

## ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ДЕЦИМАЦИЯ ЦИФРОВЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

*Излагается теория преобразования структуры дискретизации многомерного сигнала на основе векторного представления многомерных цифровых сигналов и систем на решетках.*

**Ключевые слова:** структура дискретизации, решетка, интерполяция, децимация.

Значительная часть научных экспериментов на МКС в той или иной степени связана с обработкой, консервацией и передачей изображения [1,2]. Поскольку многомерный телевизионный сигнал обладает повышенной информационной избыточностью, представляется целесообразным классификация исследуемых объектов по выделению интересующих признаков конкретного исследования с последующей цифровой обработкой. Одним из направлений применения многомерной обработки является субдискретизация и интерполяция изображения в телевидении высокого и повышенного разрешения.

Важное значение в теории многомерной обработки цифровых сигналов является  $n$ -мерная структура дискретизации [3,4,5], представляющая собой решетку  $\Lambda$ , определяемую матрицей  $V$  образованную векторами, являющимися базисом решетки (рис.1). Решетке  $\Lambda$  соответствует векторное произведение  $\Lambda = V \cdot \vec{m}$ , где  $\vec{m}$  - вектор целочисленных значений.

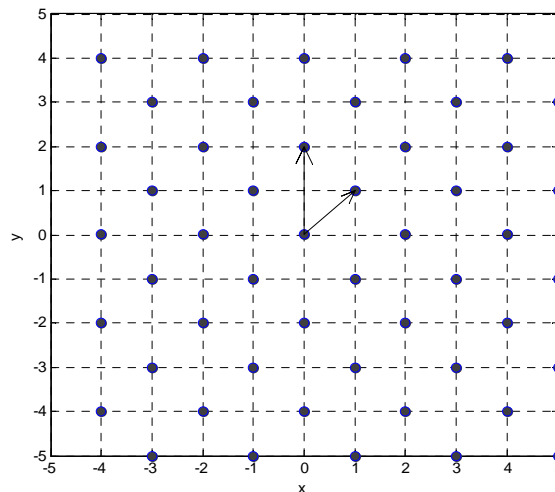


Рис.1 – Двумерная решетка дискретизации  $\Lambda_1$ , где  $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Интерполяция и децимация многомерного сигнала связана с преобразованием структуры пространственной дискретизации решетки  $\Lambda_1$  в  $\Lambda_2$  соответственно на входе и выходе преобразователя, при этом произведение  $V_1^{-1} \cdot V_2$  образует матрицу рациональных чисел.

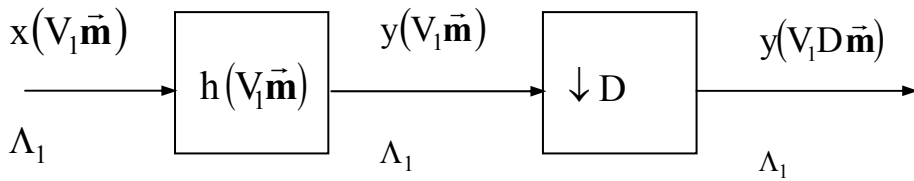


Рис. 2 - Функциональная схема процесса децимации решетки.

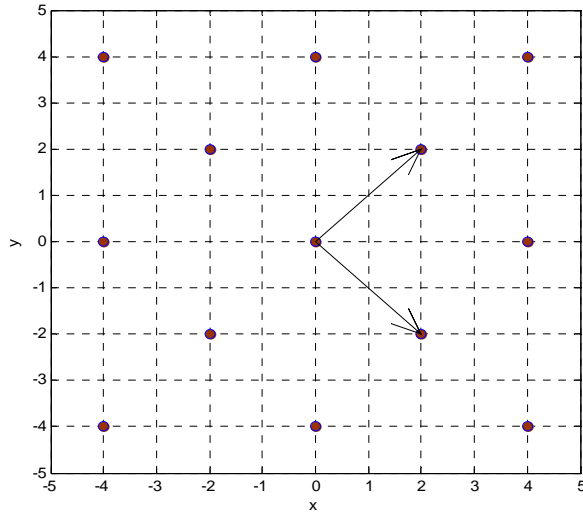


Рис.3 - Двумерная решетка  $\Lambda_2$  после децимации, где  $V_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ .

