

УДК 539.3

СТІЙКІСТЬ КРАНОВИХ СТРІЛ-АРОК

В.Ф. Оробей, О.О. Немчук, О.М. Лимаренко, О.А. Романов

Анотація. Представлено спрощену систему диференціальних рівнянь стійкості кранових стріл, виконаних у вигляді кругових арок. Систему двох диференціальних рівнянь зведено до одного дозволяючого рівняння відносно кута закручування арки. Виконано інтегрування дозволяючого рівняння і складено матричне рівняння стійкості арки у формі, зручній для застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів. Побудовано два варіанти систем фундаментальних ортонормованих функцій для диференціальних рівнянь стійкості з постійними коефіцієнтами. Для розв'язання задач стійкості аркових конструкцій рекомендовано застосовувати алгоритм методу граничних елементів (МГЕ).

Ключові слова: стійкість, система диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, фундаментальні функції, МГЕ.

СТОЙКОСТЬ КРАНОВЫХ СТРЕЛ-АРОК

В.Ф. Оробей, А.О. Немчук, А.М. Лимаренко, А.А. Романов

Аннотация. Представлена упрощенная система дифференциальных уравнений устойчивости крановых стрел, выполненных в виде круговых арок. Система двух дифференциальных уравнений сведена к одному разрешающему уравнению относительно угла закручивания арки. Выполнено интегрирование разрешающего уравнения и составлено матричное уравнение устойчивости арки в форме, удобной для применения численно-аналитического метода граничных элементов.

Построено два варианта систем фундаментальных ортонормированных функций для дифференциальных уравнений устойчивости с постоянными коэффициентами. Для решения задач устойчивости арочных конструкций рекомендовано применять алгоритм метода граничных элементов (МГЭ).

Ключевые слова: устойчивость, система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, фундаментальные функции, МГЭ.

STABILITY OF CRANE AREL-AROK

V.F. Orobey, O.O. Nemchuk, O.M. Limarenko, O.A. Romanov

Abstract. A simplified system of differential equations for the stability of crane arrows executed in the form of circular arches is presented.

© Оробей В.Ф., Немчук О.О., Лимаренко О.М., Романов О.А., 2018

The system of two differential equations is reduced to one resolving equation with respect to the twisting angle of the arch. Integration of the resolving equation is completed and a matrix equation of stability of the arch is compiled in a form convenient for the application of the numerical-analytic method of boundary elements. Two versions of systems of fundamental orthonormal functions for differential equations of stability with constant coefficients are constructed. To solve the problems of stability of arch structures, it is recommended to apply the algorithm of the method of boundary elements (MGE).

Keywords: *stability, system of differential equations with variable coefficients, fundamental functions, MGE.*

Вступ. Стріли спеціальних вантажопідйомних машин мають форму кругових арок. Застосування кругових арок обумовлено перевагами в порівнянні з прямолінійними стержнями по міцності і жорсткості. У зв'язку з цим арочні елементи кранових конструкцій вельми часто мають значне співвідношення осьових моментів інерції поперечних перерізів. При цьому конструкція задовольняє вимогам міцності і жорсткості, але одночасно виникає небезпека втрати стійкості плоскої форми вигину. Після втрати стійкості стержень зазнає два вигини і крутіння. Великі переміщення перетинів часто призводять до різних аварій.

Запобігти втраті стійкості можна розрахунковим шляхом. Однак для цього необхідні відповідні, досить точні і надійні математичні моделі процесів втрати стійкості. В даний час теоретичні розробки стійкості плоскої форми вигину кругових арок знаходяться в зародковому стані і не дозволяють вирішувати в потрібному обсязі важливі практичні завдання. У зв'язку з цим проблема створення розрахункових моделей задач стійкості кругових арок є актуальною і необхідною для практики [1]-[7].

Аналіз літературних даних. Проблема стійкості плоскої форми вигину прямолінійних балок з перетинами у вигляді вузької смуги була поставлена ще в XIX столітті. Значно пізніше була узагальнена теорія просторової стійкості плоских і просторових стрижнів і стрижневих систем [1].

Досить довго скористатися побудованою теорією не вдавалося, оскільки відповідні диференціальні рівняння мали змінні коефіцієнти та інтегрування наражалося на серйозні математичні труднощі [2]. Відомі вирішення різних завдань розрахунку кривих стрижнів у вигляді кругових арок з урахуванням тільки деформації вигину [3].

Дана проблема знайшла своє ефективне рішення лише з появою чисельно-аналітичного варіанта метода граничних елементів (МГЕ). Даний метод дозволяє математично строго і точно вирішувати крайові задачі для лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [4]-[5].

