

УДК 532-528

В.В. Серебряков

#### КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ УДК 629.51

*Статья содержит анализ наиболее полной картины взаимодействия течений с развитой кавитацией, близких к осесимметричным, с полем сил тяжести. Это включает формирование целостной картины достигнутого уровня понимания основных физических явлений в этой области а также усовершенствованием имеющихся и разработкой новых методов расчета совместно с исследованием возможностей уменьшения воздействия поля сил тяжести на кавитационное течение.*

**Ключевые слова:** суперкавитация, каверна, весомость.

*Стаття містить аналіз якнайповнішої картини взаємодії течій з розвинутою кавітацією, близьких до осесиметричних, з полем сил тяжіння. Це включає формування цілісної картини досягнутого рівня розуміння основних фізичних явищ в цій області а також удосконаленням наявних і розробкою нових методів розрахунку спільно з дослідженням можливостей зменшення дії поля сил тяжіння на течію кавітації.*

**Ключові слова:** суперкавітація, каверна, ваговитість.

*The paper contain analysis of overall pictures for interaction flows with developed cavitation close to axisymmetric with gravity actions. This includes formation of overall picture of achieved level of understanding in this field and also perfecting having methods and development of new approaches for calculations together with research of possible ways for decreasing of the gravity action on cavitation flow.*

**Keywords:** supercavitation, cavity, gravity.

**Введение.** Применение кавитации к проблеме снижения сопротивления ограничено очень высокими скоростями движения, что не всегда приемлемо для ряда движущихся средств. С учетом **актуальности** применения кавитации для снижения сопротивления в диапазоне недостаточно высоких скоростей, в работе проводится анализ основных решений и экспериментальных данных в области воздействия поля сил тяжести на кавитационное течение.

Необходимость применения кавитации в диапазоне недостаточно высоких скоростей движения тесно связана с проблемами расчета и надежной оценки существенного воздействия поля сил тяжести на кавитационное течение. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы представить целостную картину понимания основных физических эффектов, связанных с взаимодействием развитых кавитационных течений, с полем сил тяжести.

Это включает разработку возможно более полной системы практических методов расчета развитых кавитационных течений, близких к осесимметричным с учетом существенного воздействия весомости жидкости и исследованием возможностей уменьшения или компенсации этого воздействия.

Проблемы исследования взаимодействия кавитационного течения с полем сил тяжести имеют долгую историю начиная, с известных работ по входу тела в воду G. Birkhoff, J. Levi, A. May, I. Moran и др., начиная с 40-х годов XX столетия [1].

Результаты исследований влияния поля сил тяжести в рамках плоской модели представлены рядом работ [A. Acosta, C. Leno-R. Street, O. Киселев-Л. Котляр, А. Кузнецов, А. Терентьев и др. Наиболее полный обзор этих исследований содержится в монографии [2]

В случае осесимметричных течений наиболее эффективное решение задачи о входе тел в воду было получено фактически на основе известного принципа независимости расширения каверны [3] в работах [4]. Достаточно простые решения для вертикальных каверн были получены после разработки простых уравнений для расчета каверн переменного давления [6-8]. В работе [8] определено условие существования каверн с точкой заострения. Форма и основные размеры вертикальных каверн определены в работах [10; 11] Нелинейный численный расчет каверны с учетом влияния весомости представлен работами Л. Гузевского [12] и др. Экспериментальные исследования в этой области проведены в большом количестве работ, отметим здесь, исследования [13; 14]. Теория возмущений осесимметричных каверн при воздействии поля сил тяжести представлена рядом работ Ю. Журавлев, В. Буйвол, А. Болотин, В. Воронин, Г. Субханкулов, I. Kirshner современное состояние исследований в этой области представлено монографией [2].

В настоящем кавитационные течения в поле сил тяжести могут быть рассчитаны на основе нелинейного численного расчета, но нелинейный численный расчет нестационарных и трехмерных, в частности близких к осесимметричным течений является не простой проблемой. Однако, в любом случае наиболее эффективными практическими методами расчета подавляющей части задач в этой области, являются методы расчета в той, или иной мере связанными с известной Гидродинамикой Тонких Тел и известным «Принципом независимости расширения каверны» Г. Логвиновича [3]. Наиболее важным с точки зрения воздействия поля сил тяжести на кавитационное течение является определение осесимметричных деформаций формы каверны совместно с наибольшей частью трехмерной деформации, обусловленной искривлением оси каверны. При этом каждая из этих частей деформации может быть определена независимо.

Принцип независимости расширения каверны [3], сформулированный ранее на основе экспериментов, в настоящем является одним из следствий асимптотической теории тонких осесимметричных каверн [6-8; 10; 15].

**Осесимметричные каверны-основы теории.** Основой теории тонких осесимметричных каверн является интегро-дифференциальное уравнение стационарной каверны  $r = R(x)$  за кавитатором  $r = r_n(x)$  на основе известной Гидродинамики Тонких Тел [6]. Это уравнение, записанное в цилиндрической системе координат, связанной с кавитатором при обтекании его потоком жидкости со скоростью  $U_\infty$  имеет вид

$$\frac{1}{2R^2} \left( \frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{R^2}{4x(L-x)} - \int_0^{x_s} \frac{\frac{d^2r_n^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2R^2}{dx^2}}{|x_1-x|} dx_1 - \int_{x_s}^L \frac{\frac{d^2R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2R^2}{dx^2}}{|x_1-x|} dx_1 - \frac{dr_n^2}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L} = 2\sigma(x) \quad (1)$$

Здесь  $\sigma = 2(P_\infty - P_c)/\rho U_\infty^2$  – число кавитации при переменной по  $x$  величине разности внешнего давления  $P_\infty$  и давления в каверне  $P_c$ :  $\sigma = \sigma(x)$ ,  $U_\infty$  – скорость внешнего потока,  $\rho$  – массовая плотность жидкости, координата  $x = x_s$  соответствует сечению отрыва струй. Тонкой предполагается поверхность, поперечные размеры которой малы, по сравнению с ее длиной. Точность этого уравнения соответствует нелинейной теории 2-го порядка.

