УДК 624.074.4

РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ НА КОНТУРЕ

Заврак Н.В., к.т.н., доцент,
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
nvzavrak@yandex.ua

Аннотация. Излагается методика расчета неоднородных анизотропных прямоугольных оболочек с произвольным закреплением на контуре, которая сводится к краевой задаче. Для решения системы уравнений в перемещениях используется метод конечных разностей (МКР) в комбинации с различными вариантами аналитических решений. Целесообразно строить численное решение краевой задачи так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и загружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загружения при разыскании решений которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. В качестве примеров приведены результаты расчета для серии квадратных ортотропных оболочек с жестко закрепленным краем под действием сосредоточенной нагрузки.

Ключевые слова: краевая задача, неоднородные анизотропные прямоугольные оболочки, опорное закрепление, контур.

РОЗРАХУНОК НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПРЯМОКУТНИХ ОБОЛОНОК З ДОВІЛЬНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ НА КОНТУРІ

Заврак М.В. к.т.н., доцент,
Одеська державна академія будівництва та архітектури
nvzavrak@yandex.ua

Анотація. Викладається методика розрахунку неоднорідних анізотропних прямокутних оболонок з довільним закріпленням на контурі, яка зводиться до крайової задачі. Для вирішення системи рівнянь в переміщеннях використовується метод кінцевих різниць (МКР) в комбінації з різними варіантами аналітичних рішень. Доцільно будувати чисельне розв'язання крайової задачі так, щоб у складних випадках опорного закріплення і навантаження рішення шукалося не безпосередньо, а у вигляді поправок до відомого рішення для простих випадків опорного закріплення і навантаження при розшуку рішень яких можуть бути використані аналітичні методи або МКР з рідкою сіткою. В якості прикладів наведені результати розрахунку для серії квадратних ортотропних оболонок з жорстко закріпленим краєм під дією зосередженого навантаження.

Ключові слова: крайова задача, неоднорідні анізотропні прямокутні оболонки, опорне закріплення, контур.

CALCULATION OF NON-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC RECTANGULAR SHELLS WITH ARBITRARY FIXATION ON THE CONTUR

Zavrak N.V., PhD., Assistant Professor,
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
nvzavrak@yandex.ua

Abstract. Methods of calculating the non-homogeneous anisotropic rectangular shells with arbitrary fixation on the contour is set out, which is reduced to a boundary value problem, the solution of which is associated with considerable difficulties, since it is necessary to integrate a system of three partial differential equations with variable coefficient. To solve a system of equations in terms of displacements using finite difference method (FDM) in combination with different variations of analytical solutions. It is advisable to construct a numerical solution of the problem so that in difficult cases the support fixing and uploading solution sought, not directly, but in the form of amendments to the known solution for simple cases of reference to consolidate and uploading at finding the solutions which the analytical methods or the FDM with sparse mesh may be used. As examples the results of calculation for a series of square orthotropic shells with a fixed boundary under the action of a concentrated load are given.

Keywords: regional task, non-homogeneous anisotropic rectangular shells, supporting fixing, contour**.**

Введение. Несмотря на широкое применение на практике и большое разнообразие методов расчета неоднородных анизотропных пологих оболочек, встречаются существенные трудности при их практической реализации. Они определяются не только сложностью интегрирования системы трех дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, но и сложностью удовлетворения сопутствующих им граничных условий. Очень редко при решении практических задач такой расчет может быть проведен в аналитическом виде. Целесообразно, а иногда и единственно возможно использовать современные численные методы. Наиболее простым из них является метод конечных разностей (МКР). Причем, при использовании этого метода, оказывается, что решение может быть найдено с достаточной степенью точности в одних случаях опорного закрепления, например, − шарнирно-подвижного, − на простой и достаточно редкой сетке, в других же, например − жестком защемлении, − только на сложной или весьма густой сетке, что делает соответствующий расчет очень трудоемким даже при использовании современной вычислительной техники.

Для ослабления указанного недостатка целесообразно строить численное решение так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и погружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загружения, при разыскании которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. Такая методика расчета, хотя и несколько усложняет нахождение искомого решения для сложных случаев закрепления, так как его приходится осуществлять в два шага, тем не менее, в конечном счете, оказывается более эффективной, поскольку позволяет находить составные части искомого решения с применением аналитических соотношений или сравнительно простых по структуре и небольших по числу систем конечноразностных уравнений.