Якщо для прямолінійних стрижнів накопичені різні рішення диференціальних рівнянь стійкості, то для кругових арок відсутні фундаментальні функції-рішення задач Коші стійкості плоскої форми вигину. Рішення задач стійкості плоскої форми вигину кругових арок може бути виконано за допомогою професійних пакетів метода скінченних елементів (МСЕ) Ansys, Solid Works, Abaqus і ін. В даний момент часу МСЕ є найбільш поширеним чисельним методом та має порівняно просту логіку алгоритму і велике число арифметичних операцій [6]. Однак відсутність точної матриці жорсткості завдань стійкості плоскої форми вигину конструктивних елементів у вигляді кругових арок не дозволяє отримувати точні і достовірні результати при як завгодно великій дискретизації конструкції. В кращу сторону відрізняється застосування алгоритму МГЕ [7]. Тут використовується точна система диференціальних рівнянь завдання, математично сувора процедура побудови її рішення і вельми простий за логікою процес формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь крайової задачі стійкості [8]. Крім того, як показано в роботі [9], МГЕ дозволяє отримувати точні значення параметрів завдання (зусиль, переміщень, напружень, частот власних коливань [10]-[11], критичних сил втрати стійкості) як на границі, так і всередині області. При цьому МГЕ має найбільш просту логіку алгоритму серед інших числових методів, хорошу збіжність рішення, високу стійкість арифметичних операцій і незначне накопичення похибок округлення при численних операціях [12]. Застосування МГЕ і побудова системи фундаментальних ортонормованих функцій завдань стійкості плоскої форми вигину кругових арок є актуальною проблемою інженерних наук.

У цьому зв'язку, аналіз літератури логічно призводить до такого формулювання мети і завдань досліджень.

Постановка завдання. Метою даної роботи є побудова системи фундаментальних ортонормованих функцій для задач стійкості плоскої форми вигину кругових арок з перерізами з двома і більше осями симетрії.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

1. Сформулювати рівняння МГЕ в матричній формі для розв'язання крайових задач стійкості;
2. Спростити загальні диференціальні рівняння стійкості кругових арок з урахуванням симетрії їх перерізів;
3. Отримати дозволяюче звичайне диференціальне рівняння розглянутих завдань;
4. Побудувати системи фундаментальних ортонормованих функцій диференціального рівняння для двох найважливіших випадків коренів характеристичного рівняння;
5. Надати практичні рекомендації щодо застосування отриманих розрахункових співвідношень крайових задач стійкості арок.

Рішення даних завдань відсутнє в літературі.

Викладення основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих результатів. Система рівнянь стійкості плоскої форми вигину кругового стержня, після врахування симетрії перерізу, приводиться до виду, представленому на рис. 1.

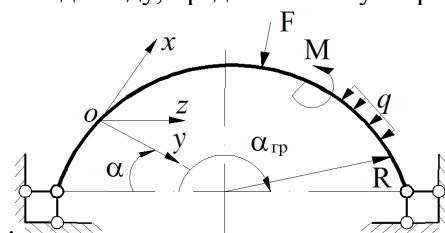


Рис. 1. Розрахункова схема завдання стійкості кругового стержня

$$\begin{cases} EI_y w''''(\alpha) + \frac{EI_\omega}{R} \theta''''(\alpha) + \left[M_z(\alpha) - \frac{GI_d}{R} \right] \theta''(\alpha) = 0; \\ EI_\omega \theta''''(\alpha) - GI_d \theta''(\alpha) + \left[M_z(\alpha) - \frac{EI_y}{R} \right] w''(\alpha) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де EI_y – жорсткість перерізу при згині в горизонтальній площині xOz ;
 $w(\alpha)$ – згинальне переміщення осі стержня при затисненому крученні Oz ;

EI_ω – секторіальна жорсткість перерізу при затисненому крученні;

R – радіус осі кругового стержня;

$\theta(\alpha)$ – кут закручування перерізу навколо осі Ox ;

$M_z(\alpha)$ – згинальний момент в перерізі, що викликаний заданим поперечним навантаженням;

GI_d – жорсткість перерізу при крученні;

α – кутова координата поточного перерізу.

Видно, що система (1) має змінні коефіцієнти у вигляді згинального моменту $M_z(\alpha)$. З огляду на те, що це в загальному випадку деякий набір простих функцій, то стають очевидними складності, з якими доведеться зіткнутися при інтегруванні цієї системи.

Завдання можна істотно спростити, якщо скористатися чисельно-аналітичним варіантом МГЕ [2]-[5]. У цьому методі потрібно мати рішення задачі Коші для рівнянь (1), але з постійними коефіцієнтами. Викладемо процедуру інтегрування спрощеної системи рівнянь.