Процесс децимации представлен на рис.2, а решетка после децимации на рис.3, что приводит к образованию подрешетки, где  $V_1^{-1} \cdot V_2 = D$  является матрицей децимации, состоящей из целочисленных значений  $|\det D| \geq 2$ . Операция пространственной низкочастотной предфильтрации описывается выражением пространственной свертки

$$Y(V_1 \vec{m}) = \sum_{\vec{r}} X(V_1 \vec{r}) \cdot h(V_1 \vec{m} - V_1 \vec{r}), \quad (1)$$

где  $h(V_1 \vec{m})$ -импульсная характеристика пространственного фильтра.

Для дальнейшего исследования характера ошибок в спектральной области сигнал децимации удобно определить:

$$Y'(V_1 \vec{m}) = \begin{cases} Y(V_1 \vec{m}), & \vec{m} = D\vec{k} \\ 0, & \vec{m} \neq D\vec{k} \end{cases}. \quad (2)$$

Используя свойство дискретного ряда Фурье на решетке [5,6,7], целесообразно следующее представление:

$$\begin{aligned} Y'(V_1 \vec{m}) &= Y(V_1 \vec{m}) \cdot \frac{1}{|\det D|} \cdot \sum_{\vec{g}} \exp \left[ 2\pi \left( (V_1 D)^{-T} \vec{g} \right)^T \cdot \vec{m} \right] = \\ &= Y(V_1 \vec{m}) \cdot \frac{1}{|\det D|} \cdot \sum_{\vec{g}} \exp \left( 2\pi \vec{g}^T (V_1 D)^{-1} \vec{m} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vec{g}$ -вектор положительных целочисленных значений, принадлежащий области  $\mathbf{I}_D$ , определяемой условием  $|\mathbf{D}^{-T} \vec{g}| < 1$ , T-операция транспонирования,  $\frac{1}{|\det D|} \cdot \sum_{\vec{g}} \exp(2\pi \vec{g}^T (V_1 D)^{-1} \vec{m}) -$

прореживающая функция принимает нулевые значения для  $\vec{m} \neq D\vec{k}$  и выполняет функцию децимации. Область  $|\mathbf{D}^{-T}\vec{g}| < 1$  находится внутри фундаментального параллелепипеда [6] (рис.4), которая является элементарной ячейкой пространственной взаимной решетки  $\mathbf{V}_1^{-T}$ . Двумерный спектр прореживающей функции приведен на рис.5.

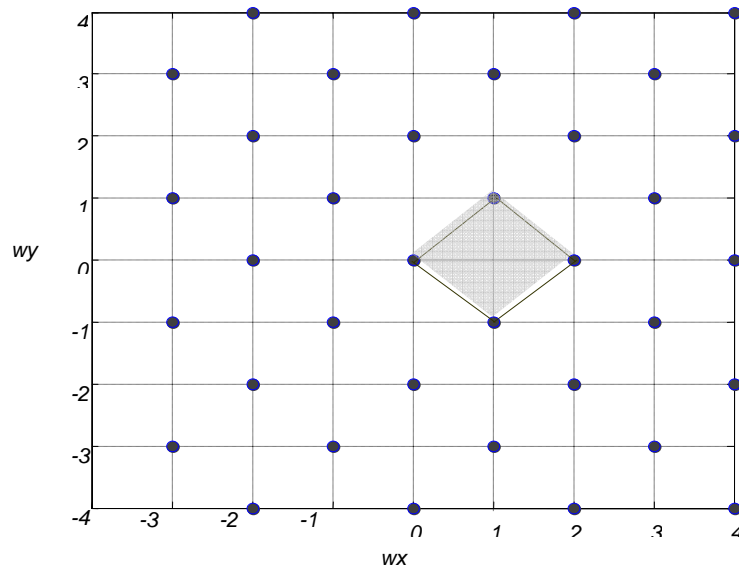


Рис.4 - Спектр решетки дискретизации  $\Lambda_2^*$ , где  $\mathbf{U}_1 = \pi \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и фундаментальный параллелепипед, определяющий область спектра прореживающей функции  $\exp(2\pi \cdot \vec{g}^T (\mathbf{V}_1 \mathbf{D})^{-1} \vec{m})$ , где  $(wx, wy) = 2$  соответствует частоте дискретизации наименьшей ортогональной решетки  $\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

