ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 67–74

Mathematical Subject Classification: 65C10, 11K45
УДК 511.33

О. В. Савастру
Одесский национальний университет имени И. И. Мечникова

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ $U^2 + V^2 = N^3$ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Савастру О. В. Про розподіл цілих точок на поверхні $u^2 + v^2 = n^3$ в арифметичній прогресії. У роботі побудована асимптотична формула для суматорної функції, яка позначає кількість цілих точок, розташованих на поверхні $u^2 + v^2 = n^3$. Дослідженням цієї проблеми займалися Kühleitner M. и Nowak W. У статті розглядається діофантове рівняння у випадку, коли $0 < n \le x$, x – зростаючий параметр, $n \equiv l \pmod q$, $(l, q) = 1$. Користуючись загальною схемою оцінки середніх значень рядів Дирихле, отримана оцінка для середньої кількості цілих розв'язків вказаного рівняння, яка нетривіальна при $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\log x)^{-4}$.
Ключові слова: асимптотична формула, діофантові рівняння, L-функція Дирихле, арифметична прогресія.

Савастру О. В. О распределении целых точек на поверхности $u^2+v^2 = n^3$ в арифметической прогрессии. В работе построена асимптотическая формула для сумматорной функции, обозначающей количество целых точек, лежащих на поверхности $u^2+v^2 = n^3$. Исследованием этой проблемы занимались Kühleitner M. и Nowak W. В статье рассматривается диофантово уравнение в случае, когда $0 < n \le x$, x – растущий параметр, $n \equiv l \pmod q$, $(l, q) = 1$. Используя метод производящих рядов Дирихле, общую схему оценки средних значений этих рядов, получена оценка для среднего количества целочисленных решений указанного уравнения, которая нетривиальная при $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\log x)^{-4}$. Вычислимые константы в главном члене зависят только от q.
Ключевые слова: асимптотическая формула, диофантовы уравнения, L-функция Дирихле, арифметическая прогрессия.

Savastru O. V. About the distribution of integer points on the surface $u^2 + v^2 = n^3$ in an arithmetic progression. The aim of our paper is to construct the asymptotic formula for the summatory function, that denote the number of integer points on the surface $u^2 + v^2 = n^3$. This problem was investigated by Kühleitner M. and Nowak W. We consider this diophantine equation in an arithmetic progression, when $0 < n \le x$, x is a large parameter, n in residue class $l \pmod q$, $(l, q) = 1$. The proof of theorem is based on the method of generating Dirichlet series. Using the Phragmen-Lindelöf theorem and the general scheme of the estimation of the mean values of Dirichlet series we obtained the non-trivial result for the average number of integer solutions of the above equation for $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\log x)^{-4}$. The computable constants in main term depend only of q. The analogical result can be proved in general case, when $(l, q) > 1$.
Key words: asymptotic formula, diophantine equation, L-Dirichlet function,arithmetic progression.

Введение.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение функцию $A_k(x)$, обозначающую количество целочисленных решений диофантового уравнения

$$u^2 + v^2 = n^k, \tag{1}$$

при условии $0 < n \leq x$. Тогда

$$A_k(x) = \sum_{n \leq x} r(n^k), \tag{2}$$

где $r(n)$ обозначает количество представлений положительного целого числа n в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Сумматорные функции такого вида при $k = 2$ изучались в работах [1], [5]. В работе [1] также рассматривался вопрос о числе решений уравнения (1) при $k > 2$.

Fischer K.H. [8], Kühleitner M., Nowak W. [10] и Recknagel W. [11] исследовали распределение целых точек на соответствующей поверхности при $k = 3$. В работе Варбанца П.Д. [12] была построена асимптотическая формула для числа примитивных точек на эллиптических конусах в арифметической прогрессии. Поэтому естественным образом возник вопрос решения подобной задачи на поверхности (1) при $k = 3$.

Целью данной работы является построение асимптотической формулы для сумматорной функции $A_3(x, l, q)$, обозначающей число целых точек (u, v, n), лежащих на поверхности $u^2 + v^2 = n^3$, при условии $n \leq x$,
$n \equiv l \pmod q$, где $l, q \in \mathbb{N}$, $(l, q) = 1$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие стандартные обозначения:
$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$;
(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b;
$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана;
$L(s, \chi_4)$ – L-функция Дирихле с неглавным характером по $\bmod 4$;
χ – характер Дирихле по $\bmod q$;
χ_0 – главный характер Дирихле по $\bmod q$;
$\sum\limits_{\chi}$ – сумма по всем характерам по $\bmod q$;
$\sideset{}{'}\sum\limits_{\chi'}$ – сумма по всем примитивным характерам χ' по $\bmod q$;
$\tau(n)$ – функция числа делителей;
$\varphi(n)$ – функция Эйлера;
символ Виноградова $'' \ll ''$ означает то же, что и символ Ландау $''O''$.