Початкові параметри стиснутого кручення і вигину в горизонтальній площині мають вигляд:

$GI_d \theta(0)$ – кут закручування, кНм^2 ;

$GI_d \theta'(0)$ – похідна кута закручування, кНм ;

$B_\omega(0) = -\frac{GI_d}{k^2} \theta''(0)$ – бімомент, кНм^2 ;

$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}}$ – згинально-крутильна характеристика перерізу, $\frac{1}{\text{м}}$;

$M_{\omega}(0) = -\frac{GI_d}{k^2} \theta'''(0)$ – згинально-крутильний момент, кНм;

$EI_y w(0)$ – переміщення перерізу в напрямку осі Oz , кНм³;

$EI_y w'(0) = EI_y \phi(0)$ – кут повороту перерізу, кНм²;

$EI_y w''(0) = -M_y(0)$ – згинальний момент в горизонтальній площині, кНм;

$EI_y w'''(0) = -Q_z(0)$ – поперечна сила в горизонтальній площині, кН.

Дані початкові параметри і систему рівняння (1) утворюють завдання Коші стійкості площини форми вигину кругового стержня. Для формування фундаментальних розв'язків задачі Коші виконаємо ряд перетворень.

З другого рівняння системи (1) випливає, що ($M_Z = const$)

$$w''(\alpha) = \frac{1}{\left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right)} \left[-EI_{\omega} \theta''(\alpha) + GI_d \theta''(\alpha) \right]. \quad (2)$$

Два рази, інтегруючи цей вираз, отримаємо зв'язок між згинальним переміщенням $w(\alpha)$ і кутом закручування $\theta(\alpha)$

$$w(\alpha) = \frac{1}{\left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right)} \left[-EI_{\omega} \theta'(\alpha) + GI_d \theta(\alpha) \right] + (A \cdot \alpha + B) \frac{1}{\left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right)}, \quad (3)$$

де константи інтегрування будуть дорівнювати

$$B = \left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right) w_{(0)} + EI_{\omega} \theta'(0) - GI_d \theta(0); \quad (4)$$

$$A = \left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right) w'_{(0)} + EI_{\omega} \theta''(0) - GI_d \theta'(0).$$

Якщо $w''(\alpha)$ із (2) підставити в перше рівняння системи (1), то отримаємо дозволяюче диференціальне рівняння стійкості плоскої форми згинання кругового стержня

$$-z_1 \theta^{VI}_{(\alpha)} + z_2 \theta^{IV}_{(\alpha)} + z_3 \theta''_{(\alpha)} = 0, \quad (5)$$

де

$$z_1 = \frac{EI_y \cdot EI_{\omega}}{\left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right)}; \quad z_2 = \frac{EI_y \cdot GI_d}{\left(M_Z - \frac{EI_y}{R}\right)} + \frac{EI_{\omega}}{R}; \quad z_3 = M_Z - \frac{GI_d}{R}. \quad (6)$$

Рівняння (5) класифікується як лінійне однорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами шостого порядку. Його рішення можна отримати за стандартною схемою. Характеристичне рівняння для (5) має вигляд

$$(-z_1) t^6 + z_2 t^4 + z_3 t^2 = 0. \quad (7)$$

Корні його мають різний вигляд. Розглянемо два найбільш важливих поєднання коренів.

Перший випадок

$t_{1,2} = 0$ – дійсні кратні;

$$t_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4z_1z_3}}{-2z_1}} \text{ – два дійсних кореня;} \quad (8)$$

$$t_{5,6} = \pm i \sqrt{\frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4z_1z_3}}{2z_1}} \text{ – два уявних кореня.}$$

Загальне рішення рівняння (5) запишеться у вигляді

$$\theta(\alpha) = C_1 + C_2 \cdot \alpha + C_3 \operatorname{ch} a \alpha + C_4 \operatorname{sh} a \alpha + C_5 \cdot \cos b \alpha + C_6 \sin b \alpha, \quad (9)$$

де

$$a = \sqrt{\frac{-z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4z_1z_3}}{-2z_1}}; \quad b = \sqrt{\frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4z_1z_3}}{2z_1}}. \quad (10)$$

Диференціюючи п'ять разів вираз (9), з огляду на співвідношення між початковими параметрами і вираз (3), можна скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь для констант інтегрування C_1 – C_2

	1	2	3	4	5	6			
1	1		1		1		C_1	=	$\theta_{(0)}$
2		1		a		b	C_2		$\theta'_{(0)}$
3			a^2		$-b^2$		C_3		$-\frac{B_{\omega(0)k^2}}{GI_d}$
4				a^3		$-b^3$	C_4		$-\frac{M_{\omega(0)k^2}}{GI_d}$
			A_{53}		A_{55}		C_5		$-\frac{M_{y(0)}}{EI_y}$
6				A_{64}		A_{66}	C_6		$-\frac{Q_{z(0)}}{EI_y}$

де елементи матриці коефіцієнтів рівняння (11) мають вигляд

$$A_{53} = \frac{a^2(-EI_{\omega}a^2 + GI_d)}{M_z - \frac{EI_y}{R}}; \quad A_{55} = \frac{-b^2(EI_{\omega}b^2 + GI_d)}{M_z - \frac{EI_y}{R}};$$

$$A_{64} = \frac{a^3(-EI_{\omega}a^2 + GI_d)}{M_z - \frac{EI_y}{R}}; \quad A_{66} = \frac{-b^3(EI_{\omega}b^2 + GI_d)}{M_z - \frac{EI_y}{R}}. \quad (12)$$