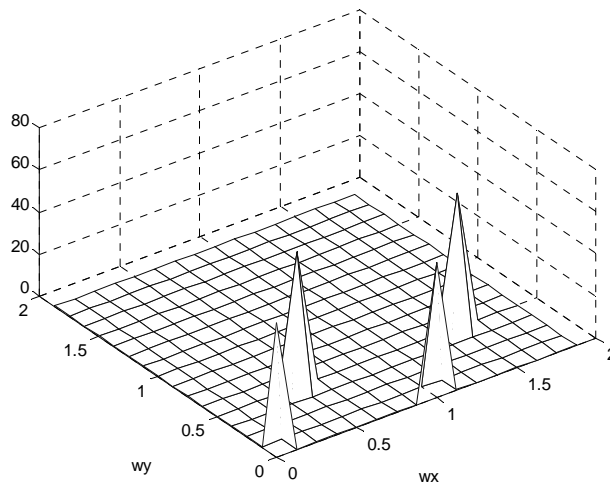


Рис.5 - Двумерный спектр прореживающей функции  $\frac{1}{|\det \mathbf{D}|} \cdot \sum_{\vec{g}} \exp(2\pi \vec{g}^T (\mathbf{V}_1 \mathbf{D})^{-1} \vec{m})$  для области

$$\mathbf{I}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что выходной сигнал дециматора определен на подрешетке  $\Lambda_2$  и объединяет выражения(1) и (2), можно уменьшить объем вычислений префильтра в реальном процессоре цифровой многомерной децимации и получить

$$Y(V_1 D \vec{k}) = \sum_{\vec{r}} X(V_1 \vec{r}) \cdot h(V_1 D \vec{k} - V_1 \vec{r}).$$

Пространственный спектр на выходе процесса децимации многомерного сигнала определяется как векторное преобразование Фурье [4,7,8] выражения (3) (представлен на рис.6)

$$\begin{aligned} Y(\vec{w}) &= \sum_{\vec{m}} X(\vec{w} - U_1 \vec{m}) \cdot H(\vec{w} - U_1 \vec{m}) \otimes \sum_{\vec{m}} \sum_{\vec{g}} \frac{(2\pi)^n}{|\det D|} \cdot \delta(\vec{w} - U_1 \vec{m} - U_1 D^{-T} \vec{g}) = \\ &= \frac{1}{|\det D|} \sum_{\vec{m}} \sum_{\vec{g}} X(\vec{w} - U_1 \vec{m} - U_1 D^{-T} \vec{g}) \cdot H(\vec{w} - U_1 \vec{m} - U_1 D^{-T} \vec{g}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $U_1 = 2\pi V_1^{-T}$  - матрица спектральной решетки периодизации (рис.4);

$\otimes$  - операция  $n$ -мерной свертки.

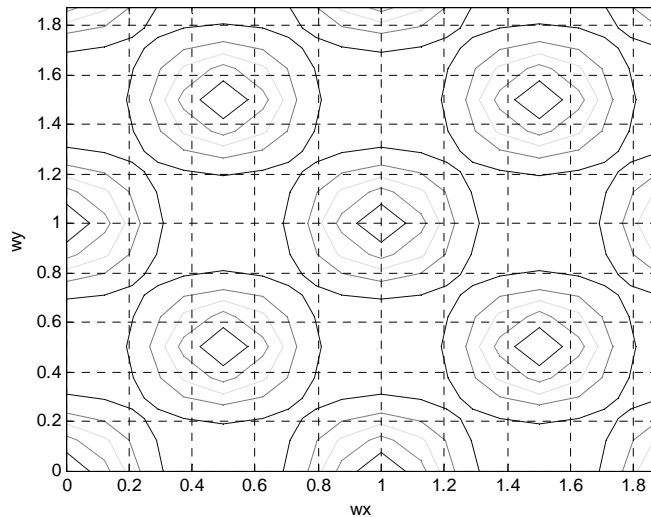


Рис.6 - Контурный график с линиями уровня двумерного спектра сигнала после децимации.

$$\frac{1}{|\det D|} \sum_{\vec{m}} \sum_{\vec{g}} X(\vec{w} - U_1 \vec{m} - U_1 D^{-T} \vec{g}) \cdot H(\vec{w} - U_1 \vec{m} - U_1 D^{-T} \vec{g}) \text{ для } U_1 = \pi \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Назначение пространственного фильтра  $H(\vec{w})$ - отфильтровать сигнал  $X(V_1 \vec{m})$ , чтобы избежать модуляционных искажений связанных с наложением спектра после процесса децимации. В общем случае спектральную характеристику префильтра можно рассматривать, как характеристику идеального пространственного фильтра нижних частот, граница спектра которого определяется элементарной ячейкой Вороного [6] на спектральной решетке  $\Lambda_2^* = U_1 D^{-T} \vec{m}$ , образующую множество всех точек, расположенных ближе к нулю, чем к другим точкам спектральной решетки  $\Lambda_2^*$

(рис.7). Частотная характеристика двумерного цифрового предфильтра децимации, определяемая ячейкой Вороного, приведена на рис.8.