Нестационарный вариант уравнения (1) определяется при его записи в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью.

Асимптотическое решение уравнения (1) при  $\sigma = const$  в приближении теории тонких тел при  $1/\lambda \rightarrow 0$  определяет зависимости 2го порядка для основных параметров стационарной при  $\sigma = const$  осесимметричной каверны: величину числа кавитации  $\sigma = \sigma(\lambda)$  в зависимости от удлинения каверны  $\lambda = L_k/R_k$ , наибольший радиус каверны  $R_k$ , полудлину каверны  $L_k$  [1; 15]

$$R_k^2 = R_n^2 \frac{c_d}{\sigma} \left[ 1 + 2 \frac{\ln 2/\sqrt{e}}{\ln \lambda^2} \right], L_k = R_n \frac{\sqrt{c_d \ln \lambda^2}}{\sigma} \left[ 1 - \frac{\ln e/2}{\ln \lambda^2} \right], \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{2 \ln \lambda / \sqrt{e}}{\lambda^2}.$$

При фиксированном размере кавитатора уменьшение  $\sigma \rightarrow 0$  приводит к неограниченному увеличению удлинения каверны  $\lambda \rightarrow \infty$ , при этом размеры кавитатора по сравнению с каверной, стремятся к нулю. Решению (2) соответствует симметричная каверна за очень малым  $\sim O(1/\lambda^2)$  при  $1/\lambda \rightarrow 0$  кавитатором  $\sim O(1/\lambda^2)$ . Результаты расчета по зависимостям (2) в сравнении с данными нелинейного численного расчета [16] иллюстрируются таблицей

| $\backslash \sigma$                          | 0,03    | 0,04   | 0,05    |
|--|---------|--------|---------|
| $\lambda$ зависимость (2)                    | 11,327  | 9,291  | 7,924   |
| $\lambda$ нелинейный численный расчет [16]   | 11,456  | 9,453  | 8,132   |
| $R_k / R_n$ зависимость (2)                  | 5,537   | 4,834  | 4,357   |
| $R_k / R_n$ нелинейный численный расчет [16] | 5,5544  | 4,8448 | 4,3624  |
| $L_k / R_n$ зависимость (2)                  | 63,497  | 45,583 | 36,109  |
| $L_k / R_n$ нелинейный численный расчет [16] | 63,5181 | 45,8   | 35,4731 |

Зависимости (2) могут быть представлены в виде известных выражений, содержащих достаточно медленно изменяющиеся величины  $\mu, k$

$$R_k^2 = R_n^2 \frac{c_d}{k\sigma}, L_k = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2c_d\mu}{k}}, \lambda^2 = \frac{2\mu}{\sigma} \quad (3)$$

С учетом данных нелинейных численных расчетов для каверны за конусом, включая диск, по симметричной схеме Рябушинского [16], и специфических расчетов каверн за тонкими конусами при замыкании на диск [17], асимптотические зависимости решений (2) для  $\mu, k$  существенно уточняются с увеличением их диапазонов пригодности в виде

$$\begin{aligned} \gamma > 1^\circ \div 2^\circ, \lambda > 3: \mu &= \ln \frac{\lambda + 0,9}{\sqrt{e}}; \\ \gamma > 10^\circ, \sigma_0 < 0,2: k &\approx 1 - \frac{2 \ln 2 / \sqrt{e}}{\ln(0,7\lambda + 4)^2}, k \approx 1 - \frac{2 \ln 2 / \sqrt{e}}{\ln(4/\sigma_0 + 18)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Размеры тонких каверн в рамках первого приближения зависят только от удлинения каверны  $\lambda$  и эта зависимость достаточно слабая. Величина  $k \sim 0,96 \div 1$  [3] является очень слабой зависимостью от  $\sigma$  и  $\lambda$ . При  $\sigma_0 > 0$  величина  $k$  формируется в районе передних участков каверн при  $\sigma = \sigma_0$  в этой области. С учетом опыта расчетов, зависимости (4) пригодны также для расчета основных размеров каверн различной формы существенно отличных от обычной каверны с учетом применения удлинения рассчитываемых каверн.

**Сопrotивление, подъемная сила кавитаторов – практический расчет.** При стационарном обтекании с учетом выражения для сопротивления кавитатора:  $D = c_d S_n \rho U_\infty^2 / 2$ ,  $S_n = \pi R_n^2$ ,  $R_n$  – радиус кавитатора в сечении отрыва струй, величина  $c_d$  для конусов определяется на основе

аппроксимации данных нелинейных численных расчетов [16; 17]. В диапазоне углов  $0^\circ < \gamma < 90^\circ$ ,  $\beta(\gamma) = \gamma^\circ/90^\circ$  аппроксимирующие зависимости для  $c_d$  в форме  $c_d = c_{d0} + \kappa_\sigma \sigma$ , включая диск –  $c_d \approx 0,82(1 + \sigma)$ , получены в следующем виде:

$$c_{d0} = \frac{\pi^2 \beta(\gamma)^2}{2} \ln \left[ \frac{1,74 \left[ 1 - 0,45 \sqrt{\beta(\gamma)} + 2\beta(\gamma) \right]}{\pi \beta(\gamma)} \right] - 0,87 \beta(\gamma)^{1,7} \quad (5)$$

$$\kappa_\sigma = \left[ 0,46 + 0,39 \beta(\gamma) + \frac{0,89 \cdot 0,017}{\beta(\gamma)^{1,36} + 0,028} \right].$$

Зависимости (5) для конусов могут быть также применены для достаточно надежной оценки сопротивления тонких кавитаторов различных форм при совпадении их удлинения и угла наклона в сечения отрыва струй с параметрами конуса. Коэффициенты подъемной силы  $c_{dy}$  диска и тонких кавитаторов определяются зависимостями (6) [3], где  $(\pi/2 - \beta)$  – является углом атаки диска,  $\alpha$  – углом атаки тонкого кавитатора.