Константи інтегрування після рішення системи рівнянь (11) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} C_1 &= \theta_{(0)} - \frac{a^2 + b^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{M_{y(0)}}{EI_y} \right] + \frac{x_1 + x_2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{B_{\omega(0)k^2}}{GI_d} \right]; \\ C_2 &= \theta'_{(0)} - \frac{a^2 + b^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{Q_{z(0)}}{EI_y} \right] + \frac{x_1 + x_2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{M_{\omega(0)k^2}}{GI_d} \right]; \\ C_3 &= \frac{b^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{M_{y(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{B_{\omega(0)k^2}}{GI_d} \right]; \\ C_4 &= \frac{b^2}{a(x_1 b^2 - x_2 a^2)} \left[-\frac{Q_{z(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_2}{a(x_1 b^2 - x_2 a^2)} \left[-\frac{M_{\omega(0)k^2}}{GI_d} \right]; \\ C_5 &= \frac{a^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{M_{y(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_1}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \left[-\frac{B_{\omega(0)k^2}}{GI_d} \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

де обзначено

$$x_1 = \frac{a^2(-EI_{\omega}a^2 + GI_d)}{M_z - \frac{EI_y}{R}}; \quad x_2 = \frac{b^2(EI_{\omega}b^2 + GI_d)}{M_z - \frac{EI_y}{R}}. \quad (14)$$

Константи $C1-C6$ підставляються у вираз для кута закручування $\theta(a)$ (9), і далі можна сформувати чотири параметри вигину (за допомогою виразу (3)) і чотири параметри стиснутого кручення щодо відповідних початкових параметрів.

Ці вирази після нормування фундаментальних функцій зручно представити в матричній формі наступним чином:

		1	2	3	4	5	6	7	8		
$EI_y w_{(\alpha)}$	1	1	α	$-A_{13}$	$-A_{14}$			$-A_{17}$	$-A_{18}$	$EI_y w_{(0)}$	
$EI_y \phi_{(\alpha)}$	2		1	$-A_{23}$	$-A_{24}$			$-A_{27}$	$-A_{28}$	$EI_y \phi_{(0)}$	
$M_{y(\alpha)}$	3			A_{33}	A_{34}			A_{37}	A_{38}	$M_{y(0)}$	
$Q_{z(\alpha)}$	4			A_{43}	A_{44}			A_{47}	A_{48}	$Q_{z(0)}$	
$GI_d \theta_{(\alpha)}$	5			$-A_{53}$	$-A_{54}$	1	α	$-A_{57}$	$-A_{58}$	$GI_d \theta_{(0)}$	(15)
$GI_d \theta'_{(\alpha)}$	6			$-A_{63}$	$-A_{64}$		1	$-A_{67}$	$-A_{68}$	$GI_d \theta'_{(0)}$	
$B_{\omega(\alpha)}$	7			A_{73}	A_{74}			A_{77}	A_{78}	$B_{\omega(0)}$	
$M_{\omega(\alpha)}$	8			A_{83}	A_{84}			A_{87}	A_{88}	$M_{\omega(0)}$	

З цього виразу випливає, що при вирішенні завдань стійкості кругових арок МГЕ необхідно вирішити всього лише вісім рівнянь, з похибкою менше 1 % [11]. За МСЕ, як показує досвід [12], потрібно скласти тисячу рівнянь, з похибкою 5 % і більше.

Фундаментальні ортонормовані функції рівняння (15) приймають вид

$$A_{13} = \frac{-(a^2 + b^2)c + b^2 \frac{x_1}{a^2} c h a \alpha + a^2 \frac{x_2}{a^2} \cos b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2};$$

$$C = \frac{GI_d}{M_z - \frac{EI_y}{R}}; A_{14} = \frac{-ab(a^2 + b^2)c \alpha + b^3 \frac{x_1}{a^2} s h a \alpha + a^3 \frac{x_2}{a^2} \sin b \alpha}{ab(x_1 b^2 - x_2 a^2)};$$

$$A_{17} = \frac{k^2(x_1 + x_2)c - k^2 x_2 \frac{x_1}{a^2} c h a \alpha + k^2 x_1 \frac{x_2}{b^2} \cos b \alpha + (x_1 b^2 - x_2 a^2)c}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d};$$

$$A_{18} = \frac{k^2 ab(x_1 + x_2)c \alpha - k^2 x_2 b \frac{x_1}{a^2} s h a \alpha - k^2 a x_1 \frac{x_2}{b^2} \sin b \alpha + ab(x_1 b^2 - x_2 a^2)c \alpha}{ab(x_1 b^2 - x_2 a^2)} \cdot \frac{EI_y}{GI_d};$$