Процесс интерполяции многомерного сигнала представлен на рис 9. Его математической основой является образование решетки  $\Lambda_2$ , для которой  $\Lambda_1$  является подрешеткой, где  $V_2^{-1}V_1 = E$  является матрицей интерполяции и состоит из целочисленных значений  $|\det E| \geq 2$  [9].

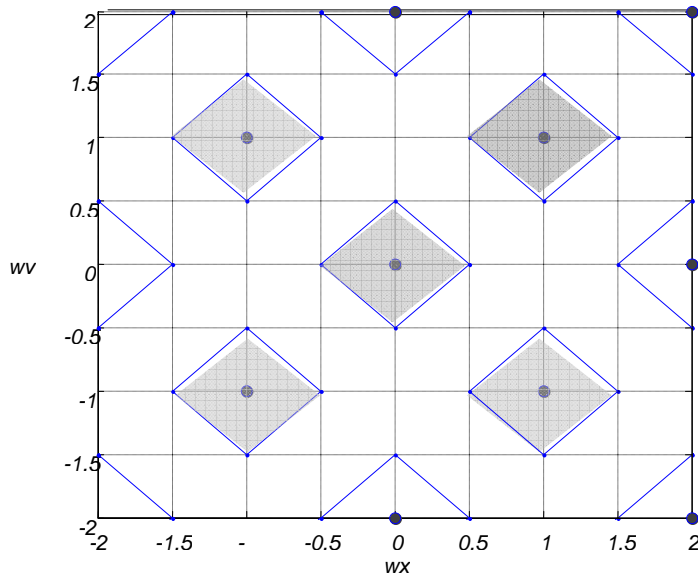


Рис.7 - Ячейки Вороного на спектре  $U_1$  решетки  $V_1$ , для оценки цифрового предфильтра  $h(V_1\vec{m})$  перед децимацией.

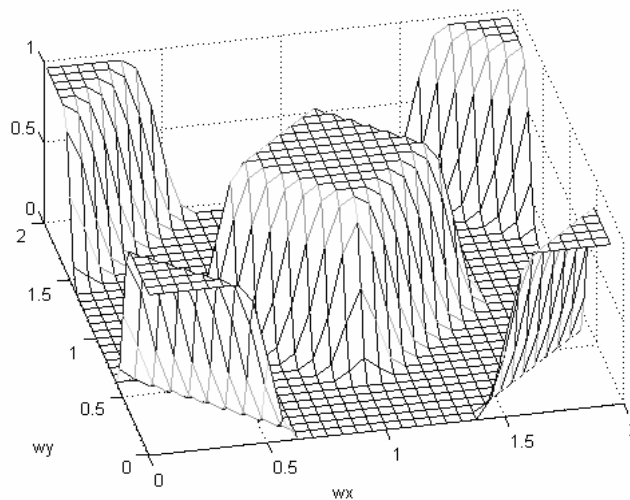


Рис.8 - Частотная характеристика двумерного цифрового предфильтра децимации для

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Входной сигнал  $X(V_1\vec{k})$ , определенный на подрешетке  $\Lambda_1$  заполняется нулевыми отсчетами до получения решетки  $\Lambda_2$ , которые помещаются между точками решетки  $\Lambda_1$ , в результате получаем сигнал

$$X'(V_2 \vec{m}) = \begin{cases} X(V_1 E^{-1} \vec{m}), & \vec{m} = E \vec{k} \\ 0, & \vec{m} \neq E \vec{k} \end{cases}, \quad (5)$$

который может быть представлен в виде

$$X'(V_2 \vec{m}) = X(V_1 E^{-1} \vec{m}) \cdot \frac{1}{|\det E|} \sum_{\vec{p} \in \mathbf{I}_E} \exp(2\pi \vec{p}^{-T} (V_2 E)^{-1} \vec{m}), \quad (6)$$

где  $\vec{p}$  - вектор положительных целочисленных значений, принадлежащих области  $\mathbf{I}_E$ , определяемой условием  $|E^{-T} \vec{p}| < 1$ .