Диск

$$c_{dy} = c_d (\cos \beta) (\sin \beta), \beta < 45^\circ, c_{dy} \sim 0,82 c_d \tan \beta \text{ при } \beta \rightarrow 0; \quad (6)$$

Тонкий кавитатор

$$c_{dy} = 2 \tan \alpha, \alpha < 15^\circ - 20^\circ.$$

Зависимость (6) для тонкого кавитатора пригодна при сохранения (в частности в экспериментах) безотрывного обтекания его верхней поверхности.

**Тонкие каверны, близкие к осесимметричным – практический расчет.** При малых возмущениях форма каверны, близкой к осесимметричной, может быть представлена в виде суперпозиции осесимметричного решения и деформации этого решения вследствие искривления оси каверны.

*Расчет осесимметричной составляющей решения.* Наибольшая по величине дифференциальная часть уравнения (1) является его первым приближением. Это позволяет достаточно точно аппроксимировать интегро-дифференциальное уравнение дифференциальным уравнением, содержащим величины  $\mu, k$ , определяемые на основе решений второго приближения [6; 15]. При этом потеря начального условия в сечении отрыва струй компенсируется с помощью закона сохранения энергии радиального расширения сечения каверны в этом сечении. Элементарное уравнение для формы каверны совместно с начальными условиями в сечении отрыва для расчета тонких осесимметричных каверн при стационарном обтекании может быть представлены в виде 2-х альтернативных вариантов (7) [7; 8]

а) диск, тонкий кавитатор    б) диск

$$\begin{aligned} \mu_{\bullet} \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \sigma(x) = 0, & \quad \mu_{\bullet} \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \sigma(x) = 0 \\ R^2|_{x=0} = R_n^2 & \quad \frac{dR^2}{dx}|_{x=0} = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu_{\bullet}}} \\ & \quad R^2|_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mu_{\bullet} = \kappa_{\bullet} \mu = \frac{0,82}{0,82 - k\sigma} \mu, R_n \frac{2c_d - k\sigma_0}{k\mu_{\bullet}} \Big|_{\frac{1}{\lambda_*} \rightarrow 0} = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu_{\bullet}}}, R_n^2 \Big|_{\frac{1}{\lambda_*} \rightarrow 0} = 0.$$

Вариант уравнений (7 а) применяется для случая каверн за тонкими кавитаторами и кавиторами типа диска, однако в случае диска форма каверны вблизи диска описывается достаточно грубо. В упрощенном варианте (7 б) размерами малой, порядка  $\sim O(1/\lambda_*^2)$  по сравнению с размерами области области в районе кавитатора, пренебрегается,  $\lambda_*$  – характерная величина расчетных удлинений каверны. Этот вариант наиболее пригоден для расчета каверн за кавитатором типа диска, когда информация о форме поверхности каверны вблизи кавитора несущественна. Здесь величины  $\mu, k$  в широком диапазоне форм кавитаторов и каверн с достаточной точностью могут определяться зависимостями (4) (независимо от формы кавитатора) при использовании в качестве  $\lambda$  — удлинения каверны, соответствующее конкретному расчетному случаю изменения  $\sigma = \sigma(x)$ . Физически величина  $\mu$  характеризует инерционные свойства расширяющегося поперечного сечения каверны,  $k$  – небольшой перенос энергии течения вдоль сечений каверны, величина  $\kappa_{\bullet} \sim 1$  небольшая поправка, существенная при расчете недостаточно тонких каверн. Решение системы уравнений (7 а) при  $\sigma = const$  имеет вид

$$\begin{aligned} R^2 &= R_n^2 + R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}} x - \frac{\sigma}{2\mu_c} x^2 \\ R_k &= R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, L_n = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_{\bullet}(c_d - k\sigma)}{k}}, L_k = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_{\bullet}c_d}{k}} \\ L_c &= \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_c}{k}} (\sqrt{c_d - k\sigma} + \sqrt{c_d}) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $L_n$  – длина каверны от сечения отрыва до сечения с максимальным радиусом каверны  $R_k$ ,  $L_k$  – длина задней части каверны после миделя,  $L_c = L_n + L_k$  – полная длина каверны от сечения отрыва струй.

В случае достаточно больших удлинений можно использовать предельный при  $1/\lambda \rightarrow 0$  вариант уравнений (7 б). Решение задачи в этом случае

$$R^2 = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu} x - \frac{\sigma}{2\mu} x^2}$$

$$R_k = R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \quad L_c = 2L_k = \frac{2R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_c c_d}{k}}.$$

Нестационарный вариант системы уравнений (7) в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью, имеет вид

$$\mu(x) \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} + \frac{2\Delta P(x,t)}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} \Big|_{t=t_n(x)} = R_n(x) U(x) \sqrt{\frac{2[c_d(x) - k(x)\sigma_0(x)]}{k(x)\mu(x)}} \Big|_{\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0} =$$

$$= R_n(x) U(x) \sqrt{\frac{2c_d(x)}{k(x)\mu(x)}}$$

$$R^2 \Big|_{t=t_n(x)} = R_n^2(x) \Big|_{\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0} = 0. \quad (9)$$

Здесь, аналогично системе (7), также возможно применение 2-х вариантов начальных условий. При движении кавитатора с переменной скоростью  $U_n = U_n(t)$  по закону  $x_n = x_n(t)$  в неподвижной жидкости, время прохождения кавитатором неподвижного сечения жидкости определяется зависимостью  $t_n = t_n(x)$  в виде функции, обратной  $x_n = x_n(t)$ . При этом величины исходных данных в задаче (9), задаваемых обычно в виде функций от  $t$ , преобразуются к виду функций от  $x$ . В частности, при скорости движения кавитатора в виде функции  $U_n = U_n(t)$  эта функция при применении в уравнениях (9) преобразуется к виду  $U_n = U_n(t) \Big|_{t=t_n(x)} = U(x)$ . Аналогично должны быть представлены зависимости для всех исходных данных для этой задачи:  $c_d$ ,  $\sigma_0$ ,  $R_n$ ,  $\mu$ ,  $k$ , задаваемых обычно в виде функций от времени  $t$ .