$$A_{23} = \frac{x_1 b^3 \frac{x_1}{a^2} s h a \alpha - x_2 a^3 \sin b \alpha}{ab(x_1 b^2 - x_2 a^2)}; A_{24} = A_{13};$$

$$\begin{aligned}
 A_{34} = A_{23}; \quad A_{27} &= \frac{-k^2 x_1 x_2 b \operatorname{sha} \alpha + k^2 x_1 x_2 a \sin b \alpha}{ab(x_1 b^2 - x_2 a^2)} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; \quad A_{44} = A_{33}; \\
 A_{33} &= \frac{x_1 b^2 \operatorname{cha} \alpha - x_2 a^2 \cos b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2}; \\
 A_{37} &= \frac{[x_1 x_2 b^2 (\operatorname{cha} \alpha - \cos b \alpha)] k^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; \quad A_{43} = \frac{x_1 a b^2 \operatorname{sha} \alpha + x_2 a^2 \sin b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2}; \\
 A_{47} &= \frac{-x_1 x_2 b^2 (\operatorname{sha} \alpha + b \sin b \alpha) k^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; \quad A_{28} = A_{17}; \quad A_{38} = A_{27}; \quad A_{48} = A_{37}; \\
 A_{53} &= \frac{-b^2 (1 - \operatorname{cha} \alpha) - a^2 (1 - \cos b \alpha)}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \\
 A_{54} &= \frac{-b^3 (\alpha - \operatorname{sha} \alpha) - a^3 (b \alpha - \sin b \alpha)}{a \alpha (x_1 b^2 - x_2 a^2)} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \\
 A_{57} &= \frac{[x_2 (1 - \operatorname{cha} \alpha) + x_1 (1 - \cos b \alpha)] k^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2}; \\
 A_{58} &= \frac{[b x_2 (\alpha - \operatorname{sha} \alpha) + a x_1 (1 - \cos b \alpha)] k^2}{ab(x_1 b^2 - x_2 a^2)}; \\
 A_{63} &= \frac{ab^2 \operatorname{sha} \alpha - a^2 b \sin b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \quad A_{64} = A_{53}; \quad A_{67} = \frac{(-x_2 a \operatorname{sha} \alpha + x_1 b \sin b \alpha) k^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2}; \\
 A_{68} = A_{57}; \quad A_{73} &= \frac{a^2 b^2 (\operatorname{cha} \alpha - \cos b \alpha) k^2}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{GI_d}{k^2 EI_y}; \quad A_{74} = \frac{A_{63}}{k^2}; \\
 A_{77} &= \frac{-x_2 a^2 \operatorname{cha} \alpha + x_1 b^2 \cos b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2}; \quad A_{78} = \frac{A_{67}}{k^2}; \quad A_{83} = \frac{a^3 b^2 \operatorname{sha} \alpha + a^2 b^3 \sin b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2} \cdot \frac{GI_d}{k^2 EI_y}; \\
 A_{84} = A_{73}; \quad A_{87} &= \frac{-x_2 a^3 \operatorname{sha} \alpha - x_1 b^3 \sin b \alpha}{x_1 b^2 - x_2 a^2}; \quad A_{88} = A_{77}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Вираз (15) являє собою дозволяюче рівняння МГЕ для розв'язання крайових задач стійкості плоскої форми вигину конструкцій у вигляді окремих арок, кілець, кільцевих систем і комбінованих арочних систем.

Другий випадок

Коріння дійсні кратні і уявні

$$r^4 + s^4 > 0; s^4 < 0; r^4 < 0. b_1 = \sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 + s^4}}; b_2 = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 + s^4}};$$

$$r^2 = \frac{z_2}{2z_1}; s^4 = \frac{z_3}{z_1};$$

$$z_1 = \frac{EI_y EI_\omega}{M_z - \frac{EI_y}{R}}; z_2 = \frac{EI_y GI_d}{\left(M_z - \frac{EI_y}{R}\right)} + \frac{EI_\omega}{R}; z_3 = \left(M_z - \frac{GI_d}{R}\right). \quad (17)$$

Загальне рішення рівняння (5) набуде вигляду

$$\theta(\alpha) = C_1 + C_2 \alpha + C_3 \cdot \cos b_1 \alpha + C_4 \sin b_1 \alpha + C_5 \cos b_2 \alpha + C_6 \sin b_2 \alpha \quad (18)$$