Анализ последних публикаций. Данная статья адресуется к инженерам и научным работникам занимающимися проектированием тонкостенных конструкций. Основная ее установка – продолжения исследования частных задач, для различных соотношений между размерами оболочек и способами закрепления на краях и некоторые из которых были рассмотрены в работе [1].

Целью этого исследования было изложить методику расчета, реализующую сформулированную идею и результаты ее использования проиллюстрировать на примерах.

Объекты и методы исследования. Задача расчета неоднородной анизотропной прямоугольной пологой оболочки с произвольным закреплением на контуре может быть записана в следующем общем виде:

$$\vec{L}[\vec{q}]_{\Omega} = \vec{f}, \qquad \vec{R}_i[\vec{q}]_{\vec{S}_i^R} = \vec{Q}_i, \qquad \vec{\Gamma}_i[\vec{q}]_{\vec{S}_i^{\Gamma}} = \vec{\gamma}_i, \tag{1}$$

где $i=1,2;\ j=1,2,3.$

$$\vec{L}[\vec{q}]=\begin{bmatrix} A'C(A\vec{u}+\vec{k}\omega) \\ k'C(A\vec{u}+\vec{k}\omega)-\vec{B}'D\vec{B}\omega \end{bmatrix}, \qquad \vec{R}_i[\vec{q}]=\left[R_{ij}\right], \qquad \vec{\Gamma}_i[\vec{q}]=\left[\vec{\Gamma}_{ij}\right], \tag{2}$$

где Ω − прямоугольная область, на которую опирается оболочка; S − ограничивающие эту область прямолинейные части контура; $\vec{f}$ − вектор нагрузок; $\vec{Q}_i$ и $\vec{\gamma}_i$ − векторы заданных на участках $\left\lfloor S_{ij}^R \right\rfloor=\vec{S}_i^R$ и $\left\lfloor S_{ij}^\Gamma \right\rfloor=\vec{S}_i^\Gamma$ ($S_{ij}^R<S$, $S_{ij}^R=S-S_{ij}^R$) контура значений угла поворота, перемещений, изгибных и цепных усилий; $\vec{q}'=[\vec{u}'w]$, $\vec{u}'=[uv]$ − векторы перемещений точек срединной поверхности оболочки; C и D − цепная и изгибная матрицы ее жесткости, элементы которых считаются далее произвольными функциями координат x и y.

Кроме того:

$$A=\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Vmatrix} \qquad \vec{k}=\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \vec{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}.$$

И далее $R_{11}=R_{12}=\Gamma_{11}=\Gamma_{12}=0$, $R_{23}=w$ и $\Gamma_{22}=S$ при $x=\pm a$ и $y=\pm b$.

$$R_{13}=\begin{cases} \mp\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \mp\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \qquad \Gamma_{23}=\begin{cases} Q_x+\dfrac{\partial H}{\partial y} & при \quad x=\pm a \\ Q_y+\dfrac{\partial H}{\partial x} & при \quad y=\pm b \end{cases}.$$

$$R_{21}=\begin{cases} \pm u \\ \pm v \end{cases} \quad R_{22}=\begin{cases} \pm v \\ \pm u \end{cases} \quad \Gamma_{13}=\begin{cases} M_x \\ M_y \end{cases} \quad \Gamma_{21}=\begin{cases} T_x & при \quad x=\pm a \\ T_y & при \quad y=\pm b \end{cases}.$$

Здесь штрих при матрицах обозначает их транспонирование. Рассматривая различные комбинации возможных значений элементов $\vec{S}_i^R$ и $\vec{S}_i^\Gamma$, из (2) можно легко получить краевые задачи, описывающие состояние рассчитываемой оболочки при всех без исключения способах закрепления и нагружения ее края.