Решение задачи (9) в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью в общем случае определяется двойным интегрированием

$$R^2 = R_n^2(x) + 2R_n(x)U(x) \sqrt{\frac{2[c_d(x) - k(x)\sigma_0(x)]}{k(x)\mu(x)}} [t_n - t_n(x)] -$$

$$- \frac{2}{\rho\mu(x)} \int_{t_n(x)}^t \int_{t_n(x)}^t \Delta P(x,t) dt dt.$$

При  $\Delta P = \Delta P(x)$ , соответствующем постоянному давлению в каверне и при расширении сечения каверны в неподвижной жидкости, это решение находится в замкнутом виде

$$R^2 = R_n^2(x) + 2R_n(x)U(x)\sqrt{\frac{c_d(x) - k(x)\sigma_0(x)}{2k(x)\mu(x)}}[t_n - t_n(x)] - \frac{\Delta P}{\rho\mu(x)}[t_n - t_n(x)]^2$$

$$1/\lambda_*^2 \rightarrow 0: R^2 = R_n(x)U(x)\sqrt{\frac{2c_d(x)}{k(x)\mu(x)}}[t_n - t_n(x)] - \frac{\Delta P}{\rho\mu(x)}[t_n - t_n(x)]^2.$$

Зависимости (7)-(10) позволяют получать достаточно надежные результаты в большинстве случаев практического применения и проверены многократными экспериментами. В большинстве случаев в диапазоне  $\lambda_* \sim 7 \div 17$  величины  $\mu, k$  могут быть приняты в качестве универсальных констант  $\mu \sim 2$ ,  $k \sim 0,96$ .

**Каверны при вертикальном движении в поле сил тяжести.**

*Нестационарные каверны при входе и выходе тел из воды.* Наиболее простым является определение формы каверны при вертикальном погружении и всплывании кавитатора типа диска. Рисунок 1 иллюстрирует результаты эксперимента по входу в воду и погружению совместно с данными расчета в случае постоянной скорости погружения, полученные в работе [5].

В пренебрежении размерами кавитатора и влиянием газа в каверне решение задачи в этом случае определяется интегралом (10). При постоянной скорости движения  $x_n = Ut$ ,  $t_n(x) = x/U$ ,  $\Delta P = \rho gx$  и с учетом применения обезразмеривания по радиусу кавитатора  $R_n = 1$ , решение принимает вид

$$R^2 = \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}}(x_n - x) - \frac{1}{\mu} \frac{gR_n}{U^2} x(x_n - x)^2, x_0 = 0,5x_n \quad (11)$$

При этом на основе решения системы 2-х уравнений

$$R^2(x) = 0, \frac{dR^2}{dx} = 0, x_0 = 0,5x_n = Fr_{R_n} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}}$$

определяется расстояние  $x_0$  до сечения пережатия каверны от поверхности воды. При значениях констант:  $\mu \sim 2$ ,  $k \sim 0,96$  зависимости (10); (11) совпадают с решениями, полученным в работах [4; 5]. Расчеты нестационарных каверн при погружении и всплывании при переменных скорости, размеров кавитатора и сопротивления определяются аналогично на



основе интегралов (10), (11), как в случае кавитаторов типа диска, так и тонких кавитаторов.



$\overline{\hspace{2cm}}$   
 $1/Fr_L = 0$   
 $\overline{\hspace{2cm}}$   
 $\sigma Fr_L = \frac{4}{3}$   
 $\overline{\hspace{2cm}}$   
 $\sigma Fr_L < \frac{4}{3}$

Рис. 1. Погружение – постоянная скорость, точки – расчет

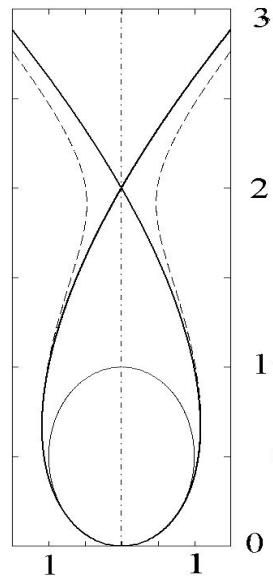


Рис. 2. Погружение – стационарная вертикальная каверна

*Стационарные вертикальные каверны.* Характерным в этом случае является изменение давления в каверне в процессе вертикального движения, при котором зависимость  $\Delta P(x)$  в системе координат, связанной с движущимся кавитатором, остается неизменной. При этом разность давлений в сечении каверны в неподвижной жидкости оказывается переменной. Форма каверн в этом случае в системе координат, связанной с движущимся кавитатором при вертикальном погружении и всплывании, определяется на основе более простого варианта уравнений (7).

Погружение

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = -\frac{\sigma_0}{\mu} + \frac{2}{\mu} \frac{gx}{U_\infty^2}; R^2 = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}} x - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\mu} x^2 + \frac{1}{3\mu} \frac{gx}{U_\infty^2} x^2. \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_0$  – величина числа кавитации в сечении каверны за кавитатором. Аналогично появлению сечения пережатия при входе в воду, здесь при соотношении  $\sigma_0 Fr_L^2 = 4/3$  [9], ( $L$  – длина каверны), как это видно на рисунке 2, также имеется сечение пережатия в задней части каверны.

Всплывание

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = \mp \frac{\sigma_0}{\mu} - \frac{2}{\mu} \frac{gx}{U_\infty^2} : R^2 = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}} x \mp \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\mu} x^2 - \frac{1}{3\mu} \frac{gx}{U_\infty^2} x^2. \quad (13)$$

Здесь случай  $\sigma_0 < 0$  соответствует давлению  $P_c$  в каверне большему, по сравнению с гидростатическим давлением. В этом случае также имеется сечение пережатия в районе кавитатора при соотношении  $\sigma_0 Fr_L^2 = 2/3$ . Физически этот случай соответствует условиям возможности образования каверны без кавитатора. По-видимому, аналогичная возможность может иметь место также в случае всплывания нестационарной каверны при равенстве давлений в каверне и в жидкости в начальном сечении образования каверны.

Зависимости для формы предельных каверн  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{R} = R/R_k$ .