Константи інтегрування, виражені через початкові параметри рівняння (11) для цього випадку, мають вигляд

$$C_1 = \theta_{(0)} + \frac{b_2^2 - b_1^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \left[-\frac{M_{y(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_2 - x_1}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \left[-\frac{B_{\omega(0)} k^2}{GI_d} \right];$$

$$C_2 = \theta_{(0)} + \frac{b_1 b_2 (b_2^2 - b_1^2)}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \left[-\frac{Q_{z(0)}}{EI_y} \right] - \frac{b_1 x_1 - b_2 x_3}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \left[-\frac{M_{\omega(0)} k^2}{GI_d} \right];$$

$$C_3 = -\frac{b_2^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \left[-\frac{M_{y(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \left[-\frac{B_{\omega(0)} k^2}{GI_d} \right];$$

$$C_4 = -\frac{b_2^3}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \left[-\frac{Q_{z(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_4}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \left[-\frac{M_{\omega(0)} k^2}{GI_d} \right];$$

$$C_5 = \frac{b_1^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \left[-\frac{M_{y(0)}}{EI_y} \right] - \frac{x_1}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \left[-\frac{B_{\omega(0)} k^2}{GI_d} \right];$$

$$C_6 = \frac{b_1^3}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \left[-\frac{Q_z(0)}{EI_y} \right] - \frac{x_3}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \left[-\frac{M_{\omega(0)} k^2}{GI_d} \right]; \quad (19)$$

$$x_1 = \frac{b_1^2 (EI_{\omega} b_1^2 + GI_d)}{\left(M_z - \frac{EI_y}{R} \right)}; \quad x_2 = \frac{b_2^2 (EI_{\omega} b_2^2 + GI_d)}{\left(M_z - \frac{EI_y}{R} \right)}; \quad x_3 = b_1 x_1; \quad x_4 = b_2 \cdot x_2.$$

Фундаментальні ортонормовані функції рівняння (15) після всіх перетворень запишуться у вигляді

$$A_{13} = \frac{(b_2^2 - b_1^2) c - b_2^2 \frac{x_1}{b_1^2} \cos b_1 \alpha - b_1^2 \frac{x_2}{b_2^2} \cos b_2 \alpha}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2};$$

$$A_{14} = \frac{b_1 b_2 (b_2^2 - b_1^2) c \alpha - b_2^3 \frac{x_3}{b_1^3} \sin b_1 \alpha + b_1^3 \frac{x_4}{b_2^3} \sin b_2 \alpha}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3};$$

$$A_{17} = \frac{\left[-(x_2 - x_1) c + x_2 \frac{x_1}{b_1^2} \cos b_1 \alpha - x_1 \frac{x_2}{b_2^2} \cos b_2 \alpha \right] k^2 + (x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2) c}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d};$$

$$A_{18} = \frac{\left[-(b_1 x_4 - b_2 x_3) c \alpha + x_4 \frac{x_3}{b_1^3} \sin b_1 \alpha - x_3 \frac{x_4}{b_2^3} \sin b_2 \alpha \right] k^2 + (x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3) c}{x_1 b_2^3 - x_2 b_1^3} \cdot \frac{EI_y}{GI_d};$$

$$A_{23} = \frac{b_2^2 \frac{x_1}{b_1} \sin b_1 \alpha - b_1^2 \frac{x_2}{b_2} \sin b_2 \alpha}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2}; \quad A_{24} = \frac{b_1 b_2 (b_2^2 - b_1^2) c - b_2^3 \frac{x_3}{b_1^3} \cos b_1 \alpha + b_1^3 \frac{x_4}{b_2^3} \cos b_2 \alpha}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; \quad (20)$$

$$A_{27} = \frac{\left[-x_2 \frac{x_1}{b_1} \sin b_1 \alpha + x_1 \frac{x_2}{b_2} \sin b_2 \alpha \right] k^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d};$$

$$A_{28} = \frac{\left[-(b_1 x_4 - b_2 x_3) c + x_4 \frac{x_3}{b_1^3} \cos b_1 \alpha - x_3 \frac{x_4}{b_2^3} \cos b_2 \alpha \right] \cdot \frac{EI_y}{GI_d}}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; \quad A_{33} = \frac{b_2^2 x_1 \cos b_1 \alpha - b_1^2 x_2 \cos b_2 \alpha}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2};$$

