Lyashko O., Skrypka V.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE SCALAR POTENTIAL IN THE TRUNCATED HOLLOW ELLIPSOID

We construct the general solution of the Laplace equation for an ellipsoid cavity bounded by coordinate surfaces ellipsoidal parts of the system. We have the regularity of infinite algebraic system that arises in satisfying the boundary conditions. We investigate the nature of convergence of series of general solution and provide recommendations for its correct numerical implementation.

Keywords: *Laplace equation, the scalar potential of the boundary problem, Dirichlet problem, ellipsoid, ellipsoidal coordinates, Legendre functions.*

УДК 519.872

Скрипка В.І., Чабак Л.М.

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

У *роботі пропонується простий спосіб одержання точного розв'язку диференціальних рівнянь, що описують стан системи масового обслуговування з нескінченною кількістю каналів. Подаються результати порівняльного аналізу характеристик стаціонарного режиму в системах з нескінченною та з обмеженою кількістю каналів з відмовами. Даються рекомендації щодо використання СМО з нескінченною кількістю каналів в якості математичної моделі більш складних систем масового обслуговування.*

Ключові слова: *система масового обслуговування, пуасонівський потік, показниковий закон, твірна функція, формули Ерланга, математична модель.*

Вступ. Пошук розв'язку диференціальних рівнянь (ДР), що визначають стан системи масового обслуговування (СМО), пов'язаний з великими математичними труднощами. Тому більшість авторів обмежуються дослідженнями стаціонарного режиму на основі виродженої системи ДР. Однак, стаціонарний розв'язок не дає відповіді на запитання про поведінку СМО у перехідному режимі, тому пошук точного розв'язку залишається не лише принциповою, але й актуальною практичною задачею.

Окремі випадки точних розв'язків, як правило, відносяться до СМО з двома-трьома фазовими станами. У таких випадках точний розв'язок одержується відносно просто, наприклад, з допомогою перетворення Лапласа [3]. Це перетворення можна успішно застосовувати у більш загальних моделях СМО, але одержані при цьому результати є досить складними для їх практичного використання [1]. В даній ситуації важливо мати такі теоретичні моделі, для яких, з одного боку, існували б прості розв'язки, а з іншого – ці моделі були б асимптотичними наближеннями до більш реальних фізичних систем. Саме такою моделлю є СМО з нескінченною кількістю каналів обслуговування, до розгляду якої ми приступаємо.

Постановка задачі. Припустимо, що СМО має необмежену кількість каналів обслуговування. В цьому випадку поняття втрати заявки для такої системи втрачає смисл, оскільки система у будь-який момент часу може прийняти чергову заявку на обслуговування. Проте, зберігає смисл поняття ймовірності стану, зокрема ймовірності $P_n(t)$ того, що на момент часу t в СМО знаходиться на обслуговуванні n каналів. Ця інформація щодо стану дає можливість оцінити міру завантаження СМО з великою кількістю каналів обслуговування. В усьому іншому будемо вважати, що виконуються умови постановки задачі обслуговування в системах з втратами.

Отже, нехай у СМО надходить пуасонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування однієї заявки кожним каналом є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом з параметром μ. Тоді, як відомо, стан СМО описується системою лінійних ДР [1]:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \tag{1}$$

$$P_n'(t) = -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t), \;\; n \ge 1, \tag{2}$$

Метою розв'язку є знаходження ймовірностей $P_n(t)$, $n \ge 0$.

Розв'язання задачі. Розв'язок системи (1), (2) можна одержати за допомогою твірної функції [2]. Ми пропонуємо спрощену процедуру одержання цього розв'язку.

Помножимо ДР (1) на x^0 , а кожне з рівнянь (2) – на x^n і додамо одержані результати. Маємо

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)x^n &= -\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda + n\mu)P_n(t)x^n + \lambda x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n + \mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)x^n = \\ &\lambda(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n + \mu(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t)x^{n-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Введемо твірну функцію

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n \;. \tag{4}$$

Розглянемо її частинні похідні

$$\Phi'_x = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t)x^{n-1}, \tag{5}$$

$$\Phi'_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t)x^n \;. \tag{6}$$

Ряди у співвідношеннях (4), (5) збігаються у сегменті $[-1;1]$, бо при $x = 1$ відповідні ряди збігаються: перший за умовою нормування ймовірностей, другий за умовою існування математичного очікування. Збіжність ряду (6) випливає з співвідношення (3).