Погружение

$$\sigma_0 Fr_L^2 = \frac{4}{3} : \bar{R} = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{x} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^3}; \frac{L}{2L_k} = 2; \frac{R_m}{R_k} = \sqrt{6} \frac{4}{9} \approx 1,089.$$

Всплывание

(14)

$$\sigma_0 < 0, \sigma_0 Fr_L^2 = \frac{2}{3} : \bar{R} = 4\bar{x}^2(1-\bar{x}), \frac{L}{2L_k} = 2; \frac{R_m}{R_k} = \sqrt{3} \frac{8}{9} \approx 1,54$$

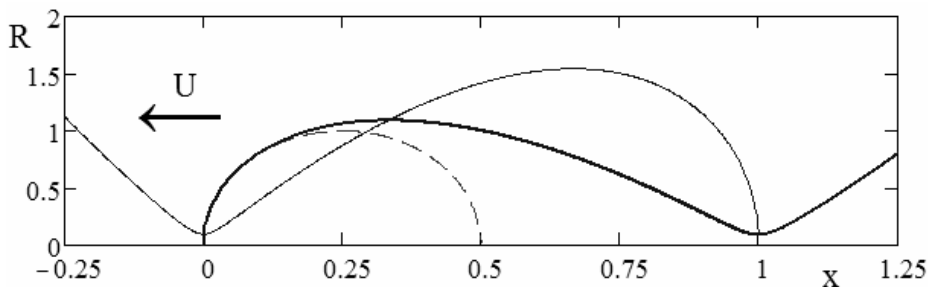


Рис. 3. Вертикальные каверны предельных форм,  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{R} = R/R_k$  :

- — погружение при  $\sigma Fr_L^2 \approx \frac{4}{3}$ ;
- — всплывание при  $1/Fr_L = \frac{2}{3}$ ;
- ..... — каверна при  $\sigma = \text{const}$ ,  $1/Fr_L = 0$ .

Формы предельных каверн при погружении  $\sigma_0 Fr_L^2 = 4/3$  и всплывании  $\sigma_0 Fr_L^2 = 2/3$  иллюстрируются на рисунке 3.

С учетом зависимостей (14) и асимптотической зависимости 2-го порядка для числа кавитации от удлинения (2) [6], уточненной на основе данных нелинейного численного расчета [16] включая зависимость (4) для  $\mu$ , определяются также аналогичные приближенные зависимости  $\sigma_0 = \sigma_0(\lambda)$  от удлинения предельных форм каверн при погружении (15) и всплывании (16).

Погружение

$$\sigma_0 Fr_L^2 = \frac{4}{3} : \sigma_0 = \frac{1}{(1,09\lambda)^2} 2 \ln \frac{1,09\lambda + 0,9}{\sqrt{e}}. \quad (15)$$

Всплывание

$$\sigma_0 < 0, \sigma_0 Fr_L^2 = \frac{2}{3} : \sigma_0 = \frac{1}{(1,54\lambda)^2} 2 \ln \frac{1,54\lambda + 0,9}{\sqrt{e}}. \quad (16)$$

Рисунок 4 иллюстрирует кривые предельных удлинений при погружении и всплывании, определяемых зависимостями (15; 16). Кривые предельных удлинений ограничивают диапазон возможных удлинений замкнутых каверн, удлинения которых не могут превосходить значений на этих кривых.

*Практический расчет вертикальных каверн.* С учетом достаточно громоздких зависимостей для наибольшего радиуса  $R_m$  и удлинения вертикальных каверн наиболее эффективно применение аналитических зависимостей для координаты миделя каверны  $L_n$  и длины каверны  $L$ .

При этом наибольший радиус выражается одной из зависимостей (12); (13) в безразмерном виде относительно радиуса кавитатора в сечении отрыва струй  $R_n$  (радиус диска) при  $\bar{x} = \bar{L}_n$ ;  $\bar{x} = x/R_n$ ,  $\bar{L}_n = L_n/R_n$ . Определяется величина удлинения каверны  $\lambda = 2R_m/L$  и на основе зависимости (4) и составляется уравнение для определения величин  $\mu$

$$\mu = \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{e}} \left( \frac{L(\sigma_0, \omega, \mu)}{2R_m(\sigma_0, \omega, \mu)} + 0,9 \right) \right]. \quad (17)$$

Здесь  $\omega = 1/Fr_{R_n}^2$ , решение для  $\mu$  находится численно. При решении уравнения (17) (системы уравнений) применяются зависимости для  $\bar{L}_n$ ,  $\bar{L}$ .

Всплывание

$$\begin{aligned} \bar{L}_n &= \frac{\sigma_0}{2\omega} \left[ \sqrt{1 + \frac{4\omega}{\sigma_0^2} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}}} - 1 \right], \\ \sigma_0 > 0: \\ \bar{L} &= \frac{3\sigma_0}{4\omega} \left[ \sqrt{1 + \frac{16\omega}{3\sigma_0^2} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sigma_0 > 0: \begin{cases} \bar{L}_n = \frac{\sigma_0}{2\omega} + \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k} - \frac{2\mu\omega c_d}{k\sigma_0^3}} \\ \bar{L} = \frac{9\sigma_0}{4\omega} + \frac{2}{\sigma_0} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k} - \frac{16\mu\omega c_d}{3k\sigma_0^3}} \end{cases} \quad (19)$$

Погружение

$$\sigma_0 > 0: \begin{cases} \bar{L}_n = \frac{\sigma_0}{2\omega} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega}{\sigma_0^2} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}}} \right] \\ \bar{L} = \frac{3\sigma_0}{4\omega} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{16\omega}{3\sigma_0^2} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}}} \right] \end{cases} \quad (20)$$

Рисунок 5 содержит результаты расчета для  $\mu$  при всплывании в зависимости от чисел Фруда по диаметру диска  $d$ .

Рисунок 6 содержит сравнение результатов расчета для наибольших радиусов вертикальных каверн  $\bar{R}_m = R_m/R_k$  при всплывании в сравнении с экспериментальными данными, полученными в вертикальной трубе [15]. Кривая 1 – расчет без учета влияния трубы, кривая 2 – расчет с учетом влияния трубы на основе зависимостей работы [18]

Как следует из данных экспериментальных исследований, в зонах теоретически возможных точек заострения и также в задних частях каверн в реальности образуются небольшие нерасчетные зоны хаотического движения.