Основные результаты.

1. Вспомогательные утверждения.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем.

Пусть $L(s, \chi)$ – L-функция Дирихле с характером по $\bmod q$

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \Re s > 1.$$

Хорошо известно, что $L(s,\chi)$ является целой функцией (см., например, [4]), если $\chi\neq\chi_0$. В случае $\chi=\chi_0$ L-функция Дирихле $L(s,\chi_0)$ аналитична во всей комплексной s-плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом $\frac{\varphi(q)}{q}=\Pi_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Рассмотрим поведение функции $L(s,\chi)$ в области
$\frac{1}{2}\leq\sigma\leq1+\frac{1}{\log T}$, $2\leq|t|\leq T$.

Лемма 1. *При* $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq1+\frac{1}{\log T}, 2\leq|t|\leq T$, *справедлива оценка*

$$L(s,\chi)\ll_{\chi}(q|t|)^{\frac{1-\sigma}{2}}(\log T). \tag{3}$$

Доказательство. Для произвольного примитивного характера χ по $\mod q$ при $s=\frac{1}{2}+it$ имеет место следующая оценка ([9])

$$L(s,\chi)\ll(q|s|)^{\frac{1}{4}}. \tag{4}$$

При $s=1+\frac{1}{\log T}+it$

$$L(s,\chi)\ll\log T. \tag{5}$$

Теперь из (4) и (5) на основании принципа Фрагмена-Линделефа для
$\frac{1}{2}\leq\sigma\leq1+\frac{1}{\log T},2\leq|t|\leq T$ получаем

$$L(s,\chi)\ll(q|t|)^{\frac{1+\frac{1}{\log T}-\sigma}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log T}}}(\log T)^{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log T}}}\ll$$

$$\ll(q|t|)^{\frac{1-\sigma}{2}}(qT)^{\frac{C}{\log T}}(\log T),$$

где $C>0$. Учитывая, что при $q,T\ll x^A$, где $0\leq A<1$, справедлива оценка $q^{\frac{C}{\log T}}=O(1)$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Если* $|T|\geqslant2$, $q\geqslant2$, *тогда при* $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq1+\frac{1}{\log T}$

$$\sum_{\chi}{}'\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it;\chi)|^4dt\ll\varphi(q)T\log^4(qT). \tag{6}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы Монтгомери ([3], с.77) и теоремы Габриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным ([6], с.238).

Исходя из определения сумматорной функции $A_3(x,l,q)$, ее можно представить в виде

$$A_3(x,l,q)=\sum_{\substack{n\equiv l\pmod q\\ n\leq x}}r(n^3). \tag{7}$$

Тогда в области $\Re s > 1$ имеем

$$F(s) = \sum_{\substack{n\equiv l \pmod q\\ n\le x}}^{\infty} \frac{r(n^3)}{n^s} = \frac{4}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{r(n^3)}{4}\chi(n)}{n^s}.$$

Как известно, $\frac{1}{4}r(n)$ является мультипликативной функцией. Если p – простое число, то она принимает следующие значения

$$\frac{1}{4}r(p^\alpha) = \begin{cases} \alpha+1, & \text{если } p\equiv 1 \pmod 4,\\ 1, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4, \quad \alpha - \text{четное},\\ 0, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4, \quad \alpha - \text{нечетное},\\ 1, & \text{если } p=2. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда в области $\Re s > 1$ имеем

$$F(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{r(n^3)}{4}\chi(n)}{n^s}.$$

Покажем, что справедливо следующее равенство

$$F(s,\chi) = \left(L(s,\chi)L(s,\chi\chi_4)\right)^2 G(s,\chi), \tag{9}$$

где $G(s,\chi)$ – регулярна в области $\Re s > \frac{1}{2}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} F(s,\chi) &= \prod_p \left(1 + \frac{\frac{r(p^3)}{4}\chi(p)}{p^s} + \frac{\frac{r(p^6)}{4}\chi(p)}{p^{2s}} + \ldots\right) = \left(1 + \tfrac{1}{2^s} + \ldots\right) \times\\ &\times \prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left(1 + \frac{4\chi(p)}{p^s} + \frac{7\chi(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right) \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4}\left(1 + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\chi(p^4)}{p^{4s}} + \ldots\right) =\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1+2\frac{\chi(p)}{p^s}}{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1-\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4) &= \left(\prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}\right)^2 \times\\ &\times \left(\prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1+\frac{\chi(p)}{p^s}}\right)^2 =\\ &= \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^4} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в (10), получаем

$$\begin{aligned} F(s,\chi) &= L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \times\\ &\times \prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left(1+2\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2 \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4}\left(1-\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\right) =\\ &= L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4)G(s,\chi), \end{aligned}$$