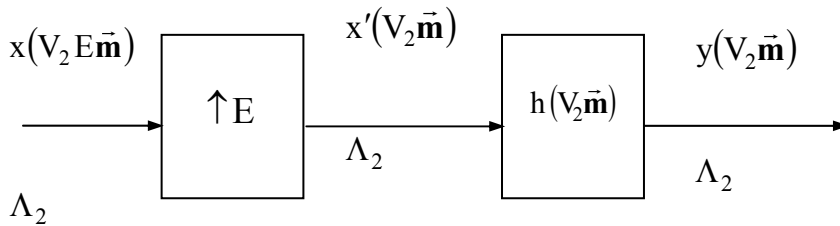


Рис. 9 - Функциональная схема процесса интерполяции решетки.

Для восстановления сигнала во всех точках решетки  $\Lambda_2$  и устранения нежелательных высокочастотных составляющих пространственного спектра, необходимо отфильтровать сигнал  $X'(V_2 \vec{m})$  с помощью низкочастотного пространственного постфильтра

$$Y(V_2 \vec{m}) = \sum_{\vec{r}} X'(V_2 \vec{r}) \cdot h(V_2 \vec{m} - V_2 \vec{r}), \quad (7)$$

который в идеале должен являться пространственным фильтром нижних частот, спектральные границы которого определяются элементарной ячейкой Вороного на спектральной решетке  $\Lambda_1^* = U_2 E^{-T} \vec{m}$ .

С учетом определения (5) выражение (7) может быть представлено как частный случай в виде

$$Y(V_2 \vec{m}) = \sum_{\vec{k}} X(V_2 E \vec{k}) \cdot h(V_2 \vec{m} - V_2 E \vec{k}), \quad (8)$$

т.е. в реальном цифровом процессе интерполяции в постфильтрации участвуют только исходные значения, определяемые на подрешетке  $\Lambda_1$ .

Пространственный спектр интерполированного цифрового многомерного сигнала определяется как векторное преобразование Фурье выражения (7) с учетом выражения (6) представлен на рис.10.

$$\begin{aligned}
 Y(\vec{w}) &= \left[ \sum_{\vec{m}} X(\vec{w} - U_2 \vec{m}) \otimes \frac{(2\pi)^n}{|\det E|} \cdot \sum_{\vec{p}}^{I_E} \delta(\vec{w} - U_2 \vec{m} - U_2 E^{-T} \vec{p}) \right] \cdot H(\vec{w} - U_2 \vec{m}) = \\
 &= \frac{1}{|\det E|} \sum_{\vec{m}} \sum_{\vec{p}}^{I_E} X(\vec{w} - U_2 \vec{m} - U_2 E^{-T} \vec{p}) \cdot H(\vec{w} - U_2 \vec{m}).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

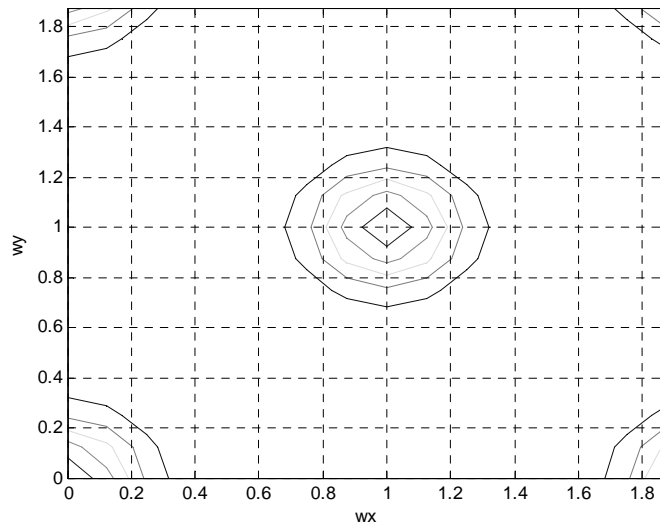


Рис.10 - Контурный график с линиями уровня двумерного спектра сигнала после интерполяции  $\frac{1}{|\det E|} \sum_{\vec{m}} \sum_{\vec{p}}^{I_E} X(\vec{w} - U_2 \vec{m} - U_2 E^{-T} \vec{p}) \cdot H(\vec{w} - U_2 \vec{m})$  для  $U_2 = \pi \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$  и  $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

В двух предыдущих случаях рассмотрены варианты изменения структуры цифрового многомерного сигнала в целое число раз.