Підставимо вирази (4) - (6) у рівняння (3), одержимо

$$\Phi'_t = (x-1)[\lambda\Phi - \mu\Phi'_x]. \tag{7}$$

Розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді

$$\Phi = F(x,t)e^{\alpha(x-1)}, \tag{8}$$

де $\alpha = \lambda / \mu$ - відносна інтенсивність потоку заявок, $F(x,t)$ - шукана функція.

Підставляючи (8) у рівняння (7), одержуємо

$$F_t' + \mu(x-1)F_x' = 0 \ . \tag{9}$$

Припустимо, що ліва частина ДР (9) є повним диференціалом. Тоді вираз $F(x,t) = c$, де F - довільна функція, аргументи якої пов'язані співвідношенням

$$\mu dt = \frac{dx}{x-1}, \tag{10}$$

є розв'язком ДР (9).

Загальний розв'язок ДР (10) має вигляд $x = 1 - ce^{\mu t}$.

Підпорядкувавши цей розв'язок умові $x(t)\big|_{t=0} = x_0$, одержимо співвідношення $x_0 - 1 = (x-1)e^{-\mu t}$, з якого знаходимо аргумент $u = (x-1)e^{-\mu t}$ функції $F(u)$, для якого ліва частина рівняння (9) є повним диференціалом для будь-якої диференційованої функції $F(u)$. Отже, враховуючи (8), маємо

$$\Phi = F(u)e^{\alpha(x-1)}. \tag{11}$$

Знайдемо розв'язок, що задовольняє початковим умовам $P_0(0) = 1, \ P_n(0) = 0, \ n \ge 1$.

Переносячи ці умови на твірну функцію, одержимо співвідношення $\Phi(x,0) = 1$, з якого враховуючи (11), маємо

$$F(x-1) = e^{-\alpha(x-1)}.$$

Отже, функція $F(u)$ є показниковою , а тому твірна функція остаточно записується так:

$$\Phi = e^{\alpha(x-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)}. \tag{12}$$

Розв'язок задачі одержимо розклавши праву частину співвідношення (12) за степенями x і враховуючи формулу (4). Маємо

$$P_n(t) = \frac{\alpha^n}{n!}\left(1-e^{-\mu t}\right)^n e^{-\alpha\left(1-e^{-\mu t}\right)}, \ n \ge 0 \ . \tag{13}$$

Зокрема, при $n = 0$ з (13) знаходимо ймовірність того, що на момент часу t усі канали вільні

$$P_0(t) = e^{-\alpha\left(1-e^{-\mu t}\right)}.$$

При $t \to \infty$ з (13) одержимо стаціонарний розв'язок

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}, \quad n \ge 0 \quad , \tag{14}$$

де $P_n = \lim\limits_{t\to\infty} P_n(t)$.

З формули (14) бачимо, що кількість зайнятих каналів у стаціонарному режимі розподілена за законом Пуасона. Цей висновок не є несподіваним з огляду на пуасонівський потік заявок і негайне подання на обслуговування кожної заявки.

Знайдемо середню кількість зайнятих каналів на момент часу t

$$m(t) = \Phi'_x\big|_{x=1} \overset{(12)}{=} \alpha\left(1 - e^{-\mu t}\right) \ . \tag{15}$$

З формули (15) випливає, що $m(t)$ досягає свого найбільшого значення у стаціонарному режимі.

Порівняльний аналіз. Для порівняння розглянемо k - канальну СМО з відмовами. Стаціонарний розв'язок для цієї системи, як відомо, записується у вигляді формули Ерланга [1]:

$$\overline{P_n} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{\alpha^i}{i!}}, \ 0 \le n \le k \ . \tag{16}$$

Запровадивши табульовані функції [3]

$$P(n,\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}, \quad R(i,\alpha) = 1 - \sum_{m=i}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} \ ,$$

формули Ерланга запишемо у більш зручному для обчислення вигляді

$$\overline{P_n} = \frac{P(n,\alpha)}{R(k+1,\alpha)}. \tag{17}$$

За формулою (17) знайдемо середню кількість зайнятих каналів

$$\overline{m} = \sum_{n=1}^{k} n\overline{P_n} = R^{-1}(k+1,\alpha) \sum_{n=1}^{k} nP(n,\alpha) = \alpha \frac{R(k,\alpha)}{R(k+1,\alpha)}. \tag{18}$$

З порівняння формул (14) і (17) , одержаних для стаціонарного режиму, випливає, що модель з нескінченною кількістю каналів дає занижену ймовірність для P_n при будь-яких n і k , оскільки $0 < R(k+1,\alpha) < 1$.