Предположим, что ищется решение задачи (1), причем известно решение соответствующей “жесткой” задачи:

$$\vec{L}[\vec{z}]_\Omega=\vec{f}, \qquad \vec{R}_i[\vec{z}]_{\vec{S}_i^R}=\vec{\rho}_i. \tag{3}$$

В работе [2] показано, что между решениями (1) и (3) имеет место зависимость:

$$\bar{q}(P)=\bar{z}(P)+\tau'(P)F^{-1}\left\{\iint_\Omega \tau\bar{f}dw-\sum_{i=1}^{2}\left[\int_{\bar{S}_i^R}\tau_i^r\bar{\rho}_i ds-\int_{\bar{S}_i^\Gamma}\tau_i^R\bar{\gamma}_i ds\right]\right\}, \tag{4}$$

где $F=\left\|F_{mn}\right\|_{m,n=1,2,\ldots}$, $\tau_i^\Gamma=\left\|\vec{\Gamma}_{ij}\right\|_{j=1,2,3,\ldots}$, $\tau_i^R=\left\|\vec{R}_{ij}\right\|_{j=1,2,3,\ldots}$, причем $F_{mn}=\left\|F_{mn}^{kl}\right\|_{k,l=1,2,\ldots}$, $\vec{\Gamma}_{ij}=\left\lfloor \Gamma_{ij}^k \right\rfloor_{k=1,2,\ldots}$, $\vec{R}_{ij}=\left\lfloor R_{ij}^k \right\rfloor_{k=1,2,\ldots}$ суть матрицы – блоки, элементы которых вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} F_{11}^{kl}=(A\Phi_k)'CA\Phi_l, \quad F_{12}^{kl}=(A\Phi_k)'C\vec{k}\chi_l, \quad F_{21}^{kl}=(\vec{k}\chi_k)'CA\Phi_l, \\ F_{22}^{kl}=(\vec{k}\chi_k)'C\vec{k}\chi_l-(\vec{B}\chi_k)'DB\chi_l, \quad R_{11}^k=R_{12}^k=\Gamma_{11}^k=\Gamma_{12}^k=0, \\ R_{13}^k=R_{13}(\chi_k), \quad R_{21}^k=R_{21}(\varphi_k), \quad R_{22}^k=R_{22}(\varphi_k), \quad R_{23}^k=R_{23}(\chi_k), \\ \Gamma_{13}^k=\Gamma_{13}(\chi_k), \quad \Gamma_{21}^k=\Gamma_{21}(\vec{\xi}_k), \quad \Gamma_{22}^k=\Gamma_{22}(\vec{\xi}_k), \quad \Gamma_{23}^k=\Gamma_{23}(\chi_k). \end{gathered} \tag{5}$$

Далее $\Phi_k = \|\varphi_k \Psi_k\|$, а матрица τ имеет вид:

$$\tau = \begin{Vmatrix} \vec{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{\chi} \end{Vmatrix} \tag{6}$$

Здесь $\vec{\varphi} = [\varphi_j]_{j=1,2,\dots}$, $\vec{\psi} = [\psi_j]_{j=1,2,\dots}$, $\vec{\chi} = [\chi_j]_{j=1,2,\dots}$. Последние должны быть линейно независимыми и удовлетворять условиям:

$$\vec{L}\left(\vec{\xi}_j\right)_{\Omega} = 0, \quad \vec{R}_i\left(\vec{\xi}_j\right)_{\bar{S}_i^R} = 0, \quad \vec{\xi}'_j = [\vec{\varphi}'_j \chi_j] \qquad \vec{\varphi}'_j = [\varphi_j \Psi_j] \tag{7}$$

Если, в частности, известна матрица влияния K (P, Q) для оболочки с жестким закреплением края, то матрица влияния G (P, Q) для оболочки с любым другим способом закрепления может быть записана в симметричном виде:

$$G(P, Q) = K(P, Q) + \tau'(P)F^{-1}\tau(Q). \tag{8}$$

Конечно, с помощью (8) можно легко установить связь между матрицами влияния неоднородной анизотропной пологой оболочкой с двумя произвольными условиями закрепления ее кромок.

Формула (4) может быть использована не только для нахождения $\bar{q}$ по известному $\bar{z}$, но и для определения $\bar{z}$, если мы знаем $\bar{q}$. Последний, как уже указывалось, может быть построен для некоторых способов опорного закрепления иногда приближенно или даже точно аналитически, либо численно при помощи МКР, но с применением сравнительно простой и редкой сетки. В этих случаях целесообразно строить решение так: сначала осуществить полный расчет неоднородной оболочки при этих специальных условиях закрепления, затем с достаточно высокой степенью точности перейти к стандартным (абсолютно жестким) граничным условиям и, наконец, от них – уже к любым другим условиям закрепления и загружения.