#### Горизонтальные каверны при действии поля сил тяжести.

*Искривления осей каверны – элементарные зависимости.* Искривления оси каверны  $h_g$  под действием гравитации и  $h_\alpha$  – подъемной силы кавитатора определяются известными уравнениями [3], полученными на основе законов сохранения при поперечном движении сечений каверны

$$\frac{dh_g}{dx} = \frac{1}{R^2(x)} \frac{g}{U_\infty^2} \int_0^x R^2(x) dx : \frac{R^2(x)}{gR_n \sqrt{c_d}} > 11 \quad (21)$$

$$\frac{dh_\alpha}{dx} = -\frac{c_{dy}}{2} \frac{R_n^2}{R^2(x)} : c_{dy} < 0,3c_d. \quad (22)$$

Здесь  $c_{dy}$  – коэффициент подъемной силы кавитатора, уравнения (21), (22) пригодны для расчета в случае осесимметричных каверн различной формы. При расчете искривления осей в случае осесимметричной каверны –  $\sigma = const$  применение зависимости для ее формы, за тонкими кавитаторами в виде

$$\bar{R}^2 = \frac{1}{\lambda} (\bar{x} + \bar{a}) [2 - (\bar{x} + \bar{a})] \bar{a} = 1 - \sqrt{1 - \frac{k\sigma}{c_d}}, \bar{R} = R/L_k, \bar{x} = x/L_k, \quad (23)$$

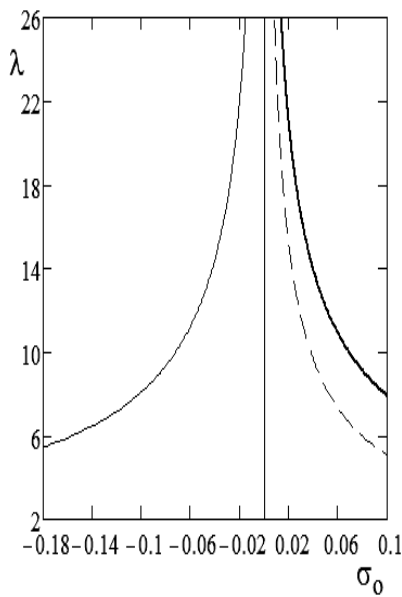


Рис. 4. Всплытие – погружение: предельные удлинения каверн  $\lambda$   
 ————— погружение: уравнение (15)  
 ————— всплытие: уравнение (16)  
 - - - - -  $\sigma = \text{const}$ , уравнения (2, 4)

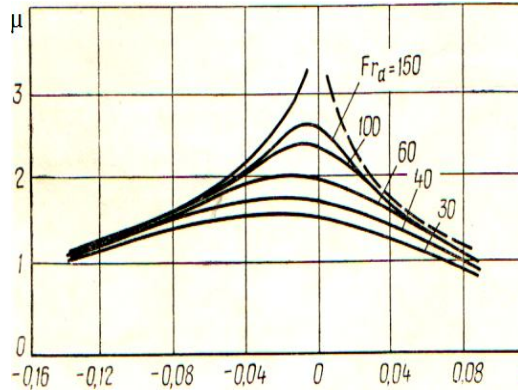


Рис. 5. Зависимости для  $\mu$  – всплытие

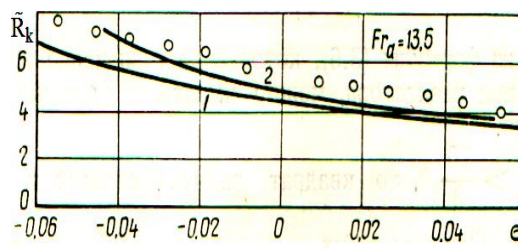


Рис. 6. Всплытие – сравнение величин наибольших радиусов с экспериментом

где  $L_k$  – полудлина невозмущенной каверны, позволяет получить зависимости [19] для искривления каверны, пригодные для каверн за тонкими кавитаторами

$$\bar{h}_g = \frac{1}{6} \frac{gL_k}{U_\infty^2} \left[ \bar{x}^2 - 2(1-\bar{a})\bar{x} - 4 \ln \left( 1 - \frac{\bar{x}}{2-\bar{a}} \right) \right], \bar{h}_g = h_g/L_k \quad (24)$$

$$h_\alpha = \frac{c_{dy}}{4} \ln \left( \frac{\bar{x} + \bar{a}}{\bar{a}} \right) - \ln \left( 1 - \frac{\bar{x}}{2-\bar{a}} \right), \bar{h}_\alpha = h_\alpha/L_k. \quad (25)$$

Уточненные зависимости воздействия гравитации при всплытии. Всплытие может сопровождаться существенным увеличением размеров каверны и, особенно ее длины, вследствие уменьшения гидростатического давления при подъеме сечений каверны. На основе упрощенной зависимости для искривления оси каверны при всплытии кавитато-

ров типа диска [5] изменение разности давлений ( $P_\infty - P_c$ ) на искривленной оси каверны определяется выражением ( $L_0 = 2L_k$ )

$$\bar{h}_g \cong \frac{1}{3} \frac{gL_0}{U_\infty^2} \bar{x}^2 : \frac{P_\infty - P_c}{\rho U_\infty^2 / 2} = \sigma_0 - \frac{2}{3} \left( \frac{gL_0}{U_\infty^2} \right)^2 \bar{x}^2, \bar{x} = x/L_0. \quad (26)$$

Форма осесимметричной части возмущенной каверны на основе задачи (7б), условие пережатия в задней части каверны (точки заострения) и форма предельной каверны определяются зависимостями (27; 28)

$$\bar{R}^2 = \frac{\sigma_0}{2\mu} \left[ \bar{x} - \bar{x}^2 + \frac{1}{9} \left( \frac{gL_0}{U_\infty^2} \right) \bar{x}^4 \right], L_0 = 2L_k, \frac{gL_0}{U_\infty^2} = Fr_{L_0}^2, \quad (27)$$

$$\sigma_0 Fr_{L_0}^2 = \frac{3}{4} : \bar{R}^2 = 4\bar{x} \left[ (1 - \bar{x}) + \frac{4}{27} \bar{x}^3 \right], \bar{R} = \frac{R}{R_k}, \frac{L_g}{L_0} = 1,5, \frac{R_g}{R_k} \sim 1. \quad (28)$$

Здесь  $L_g$  – длина предельной каверны.