$$\begin{aligned}
 A_{34} &= \frac{b_2^3 \frac{x_3}{b_1} \sin b_1 \alpha - b_1^3 \frac{x_4}{b_2} \sin b_2 \alpha}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; & A_{37} &= \frac{[-x_1 x_2 \cos b_1 \alpha + x_1 x_2 \cos b_2 \alpha] k^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; \\
 A_{38} &= \frac{\left[-x_4 \frac{x_3}{b_1} \sin b_1 \alpha + x_3 \frac{x_4}{b_2} \sin b_2 \alpha \right] k^2}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; & A_{43} &= \frac{-b_1 b_2^2 x_1 \sin b_1 \alpha + b_1^2 b_2 x_2 \sin b_2 \alpha}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2}; \\
 A_{44} &= \frac{b_2^3 x_3 \cos b_1 \alpha - b_1^3 x_4 \cos b_2 \alpha}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; & A_{47} &= \frac{[x_1 x_2 b_1 \sin b_1 \alpha - x_1 x_2 b_2 \sin b_2 \alpha] k^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; \\
 A_{48} &= \frac{\left[-x_3 x_4 \frac{x_3}{b_1} \cos b_1 \alpha + x_3 x_4 \frac{x_4}{b_2} \cos b_2 \alpha \right] k^2}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \cdot \frac{EI_y}{GI_d}; & A_{53} &= \frac{b_2^2 (1 - \cos b_1 \alpha) - b_1^2 (1 - \cos b_2 \alpha)}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \\
 A_{54} &= \frac{b_2^3 (b_1 \alpha - \sin b_1 \alpha) - b_1^3 (b_2 \alpha - \sin b_2 \alpha)}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; & A_{57} &= \frac{[-x_2 (1 - \cos b_1 \alpha) + x_1 (1 - \cos b_2 \alpha)] k^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2}; \\
 & & & (20) \\
 A_{58} &= \frac{[-x_4 (b_1 \alpha - \sin b_1 \alpha) + x_3 (b_2 \alpha - \sin b_2 \alpha)] k^2}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; & A_{63} &= \frac{b_1 b_2^2 \sin b_1 \alpha - b_1^2 b_2 \sin b_2 \alpha}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \\
 A_{64} &= \frac{b_1 b_2^3 (1 - \cos b_1 \alpha) - b_1^3 b_2 (1 - \cos b_2 \alpha)}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; & A_{67} &= \frac{[-x_2 b_1 \sin b_1 \alpha + x_1 b_2 \sin b_2 \alpha] k^2}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2}; \\
 A_{68} &= \frac{[-x_4 b_1 (1 - \cos b_1 \alpha) + x_3 b_2 (1 - \cos b_2 \alpha)] k^2}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; & A_{73} &= \frac{b_1^2 b_2^2 \cos b_1 \alpha - b_1^2 b_2^2 \cos b_2 \alpha}{(x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2) k^2} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \\
 A_{74} &= \frac{b_1^2 b_2^3 \sin b_1 \alpha - b_1^3 b_2^2 \sin b_2 \alpha}{k^2 (x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3)} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; & A_{77} &= \frac{-x_2 b_1^2 \cos b_1 \alpha + x_1 b_2^2 \cos b_2 \alpha}{x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2}; \\
 A_{78} &= \frac{-x_4 b_1^2 \sin b_1 \alpha + x_3 b_2^2 \sin b_2 \alpha}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; & A_{83} &= \frac{-b_1^3 b_2^3 \sin b_1 \alpha + b_1^2 b_2^3 \sin b_2 \alpha}{k^2 (x_1 b_2^2 - x_2 b_1^2)} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; \\
 A_{84} &= \frac{b_1^3 b_2^3 \cos b_1 \alpha - b_1^3 b_2^3 \cos b_2 \alpha}{k^2 (x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3)} \cdot \frac{GI_d}{EI_y}; & A_{87} &= \frac{x_2 b_1^3 \sin b_1 \alpha - x_1 b_2^3 \sin b_2 \alpha}{(x_3 b_2^2 - x_2 b_1^2)}; \\
 A_{88} &= \frac{-x_4 b_1^3 \cos b_1 \alpha + x_3 b_2^3 \sin b_2 \alpha}{x_3 b_2^3 - x_4 b_1^3}; & C &= \frac{GI_d}{\left(M_z - \frac{EI_y}{R} \right)}.
 \end{aligned}$$

Дані фундаментальні функції, як і вирази (16), служать вихідною математичною моделлю задач стійкості кругових арок.

Аналіз пропонованого підходу розв'язання задач стійкості

1. Випадок $M_Z = const$. Даний випадок для кругових арок є рідкісним і можливим тільки при шарнірному закріпленні опор і їх навантаженні зосередженими рівними згинальними моментами. У такому випадку рівняння (15) можна використовувати безпосередньо для всієї конструкції за алгоритмом МГЕ [2]-[6].

2. Випадок, коли M_Z є деяка функція кутової координати α . Для аркових конструкцій це найбільш поширений випадок. Тут необхідно мати аналітичний вираз функції $M_Z(\alpha)$. Найбільш просто цю функцію можна побудувати також за алгоритмом МГЕ [5]-[6], де з вичерпною повнотою описана процедура обчислення функції $M_Z(\alpha)$ від заданих навантажень. Далі арку розбивають на n частин [7]-[9].

У кожній частині обчислюють за відомим висловом значення згинального моменту M_Z так, щоб площа східчної фігури M_Z дорівнювала площі дійсної епюри M_Z . Якщо ця умова витримується, то при $n \geq 30$ виходять практично точні результати критичних навантажень $M_{кр}$, $F_{кр}$, $q_{кр}$ [10]-[12].

Слід зазначити, що проведені дослідження зняли проблеми математичного моделювання досить складних задач стійкості конструктивних елементів вантажопідйомних машин.