Відносна оцінка зазначеної відмінності складає величину

$$\varepsilon(k,\alpha) = \frac{\left|P_n - \overline{P}_n\right|}{P_n} = \frac{1 - R(k+1,\alpha)}{R(k+1,\alpha)}.$$

Так само, порівнюючи формули (15) при $t \to \infty$ і (18), переконуємося в тому, що модель з нескінченною кількістю каналів дає дещо завищений результат для математичного очікування кількості зайнятих каналів. Відносна оцінка різниці результатів становить величину

$$\delta(k,\alpha)=\left(\frac{m-\overline{m}}{m}\right)=\frac{P(k,\alpha)}{R(k+1,\alpha)}.$$

Значення $\varepsilon(k,\alpha)$ і $\delta(k,\alpha)$ для деяких значень k і α наведені у табл.1.

Таблиця 1

k	$\varepsilon(k,\alpha)$ $\delta(k,\alpha)$				
	$\alpha=0{,}5$	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=4$	$\alpha=6$
2	0,0146 0,0769	0,0873 0,2000	0,4778 0,4000	3,1987 0,6153	15,1368 0,7197
4	0,0002 0,0016	0,0037 0,0154	0,0556 0,0952	0,5902 0,3107	2,5080 0,4697
6		0,0001 0,0005	0,0046 0,0121	0,1244 0,1172	0,6493 0,2649
8			0,0002 0,0009	0,0218 0,0305	0,1803 0,1219
10				0,0028 0,0053	0,0445 0,0431
12				0,0001 0,0006	0,0089 0,0127
14					0,0014 0,0022
16					0,0003 0,0002

Висновки. Наведені у таблиці дані свідчать про те, що навіть для потоків з великими відносними інтенсивностями результати, одержані для k - канальної СМО при зростанні k швидко наближаються до відповідних результатів для СМО з нескінченною кількістю каналів. Оскільки кількість зайнятих каналів є найбільшою у стаціонарному режимі, то безпідставно вважати, що у перехідному режимі результати порівняльного аналізу виявляться гіршими. Отже, точний розв'язок для СМО з нескінченною кількістю каналів можна використовувати для оцінки стану (зокрема, у перехідному режимі) в більш складних моделях масового обслуговування.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кофман А., Крюон Р.* Массовое обслуживание, теория и приложения. М.: Мир, 1965.
2. *Розенберг В. Я., Прохоров А. И.* Что такое теория массового обслуживания. М..: Советское радио, 1962.
3. *Овчаров А.А.*Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969.

Скрипка В.И., Чабак Л.М.

О МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В работе предлагается простой способ получения точного решения дифференциальных уравнений состояния системы массового обслуживания с бесконечным числом каналов. Приводятся результаты сравнительного анализа характеристик стационарного режима для СМО с бесконечным и ограниченным числом каналов с отказами. Даются рекомендации об использовании СМО с бесконечным числом каналов в качестве математической модели более сложных систем массового обслуживания.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, пуассоновский поток, показательный закон, производящая функция, формулы Эрланга, математическая модель.*

Skrypka V., Chabak L.

ABOUT DESIGN OF QUEUING SYSTEMS

Is in process offered simple method of receipt of exact decision of differential equalizations of the state of the queuing system with the endless number of ducting's. Results over of comparative analysis of descriptions of the stationary mode are brought for queuing system with the endless and limited number of ducting's with refuses. Recommendations are given about the use of queuing system with the endless number of ducting's as a mathematical model of more difficult queuing systems.

Keywords: *queuing system, stream of Puasson , model law, productive function, formulas of Erlanga, mathematical model.*

УДК 621.43.018

Д.В. Кондратьєв, В.В. Панін

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АДИАБАТИЧЕСКОГО КПД СИЛОВОЙ ТУРБИНЫ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ ГТ-6-750

В работе представлено определение адиабатического (лопаточного) коэффициента полезного действия турбины при отсутствии возможности измерения давления рабочего тела на входе и на выходе из силовой турбины в процессе эксплуатации на работающем газоперекачивающем агрегате типа ГТ-6-750.

Ключевые слова*: коэффициент полезного действия, силовая турбина, газоперекачивающий агрегат*

Введение. Учет внутренних потерь в турбине, а именно гидравлических потерь в каналах соплового аппарата и рабочего колеса, потерь от перетекания рабочего тела (газа) в радиальном зазоре между подвижными лопатками и корпусом турбины, потерь на трение диска о газ, осуществляется с помощью адиабатического коэффициента полезного действия турбины. Его также называют лопаточным или гидравлическим.

Постановка проблемы. Согласно работам [1-3], данный КПД определяется по следующей формуле: