной нагрузки q при жестком закреплении.

Результаты исследования. Здесь приведены результаты расчета прямоугольных ортотропных пластин с жесткостями $D_{12} = \sqrt{D_{11}D_{22}}$ и при различных соотношениях сторон *b*/*a* под действием равномерно распределенной нагрузки q и сосредоточенной нагрузки P при жестком закреплении, напряженно-деформированное состояние которых в случае шарнирного закрепления всех сторон уже исследовано [5].

Для удобного применения результатов расчета численные значения прогибов и изгибающих моментов в центре и в середине опорных кромок ортотропных прямоугольных пластин приведены в таблице 1 и 2 для ν_1 = 0,3, ν_2 = 0,2. В таблице 1 указаны усилия от действия равномерно распределенной нагрузки, а в таблице 2 указаны усилия от действия сосредоточенной нагрузки.

Таблица 1– Усилия от действия равномерно распределенной нагрузки

a / *b*	Прогиб в центре	Моменты в середине опорных сторон		Моменты в центре	
	$w = \alpha \dfrac{qb^4}{D_{22}}$	$M_x = \beta_1 qb^2$ $x = \pm\dfrac{a}{2}, y = 0$	$M_y = \beta_2 qb^2$ $y = \pm\dfrac{b}{2}, x = 0$	$M_x = \gamma_1 qb^2$ $x = 0,\ y = 0$	$M_y = \gamma_2 qb^2$ $y = 0,\ x = 0$
	α	β1	β2	γ1	γ2
1	0,00126	-0,05056	-0,04415	0,03420	0,01876
1,1	0,00133	-0,05521	-0,04948	0,02938	0,02006
1,2	0,00147	-0,05986	-0,05419	0,02812	0,02291
1,3	0,00161	-0,06450	-0,05828	0,02759	0,02565
1,4	0,00179	-0,06727	-0,06177	0,02719	0,02823
1,5	0,00197	-0,07096	-0,06473	0,02690	0,03064
1,6	0,00215	-0,07102	-0,06723	0,02656	0,03288
1,7	0,00230	-0,07195	-0,06933	0,02610	0,03489
1,8	0,00246	-0,07264	-0,07110	0,02566	0,03807
1,9	0,00263	-0,07296	-0,07260	0,02461	0,03908
2,0	0,00272	-0,07325	-0,07386	0,02379	0,03995

Выводы. Из данных, указанных в этой таблице, вытекает, что в обоих случаях загружения и почти при всех a/b, т.е. соотношениях сторон пластин, с увеличением a/b прогиб в центре, момент M_y в центре и моменты M_x, M_y на краях растут; момент же M_x в центре при равномерно распределенной нагрузке и в середине опорной стороны при сосредоточенной нагрузке в случае жесткого закрепления пластинки по всему контуру уменьшается. С увеличением a/b в обоих случаях загружения прогиб растет, однако его рост при действии сосредоточенной силы Р увеличивается быстрее. В случае сосредоточенной силы Р момент M_x на краях уменьшается быстрее (почти в пять раз), а при действии равномерно распределенной нагрузки q увеличивается равномерно на небольшую величину приблизительно в 1,4…1,5 раза.

Таблица 2 – Усилия от действия сосредоточенной нагрузки

a / b	Прогиб в центре	Моменты в середине опорных сторон	
	$w = \alpha \frac{Pb^4}{D_{22}}$	$M_x = \beta_1 Pb^2$ $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = 0$	$M_y = \beta_2 Pb^2$ $y = \pm \frac{b}{2}$, $x = 0$
	α	β_1	β_2
1	0,00499	-0,12777	-0,11431
1,1	0,00510	-0,11860	-0,12496
1,2	0,00532	-0,11530	-0,13298
1,3	0,00557	-0,09795	-0,13892
1,4	0,00583	-0,08361	-0,14328
1,5	0,00606	-0,07135	-0,14645
1,6	0,00626	-0,06071	-0,14876
1,7	0,00644	-0,05139	-0,15044
1,8	0,00646	-0,03880	-0,15166
1,9	0,00651	-0,03040	-0,15255
2,0	0,00656	-0,02283	-0,15318

Литература

1. Слезингер И.Н. Об одном способе решения линейных краевых задач самосопряженного типа / И.Н. Слезингер // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. XX. – Вып. 6. – С. 704-713.

2. Вайнберг Д.В. Расчет пластин / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – К.: Будивельник, 1970. – 436 с.

3. Варвак П.М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П.М. Варвак, Л.П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.

4. Заврак Н.В. Расчет неоднородных анизотропных прямоугольных пластин с произвольным закреплениям на контуре / Н.В. Заврак // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сб. научных трудов. – Одесса, 2012. – №16, Ч.1. – С. 104-108.

5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

Стаття надійшла 3.09.2016