В случае, когда оболочка неоднородна, элементы матриц жесткости C и D зависят от координат x и y; при этом коэффициенты уравнений (7) переменны, и решения ее могут быть найдены только в результате применения какого-нибудь численного метода. Здесь с этой целью использовался МКР.

Метод конечных разностей для расчета неоднородных пологих оболочек был развит и успешно применен в работе [3].

Предположим, что прямоугольная область задачи $x \le 2a$, $y \le 2b$ разбита сеткой, образующей mn внутренних узлов. Тогда в $3mn$ конечно-разностные уравнения, являющиеся аналогом (7), будет входить [3] $3mn$ неизвестных в узловых точках внутри области Ω, $6(m+n+2)$ неизвестных в контурных точках области и $2(m+n+4)$ неизвестных в законтурных точках – всего $3mn+8(m+n)+20$ неизвестных u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}. Добавляя сюда p соотношений, заданных в контурных и законтурных точках области и являющихся следствием граничных условий (7), получаем систему $3mn+p$ линейных алгебраических уравнений с $3mn+8(m+n)+20$ неизвестными. Ясно, что такая система дает возможность определить $t=8(m+n)+20-p$ линейно-независимых решения, каждое из которых представляет собой тройку дискретно заданных координатных функций рассматриваемой задачи.

Результаты исследования. Результаты расчета приведены для серии пологих ортотропных оболочек на прямоугольном плане с соотношением сторон a / b = 1 в случае жесткого закрепления по контуру. Значения относительных изгибных жесткостей D_1/D_2 и D_3/D_2 = 1,5, а также отношения модуля нормальной упругости к модулю сдвига E_1/G = 3,8. При этом нагрузка принималась сосредоточенной силы в центре оболочки; соотношение подъемистости δ/h принимались равными 15, 20, 25, 30, 35.

Для удобного применения результатов расчета численные значения прогибов в центре, моментов на середине сторон (x = ± a и y = ± b) оболочки приведены в таблице 1 для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Приведенные значения в таблице дают возможность судить о напряженно-деформированном состоянии оболочки.

Таблица 1 – Усилия от действия сосредоточенной нагрузки

a / b	δ / h	Прогиб в центре	Моменты в середине опорных сторон	
		$w = \alpha \dfrac{P(2b)^2}{E_1 h^3}$	$M_x = \beta_1 P$ $x = \pm a$, $y = 0$	$M_y = \beta_2 P$ $y = \pm b$, $x = 0$
		α	β_1	β_2
1	15	0,007808	-0,127657	-0,111857
	20	0,005976	-0,111621	-0,098634
	25	0,004596	-0,098612	-0,087903
	30	0,003754	-0,087284	-0,078708
	35	0,003140	-0,076863	-0,070495

Выводы. Из рассмотрения этой таблицы следует, что прогибы в центре оболочки уменьшаются с увеличением параметра δ/h. Величины моментов, с увеличением соотношения подъемистости δ/h, уменьшаются. В центре оболочки и в области, примыкающей к нему, изгибающие моменты малы и, следовательно, напряженное состояние оболочки близко к безмоментному в связи с этим численные значения в таблице не приводятся.

Последовательно увеличивая δ/h на 5 единиц, в каждом случае это приводилось к уменьшению прогиба w при действии сосредоточенной силы P примерно в 1,3 раза. Значения моментов M_x и M_y в середине опорных сторон, при увеличении δ/h на 5 единиц также уменьшаются по модулю примерно в 1,13 раза.

Литература

1. Заврак Н.В. К одному способу расчета неоднородных анизотропных пологих оболочек с различными закреплениями на краях / Н.В. Заврак // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: Зовнішрекламсервіс 2012. – Вип. 45.– С.99 - 105.

2. Слезингер И. Н. Об одном способе решения линейных краевых задач самосопряженного типа / И.Н. Слезингер // Прикладная математика и механика, – 1956. – Т. XX, – Вып. 6. – С. 704-713.

3. Абовский Н. П. Обобщенные вариационно-разностные уравнения теории неоднородных анизотропных (в том числе ребристых) пологих оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, Р. А. Сабиров. // Пространственные конструкции: межвуз. сб. науч. раб. Вып УІІ. - Красноярск, 1974. – С. 36-53.

Стаття надійшла 10.10.2017