В этом подразделе рассматривается общий случай преобразования структуры решетки, где матрица преобразования состоит из рациональных чисел  $V_1^{-1}V_2 = E^{-1}D$  [5,7,9]. Такое преобразование будет осуществляться посредством поочередного выполнения процесса целочисленной интерполяции с матрицей  $E$  и затем целочисленной децимации с матрицей  $D$ . Схематически это изображено на рис.11.

Напомним, что  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  является наименьшей из решеток, содержащих одновременно подрешетки  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , которой соответствует  $V\vec{m} = \Lambda_1 + \Lambda_2$ .

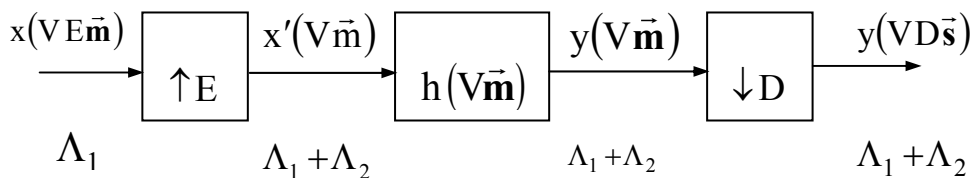


Рис. 11 - Функциональная схема процесса децимации и интерполяции.

Связь между входным и выходным цифровым многомерным сигналом для общей схемы преобразования структуры можно определить, используя соотношения, полученные для дециматора и интерполятора, которая может быть представлена в виде:

$$X'(V\bar{\mathbf{m}}) = X(V\bar{\mathbf{m}}) \cdot \frac{1}{|\det E|} \sum_{\bar{\mathbf{p}}}^{I_E} \exp(2\pi \bar{\mathbf{p}}^T (VE)^{-1} \bar{\mathbf{m}}), \quad (10)$$

$$Y(V\bar{\mathbf{m}}) = \sum_{\bar{\mathbf{r}}} X'(V\bar{\mathbf{r}}) \cdot h(V\bar{\mathbf{m}} - V\bar{\mathbf{r}}), \quad (11)$$

$$Y'(V\bar{\mathbf{m}}) = Y(V\bar{\mathbf{m}}) \cdot \frac{1}{|\det D|} \sum_{\bar{\mathbf{g}}}^{I_D} \exp(2\pi \bar{\mathbf{g}}^T (VD)^{-1} \bar{\mathbf{m}}). \quad (12)$$

Выражение (12) соответствует общей форме представления выходного сигнала на решетке, которое удобно для дальнейшего спектрального анализа преобразования структуры цифрового многомерного сигнала.

С учетом сомножителей  $\exp(2\pi \bar{\mathbf{g}}^T (VD)^{-1} \bar{\mathbf{m}})$  и  $\exp(2\pi \bar{\mathbf{p}}^T (VE)^{-1} \bar{\mathbf{m}})$ , определяющих входной и выходной сигнал на подрешетках и соответственно, реальный процесс преобразования цифрового многомерного сигнала имеет вид

$$Y(VD\bar{\mathbf{s}}) = \sum_{\bar{\mathbf{k}}} X(VE\bar{\mathbf{k}}) \cdot h(VD\bar{\mathbf{s}} - VE\bar{\mathbf{k}}). \quad (13)$$

Пространственный спектр выходного сигнала преобразования с учетом выражения (4) и (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} Y(\bar{\mathbf{w}}) &= \sum_{\bar{\mathbf{m}}} X(\bar{\mathbf{w}} - U\bar{\mathbf{m}}) \otimes \frac{(2\pi)^n}{|\det E|} \cdot \sum_{\bar{\mathbf{m}}} \sum_{\bar{\mathbf{p}}}^{I_E} \delta(\bar{\mathbf{w}} - U\bar{\mathbf{m}} - UE^{-T}\bar{\mathbf{p}}) \times \\ &\times H(\bar{\mathbf{w}} - U\bar{\mathbf{m}}) \otimes \frac{(2\pi)^n}{|\det D|} \cdot \sum_{\bar{\mathbf{m}}} \sum_{\bar{\mathbf{g}}}^{I_D} \delta(\bar{\mathbf{w}} - U\bar{\mathbf{m}} - UD^{-T}\bar{\mathbf{g}}) = \frac{1}{|\det E| \cdot |\det D|} \times \\ &\times \sum_{\bar{\mathbf{m}}} \sum_{\bar{\mathbf{p}}}^{I_E} \sum_{\bar{\mathbf{g}}}^{I_D} X(\bar{\mathbf{w}} - U\bar{\mathbf{m}} - UE^{-T}\bar{\mathbf{p}} - UD^{-T}\bar{\mathbf{g}}) \cdot H(\bar{\mathbf{w}} - U\bar{\mathbf{m}} - UD^{-T}\bar{\mathbf{g}}), \end{aligned} \quad (14)$$