где

$$G(s,\chi)=\tfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times$$
$$\times\prod_{p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)}\left(1+2\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\cdot\prod_{p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)}\left(1-\left(\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\right). \tag{11}$$

Таким образом, в области $\Re s>1$

$$F(s)=\frac{4}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(l)L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4)G(s,\chi). \tag{12}$$

2. Основная теорема.

Воспользуемся формулой Перрона, полагая $c=1+\frac{1}{\log x}$, $T>1$, $\epsilon>0$.

$$A_3(x,l,q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x\log^2 x}{Tq}\right)+O_\epsilon(x^\epsilon). \tag{13}$$

В (13) перенесем контур интегрирования на прямую $\Re s=\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}$. При этом мы пройдем через полюс подынтегральной функции в точке $s=1$. Рассмотрим интеграл по контуру Γ, который представляет собой прямоугольник с вершинами $c\pm iT$, $\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}\pm iT$. Подынтегральная функция аналитична на Γ и внутри него, исключая полюс второй кратности в точке $s=1$ (за счет $L^2(s,\chi)$ или $L^2(s,\chi\chi_4)$). Таким образом, в силу теоремы Коши, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds=\underset{s=1}{res}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right)+\frac{1}{2\pi i}\left(I_1+I_2+I_3\right), \tag{14}$$

где

$$I_1=\int\limits_{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}-iT}^{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds,$$

$$I_2=\int\limits_{1+(\log x)^{-1}-iT}^{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}-iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds,\quad I_3=\int\limits_{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}+iT}^{1+(\log x)^{-1}+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds.$$

Используя оценки (3) из леммы 1, мы получаем вклад горизонтальных участков интегрирования:

$$I_2,I_3\ll x^{1+\frac{1}{\log x}}\cdot T^{-1-\frac{1}{2\log x}}\log T+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}\cdot T^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2\log x}}\log T. \tag{15}$$

Далее осталось рассмотреть интеграл I_1. Как известно, если через χ' обозначить примитивный характер по $\mod q'$, который индуцирует характер χ по $\mod q$, тогда (см.[2]) в области $\Re s>1$

$$L(s,\chi)=L(s,\chi)\prod_{p|q,\,p\nmid q'}\left(1-\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right).$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}-iT}^{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}+iT} \frac{4}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(l) L^2(s,\chi) L^2(s,\chi\chi_4) G(s,\chi) \frac{x^s}{s} ds \ll$$
$$\ll \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}}{\varphi(q)} \times$$
$$\times \left[\sum_{q'|q} \times \left[\sum_{\chi' \mod q}{}' \int\limits_1^T \left| L(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\log x} + it, \chi') \right|^2 \left| L(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\log x} + it, \chi'\chi_4) \right|^2 \tfrac{1}{t} dt \right] \right].$$

В силу неравенства Коши и леммы 2 получаем следующую оценку

$$I_1 \ll \tau(q) x^{\frac{1}{2}} \log^5 T. \tag{16}$$

Вычислим вычеты в точке $s = 1$ подынтегральной функции в (13).

Если $q \equiv 0 \pmod 4$, то существует единственный характер χ по $\mod q$, такой, что $\chi\chi_4 = \chi_0$ – главный характер по $\mod q$ (при этом $\chi_0\chi_4$ не является главным). Если же $q \not\equiv 0 \pmod 4$, то такого характера не существует. Рассмотрим сначала случай, когда $q \not\equiv 0 \pmod 4$, тогда представим $F(s)$ в виде

$$F(s) = \tfrac{4}{\varphi(q)} L^2(s,\chi_0) L^2(s,\chi_0\chi_4) G(s,\chi_0) +$$
$$+ \tfrac{4}{\varphi(q)} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) L^2(s,\chi) L^2(s,\chi\chi_4) G(s,\chi) \right).$$