С учетом более точной зависимости для формы каверны искривление оси при всплывании может быть уточнено при применении этой формы при интегрировании уравнения (21).

Расчет формы и размеров каверны в общем случае зависит от величин  $\mu$ , которые в случае горизонтальной каверны изменяются существенно меньше, чем в случае вертикальных каверн и величина  $\mu$  здесь может быть рассчитана аналогичным методом.

Результаты расчета предельной формы горизонтальной каверны с формальной точкой заострения при с учетом всплывания ее сечений иллюстрируются рисунком 7.

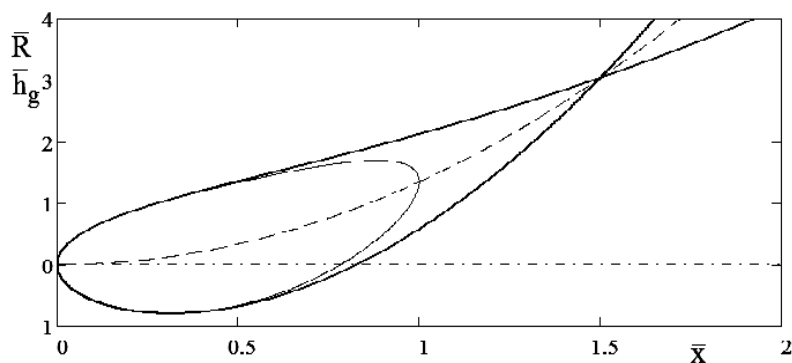


Рис. 7. Предельная горизонтальная каверна с точкой заострения:

- — предельная каверна – расчет при  $\sigma_0 Fr_{L_0}^2 = \frac{3}{4}$ ;
- — расчет формы при  $\sigma = const$  без учета влияния всплывания;
- .-.-.- — искривление оси каверны при всплывании, зависимость (26)

Физически область в районе расчетной точки заострения в реальности является областью образования 2-х вихревых шнуров и рассчитанная форма каверны достаточно точно подтверждается данными экспериментов.

*Пределы небольшого воздействия гравитации.* Деформации формы каверны в первую очередь связаны с всплыванием ее сечений и, соответственно, искривления ее оси. Зависимость для искривления оси каверны (26)  $\bar{h}_g = h_g/L_0$  может быть представлена в виде зависимости при ее обезразмеривании по наибольшему радиусу невозмущенной каверны в виде

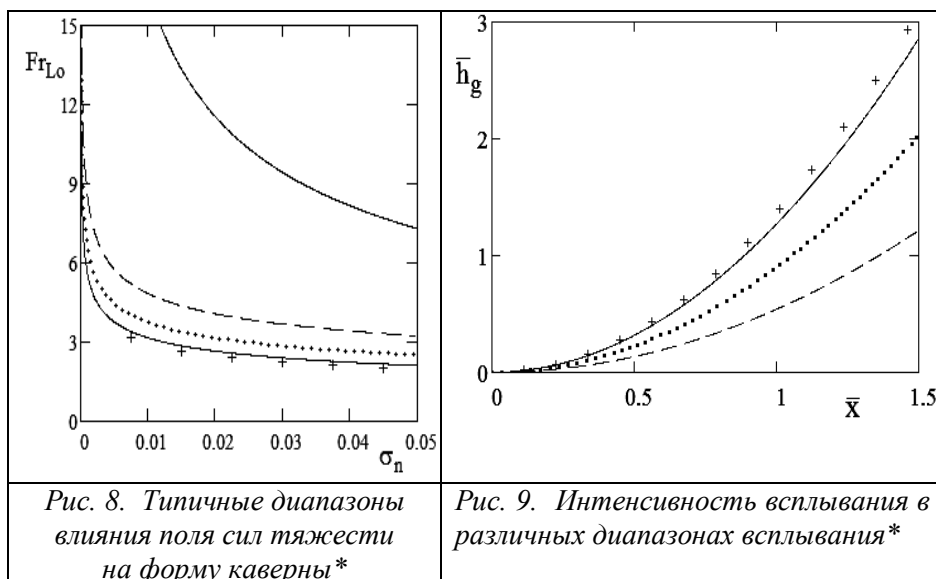
$$\bar{h} = (h/R_k) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2c_d}{k}} \frac{\bar{x}^{-2}}{\sigma \sqrt{\sigma Fr_d^2}} = \frac{2\sqrt{2\mu}}{3} \frac{\bar{x}^{-2}}{\sqrt{\sigma Fr_{L_0}^2}}. \quad (29)$$

В зависимостях (29) величины искривления оси каверны сравниваются с величиной максимального радиуса невозмущенной каверны  $R_k$ . Это позволяет рассматривать параметры  $v_s = \sqrt{\sigma Fr_{L_0}^2}$ ,  $v_b = \sigma \sqrt{\sigma Fr_d^2}$ , в качестве характеристик степени возмущения осесимметричности формы каверны под действием гравитации. По данным систематических расчетов возмущений формы каверны за диском под воздействием гравитации [19] в обычной расчетной области  $0 < \bar{x} < 0,75L_0$ , диапазон величин  $v_b \sim 2 \div 4$  соответствует существенным отличиям формы сечения каверны от круговой формы, диапазон  $v_b \sim 4 \div 10$  характеризуется малыми отличиями сечения каверны от круговой, при  $v_b > 10$  влияние гравитации пренебрежимо мало. Аналогично эти 3 диапазона типичных величин возмущений под действием гравитации могут характеризоваться также параметрами:  $v_s \sim 1 \div 2$ ,  $v_s \sim 2 \div 5,5$ ,  $v_s > 5,5$ . Исходя из этого, условие существования формальной точки заострения дает значение  $v_s = \sqrt{3/4} \sim 0,87$ , соответствующие области значительных деформаций круговой формы сечений каверны в обычной расчетной области.