что выражает геометрическую картину укладки спектров, выявляющую степень их взаимного положения и возможности разделения путем фильтрации, а также позволяет оценить возникающие при этом искажения и тем самым судить об оптимальности фильтрации и выбранной структуры дискретизации.

Итак, получены выражения в реальном и спектральном пространстве систем децимации, интерполяции и преобразования структуры цифрового многомерного сигнала на решетках. Эти и другие, близкие к ним вопросы лежат в основе множества практических задач, связанных с многомерной обработкой сигнала, сложность и разнообразие которых быстро возрастает. Это еще в большей степени оправдывает изложенный метод, основанный на теории решеток.

### Заключение

В статье приведен анализ процессов децимации, интерполяции и преобразования структуры цифрового многомерного сигнала, особенностью которого является использование решеток для описания данных процессов. Такой подход выбран как наиболее приемлемый для задач цифровой обработки многомерных сигналов, где необходимо иметь представление этих процессов в спектральной области и производить оптимизацию характеристик пред- и постфильтров, способных обеспечить необходимое качество изображения проектируемых ТВ-систем повышенного и высокого разрешения, повысить точность обработки и анализа изображений в любых спектральных областях наблюдений при проведении научных экспериментов.



### Список литературы

1. Горьев С.А., Попов С.А., Рядинский Б.Ф. Система цветного телевидения с временным уплотнением компонентных сигналов изображения // Труды Ракетно-Космической Корпорации «Энергия» им. С.П. Королёва, г.Королёв. – 2004. – Т. XII, №3. – С.63-74.
2. Горьев С.А., Аристархов Ю.Н. Предварительная обработка изображений полученных со спутника "ОКЕАН-О" // Труды 6-ой международной научно-практической конференции «Современные информационные и электронные технологии».- Одесса. - 2005. – С.112-113.
3. Игнатъев Н.К. Метод многомерных дискретизирующих функций // Радиотехника. – 1982. – №7. – С.37-41.
4. Дюбуа Э. Дискретизация и восстановление движущегося изображения в применении к видеосигналам // ТИИЭР. – 1985. – №4.-С.7-30.
5. Горьев С.А. Выбор пространственной структуры дискретизации телевизионного изображения // Техника средств связи. Сер. Техника телевидения. – 1989. – №2. – С.98-104.
6. Препарата Ф. Шаймос М. Вычислительная геометрия: введение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
7. Горьев С.А. Метод описания дискретизации телевизионных изображений // Электросвязь. – 1992. – № 2. – С.43-49.
8. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488с.
9. Merserean R., Speake T. The Pocesing of Periodically Sampled Multidimensional Signals // IEEE Trans. Aconst., Speech, Signal Processing. – 1983. – Vol. ASSP 31. – P.85-89.

#### **Интерполяція і децимація цифрових багатовимірних сигналів. Гор'єв С.А.**

*Викладається теорія перетворення структури дискретизації багатовимірного сигналу на базі векторного представлення математичних ґрат як структур дискретизації. Сформульовані основи практичної реалізації ґратчастої багатовимірної дискретизації. Запропонований теоретичний аналіз векторного багатовимірного сигналу в спектральній області, а також вимоги до фільтрів передфільтрації і інтерполюючої фільтрації.*

**Ключові слова:** структура дискретизації, математичні ґрати, інтерполяція, децимація.

#### **Interpolation and decimation of digital multivariate signal. Goriev S.**

*The theory of transformation of structure of digitization of a multivariate signal on the basis of vector representation of mathematical lattices as structures of digitization is stated. Bases of practical realization of trellised multivariate digitization are formulated. The theoretical analysis of a vector multivariate signal in spectral area, and also requirements to filters of a prefiltration and an interpolating filtration is offered*

**Keywords:** multivariate signal, interpolating, decimation, lattices.