Висновки

1. При вирішенні завдань стійкості плоскої форми вигину арок МСЕ потрібно вирішити близько 1000 лінійних алгебраїчних рівнянь. Похибка отриманого рішення буде близько 5 %. Для розв'язання задач стійкості арок МГЕ потрібно вирішити всього вісім рівнянь і похибка результатів буде менше 1 %.

2. Представлено спрощену систему диференціальних рівнянь задач стійкості плоскої форми вигину стержнів у вигляді кругових арок зі змінними коефіцієнтами. Як невідомі виступають горизонтальні переміщення і кути закручування осі кругових арок.

3. Складено звичайне диференціальне рівняння шостого порядку з постійними коефіцієнтами для розглянутих задач стійкості та використання технології МГЕ. Отримане рівняння дозволяє побудувати по відомій теорії точний аналітичний розв'язок задач стійкості кругових арок.

4. Сформовано матричне рівняння крайових задач стійкості плоскої форми вигину кругових арок МГЕ. Наявність цього рівняння дозволяє істотно спростити логіку розв'язання задач стійкості і отримувати точні значення критичних навантажень.

Аналіз представленої матеріалу показує, що можливо в рамках алгоритму чисельно-аналітичного варіанту МГЕ побудувати дозволяюче рівняння задач стійкості плоскої форми вигину кругових стержнів. Дане рівняння може бути застосовано до вирішення досить складних задач стійкості різноманітних конструкцій, що містять стержні, окреслені по дузі кола.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hans De Backer. *Buckling design of steel tied-arch bridges [Text]* / Hans De Backer, Amelie Outtier, Philippe Van Bogaert // *Journal of Constructional Steel Research*. – 103. – 2014. – P. 159-167.
2. Louise C.N. *Performance of lightweight thin-walled steel sections: theoretical and mathematical considerations [Text]* / C.N. Louise, A.M. Md Othuman, M. Ramli. *Performance of lightweight thin-walled steel sections: theoretical and mathematical considerations* // *Applied Science Research*. – 2012. – № 3 (5). – P. 2847-2859.
3. Yong-Lin Pi. *In-plane stability of preloaded shallow arches against dynamic snap-through accounting for rotational end restraints [Text]* / Yong-Lin Pi, Mark Andrew Bradford // *Engineering Structures*. – Volume 56. – November 2013. – P. 1496-1510.
4. Becque J. *The direct strength method for stainless steel compression members [Text]* / J. Becque, M. Lecce, J.R. Kim Rasmussen // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2008. – Vol. 64. – Issue 11. – P. 1231-1238.
5. Andreev V. *Energy Vethod in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep [Text]* / Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurenko, Batur M. Yazyev // *Advanced Materials Research*. – Vols. 1004-1005. – 2014. – P. 257-260. Trans Tech Publications, Switzerland.
6. Артюхин Ю.П. *Приближенный аналитический способ исследования деформаций пространственных криволинейных стержнем [Текст]* / Ю.П. Артюхин // *Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки*. – 2012. – Т. 154. – С. 97-111.
7. Wen-Liang Qiu. *Stability Analysis of Special-Shape Arch Bridge [Text]* / Wen-Liang Qiu, Chin-Sheng Kao, Chang-Huan Kou, Jeng-Lin Tsai and Guang Yang // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. – 2010. – Vol. 13. – № 4. – P. 365-373.

8. Pettit J. *Improved Detection of Rough Defects for Ultrasonic Nondestructive Evaluation Inspections Based on Finite Element Modelling of Elastic Wave Scattering [Text]* / James R. Pettit, Anthony E. Walker, Michael J.S. Lowe // *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control.* – 2015. – Vol. 62. – № 10. – P. 1797-1808.
9. Langer U. *Fast Boundary Element Methods in Engineering and Industrial Applications [Text]* / Langer U., Schanz M., Steinbach O., Wendland W.L. // *Springer*, 2012. – P. 192-198.
10. Orobey V. *Boundary element method in problem of plate elements bending of engineering structures [Text]* / V. Orobey, L. Kolomiets, A. Lymarenko // *Metallurgical and Mining Industry.* – 2015. – № 4. – P. 295-302.
11. Kolomiets L. *Method of boundary element in problems of stability of plane bending beams of rectangular cross section. Structures [Text]* / L. Kolomiets, V. Orobey, A. Lymarenko // *Metallurgical and Mining Industry.* – 2016. – № 3. – P. 59-65.
12. Orobey V. *Mathematical modeling of the stressed-deformed state of circular arches of specialized cranes [Text]* / V. Orobey, O. Dashchenko, L. Kolomiets, O. Lymarenko, Y. Ovcharov // *Eastern European Journal of Enterprise Technologies.* – 2017. – 5/8 (89). – P. 4-11.

Стаття надійшла до редакції 12.02.2018

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, засл. діяч науки і техніки
України Одеського національного політехнічного університету
А.Ф. Дашенко

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
«Машинознавство» Одеського національного морського університету
А.В. Конопльов