Рисунок 8 иллюстрирует результаты расчета зависимостей чисел Фруда от числа кавитации, ограничивающих типичные области существенности воздействия гравитации на форму стационарных каверн.

Рисунок 9 иллюстрирует результаты расчета всплывания каверн, при соответствии типичным областям существенности влияния гравитации.

Одной из основных задач в этой области является не только проблема достаточно эффективного расчета воздействия гравитации на суперкавитационные течения при недостаточно высоких скоростях, но также и исследование возможностей этого влияния.



*\*Примечания:*

- вертикальная каверна с точкой заострения  $\sigma_n Fr_{L0}^2 = 8/3$ ;
- горизонтальная каверна с формальной точкой заострения  $\sigma_n Fr_{L0}^2 = 3/4$ ;
- граница значительных деформаций сечений каверны  $\sqrt{\sigma} Fr_{L0}^2 = 1$ ;
- граница существенных деформаций сечений каверны  $\sqrt{\sigma} Fr_{L0}^2 = 2$ ;
- граница незначительности влияния поля сил тяжести на форму поперечных сечений каверны  $\sqrt{\sigma} Fr_{L0}^2 = 5,5$ .

Эффективность одной из таких возможностей компенсации воздействия гравитации на форму каверны, с помощью тонких кавитаторов под углом атаки, экспериментально доказана в работе [20].

**Выводы.** Проведен анализ целостной картины воздействия поля сил тяжести на течения с развитой кавитацией, близкие к осесимметричным, усовершенствованы известные и разработаны новые эффективные методы расчета этих течений, совместно с их верификацией данными ряда экспериментальных работ. Наиболее эффективным направлением дальнейшего развития исследований в этой области является исследование возможностей компенсации воздействия поля сил тяжести на течения с развитой кавитацией.



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Knapp R.T. *Cavitation* / R.T. Knapp, J.W. Daili and F.G. Hammit. – New York: Mc. Graw Hill Book, 1970. – 680 p.
2. Terentiey A.G. *The Hydrodynamics of Cavitating Flows* / A.G. Terentiey, I. Kirschner, J. Uhlman: Backbone Publishing, USA. – 2011. – 598 p.
3. Логвинович Г.В. *Гидродинамика течений со свободными границами*. – К.: Изд-во «Наук. думка», 1969. – 215 с.
4. Abelson H.I. *A prediction of water entry cavity shape* / H.I. Abelson // *Pa. Amer. Soc. Eng.* – 1970. – N WA/FE-8. – P.1-3. – 3 p.
5. Журавлев Ю.Ф. *Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях* // ЦАГИ. – 1973. – Вып. 1532. – 23 с.
6. Серебряков В.В. *Асимптотические решения задачи о тонкой осесимметричной каверне* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1973. – № 2. – С. 1119-122.
7. Серебряков В.В. *Кольцевая модель для расчета осесимметричных течений с развитой кавитацией* // *Гидромеханика*. – К.: Изд-во «Наукова думка», 1974. – Вып. 27. – С. 25-29.
8. Serebryakov V.V. *Physical-mathematical bases of the principle of independence of a cavity expansion* // *Proc. of the 7<sup>th</sup> International Symposium on Cavitation*. – Ann Arbor, Michigan, USA. – 2009. – Paper № 51. – 14 p.
9. Ефремов И.И. *О форме тонких каверн при малых числах кавитации в плоском и осесимметричном потоках* / И.И. Ефремов, В.В. Серебряков // *Гидромеханика*. – К.: Изд-во «Наукова думка», 1978. – Вып. 38. – С. 82-85.
10. Серебряков В.В. *Расчет формы тонких осесимметричных каверн в нестационарном потоке для ряда характерных случаев обтекания* // *Гидромеханика*. – К.: Изд-во Наукова думка, 1981. – Вып. 44. – С. 86-94.
11. Башарова В.Н., Буйвол В.Н., Серебряков В.В. *Тонкие осесимметричные каверны при обтекании тел в поле силы тяжести* // *Прикладная механика*. – 1983. – Т. 19. – № 4. – С. 86-94.
12. Гузевский Л.Г. *Плоские и осесимметричные кавитационные течения Рябушинского в поле сил тяжести* // *Гидродинамические течения и волновые процессы*. – Новосибирск: Изд-во Института Теплофизики СО АН СССР, 1983. – С.72-81.
13. Гульнев С.И., Капанкин Е.Н. *Об особенностях кавитационного обтекания тел вертикальным потоком жидкости* // *Ученые записки ЦАГИ*. – 1975. – Т. 6. – № 2. – С.56-62.

14. Болотин А.Ф., Дианов Д.И. Экспериментальное исследование искусственных каверн за диском при различных углах наклона набегающего потока к горизонтали // Экспериментальная гидромеханика судна. – Л.: Судостроение, 1975. – Вып. 226. – С. 53-70.
15. Serebryakov V.V. Some Models of prediction of supercavitation Flows Based on Slender Body Approximation // Proceedings of Forth International Symposium on Cavitation. – California Institute of Technology, Pasadena. – 2001. – 17 p.
16. Гузевский Л.Г. Численный анализ кавитационных течений // Препринт № 40-79. – Новосибирск: Изд-во Института Теплофизики СО АН СССР, 1979. – 36 с.
17. Краснов В.К. Кузнецов Ю.В. Применение метода граничных интегральных уравнений к расчету плоских и осесимметричных кавитационных течений // Актуальные задачи гидродинамики. – Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1989. – С. 71-75.
18. Эпштейн Л.А. Об учете влияния стенок канала на величину миделя каверны // Известия АН СССР, МЖГ. – 1968. – № 2. – С. 127-128.
19. Буйвол В.Н. Об основной характеристике действия весоности на тонкие пространственные каверны // Гидромеханика. – К.: Изд-во «Наукова Думка», 1975. – Вып. 32. – С. 54-57.
20. Kochin V.A., Moroz V.V., Nechitailo N. and Serebryakov V.V. Hydrodynamics of supercavitating bodies at an angle of attacks under conditions of considerable effect of liquid weightiness and closeness of free border // Proceedings MAST EurAsia. – Istanbul. – 2014. – P. 20.

Стаття надійшла до редакції 10.12.2015