Как известно, в окрестности точки $s = 1$

$$L(s,\chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q} \left((s-1)^{-1} + \gamma + \ldots \right),$$

$$\frac{x^s}{s} = x + (x \log x - x))(s-1) + \ldots,$$

где γ – постоянная Эйлера. Поэтому после несложных технических вычислений получаем

$$\begin{aligned} \underset{s=1}{res} \left(F(s) \tfrac{x^s}{s} \right) = \underset{s=1}{res} \left(\tfrac{4}{\varphi(q)} L^2(s,\chi_0) L^2(s,\chi_0\chi_4) G(s,\chi_0) \tfrac{x^s}{s} \right) = \\ = A_1(q) x \log x + A_0(q) x, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$A_1(q) = \frac{\pi^2}{4q} G(1,\chi_0) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p} \right), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} A_0(q) = \\ = \tfrac{\pi}{q} \textstyle\prod_{p|q} \left(1 - \tfrac{1}{p} \right) \left[2L'(1,\chi_4) + \tfrac{\pi}{4}(2\gamma - 1) G(1,\chi_0) + G'(1,\chi_0) \right], \end{aligned} \tag{19}$$

функция $G(s,\chi)$ определяется в (11).

При $q \equiv 0 \pmod 4$ и $l \equiv 1 \pmod 4$ особенность возникает при $\chi = \chi_0$ и χ_4. Учитывая, что $G(s,\chi_0) = G(s,\chi_4)$, получаем

$$\underset{s=1}{res}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right)=\underset{s=1}{res}\left(\frac{4}{\varphi(q)}\sum_{\chi=\chi_0,\chi_4}L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4)G(s,\chi)\frac{x^s}{s}\right)= \\ =2\left[A_1(q)x\log x+A_0(q)x\right]. \tag{20}$$

Из соотношений (13)–(20), полагая $T=x^{\frac{1}{2}}$, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $l,q\in\mathbb{N}$, $0<l\le q$, $(l,q)=1$. Тогда при $x\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$A_3(x,l,q)=\delta_q\left[A_1(q)x\log x+A_0(q)x\right]+O\left(x^{\frac{1}{2}}\tau(q)\log^5 x\right),$$

где $A_1(q),A_0(q)$ – вычислимые константы, зависящие от q и определяемые соотношениями (18) и (19),

$$\delta_q=\begin{cases}1, & \text{если } q\not\equiv 0 \pmod 4,\\ 2, & \text{если } q\equiv 0 \pmod 4 \text{ и } l\equiv 1 \pmod 4).\end{cases}$$

Замечание 1. *При $q\equiv 0 \pmod 4$, $l\equiv 3 \pmod 4$ уравнение $u^2+v^2=n^3$ не имеет решений, поэтому этот случай мы исключаем из рассмотрения.*

Заключение. В данной статье исследовался вопрос о среднем значении числа решений диофантового уравнения $u^2+v^2=n^3$ в арифметической прогрессии. Полученный результат нетривиален для всех $q\ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\log x)^{-4}$. Кроме того, аналогичное утверждение можно получить и для общего случая, когда $(l,q)>1$.

1. **Бабаев Г.** Распределение целых точек на алгебраических поверхностях [текст] / Бабаев Г. – Душанбе, 1966. – 280 с.
2. **Карацуба А. Л.** Основы аналитической теории чисел [текст] / А. Л. Карацуба. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
3. **Монтгомери Г.** Мультипликативная теория чисел [текст] / Монтгомери Г. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
4. **Прахар К.** Распределение простых чисел [текст] / Прахар К. – М.: Мир, 1967. – 511 с.
5. **Стронина М. И.** Целые точки на круговых конусах [текст] / Стронина М. И. // Известия вузов (Математика). – 1969. – Т. 87, № 8. – С. 112–116.
6. **Титчмарш Е. К.** Теория дзета-функции Римана [текст] / Титчмарш Е. К. – М.: ИИЛ, 1958. – 406 с.
7. **Apostol T. M.** Introduction to Analytic Number Theory [text] / Apostol T. M. – Springer-Verlag, 1976. – 338 p.
8. **Fischer K. H.** Über die Anzahl der Gitterpunkte auf Kreisen mit quadratfreien Radienquadraten [text] / Fischer K. H. // Arch. Math. – 1979. – V. 33. – P. 150–154.

9. **Iwaniec H.** Analytic Number Theory [text] / Iwaniec H., Kowalski E. // Collocuium Publications (American Mathematical Society). – 2004. – V. 53. – 615 p.

10. **Kühleitner M.** The average number of solutions of the Diophantine equation $U^2 + V^2 = W^3$ and related arithmetic functions [text] / Kühleitner M., Nowak W. // Acta Math. Hung. – 2004. – V. 104. – P. 225–240.

11. **Recknagel W.** Varianten des Gaußschen Kreisproblems[text] / Recknagel W. // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1989. – V. 59. – P. 183–189.

12. **Varbanets P. D.** On the number of primitive integer points on elliptic cones in the arithmetic progression [text] / Varbanets P. // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2006. – V. 26. – P. 25 –42.