М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 41A65, 41A17, 26A15, 26A16
УДК 517.5

Т. А. Агошкова, С. А. Пичугов
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени ак. В. Лазаряна

АППРОКСИМАЦИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ ЛИПШИЦА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ L_ψ

Агошкова Т. А., Пiчугов С. О. Апроксимацiя анiзотропних класiв Лiпшиця в метричних просторах L_ψ. Для просторiв, визначених функцiєю ψ – типу модуля неперервностi, доведенi в багатовимiрному випадку пряма та обернена теореми типу Джексона та Бернштейна для усереднених наближень кусково-сталими функцiями та отримана конструктивна характеристика анiзотропних класiв Лiпшиця при пiдходящему розбиттi тору перiоду.
Ключовi слова: модуль неперервностi, кусково-стала функцiя, пряма та обернена теореми типу Джексона та Бернштейна, анiзотропний клас Лiпшиця.

Агошкова Т. А., Пичугов С. А. Аппроксимация анизотропных классов Липшица в метрических пространствах L_ψ. Для пространств, определенных функцией ψ – типа модуля непрерывности, доказаны в многомерном случае прямая и обратная теоремы типа Джексона и Бернштейна для усредненных приближений кусочно-постоянными функциями и получена конструктивная характеристика анизотропных классов Липшица при подходящем разбиении тора периода.
Ключевые слова: модуль непрерывности, кусочно-постоянная функция, прямая и обратная теоремы типа Джексона и Бернштейна, анизотропный класс Липшица.

Agoshkova T. A., Pichugov S. A. Approximation of anisotropic Lipschitz classes in metric spaces L_ψ. For spaces defined by the function ψ of the type of modulus of continuity, we prove the direct and converse Jackson- and Bernstein-type theorems for the mean approximations by piecewise constant functions and we obtain a constructive characterization of anisotropic Lipschitz classes for a suitable partition of the period torus.
Key words: modulus of continuity, piecewise constant function, direct and converse Jackson- and Bernstein- type theorems, anisotropic Lipschitz class.

Введение. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $m \geq 1$. Пусть $f(\mathbf{x})$ –действительнозначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m = [0,1)^m$ – основной тор периодов; $L_0(T^m)$ – множество всех таких функций, которые почти всюду на T^m конечны и измеримы; Ω – класс функций $\psi : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, являющихся модулями непрерывности, то есть ψ – непрерывная неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \leq \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1_+$.

$L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) : \ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x} < \infty\}$ – линейное метрическое пространство с метрикой $\rho(f,g)_\psi = \|f-g\|_\psi$. Среди пространств L_ψ важнейшими являются пространства $L_p(T^m)$, $0 < p \leq 1$ (случай $\psi(t) = t^p$) и $L_0(T^m)$ с топологией сходимости по мере: $\|f\|_0 = \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x}$, $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$.

Определение 1. *Под модулем непрерывности функции f в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать*

$$\omega(f,h)_\psi = \sup_{\|\boldsymbol{t}\|_\infty \le h} \| \vartriangle_{\boldsymbol{t}} f\|_\psi,$$

где $\|\boldsymbol{t}\|_\infty = \max\limits_{i=1\dots m} |t_i|,\ \vartriangle_{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}),\ f_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = f(x_1 + t_1, \dots, \dots, x_m + \ t_m)$.

Определение 2. *Для $\alpha \in (0,1]$ определим классы Липшица*

$$\Lambda^\alpha_\psi(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m):\ \omega(f,h)_\psi \le C_f h^\alpha,\ h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\}.$$

Для каждой из m координатных осей отрезок $[0,1)$ разбиваем на отрезки равной длины с помощью 2^{j_k} равноотстоящих точек вида:

$$\frac{i_k}{2^{j_k}},\ i_k = 0,1,...,2^{j_k} - 1,$$

где индекс k $(k = 1,...,m)$ указывает номер оси.

Таким образом получаем разбиение основного тора T^m на $2^{\sum\limits_{k=1}^m j_k}$ параллелепипедов вида:

$$\Pi_{i_1\dots i_m} = \{\mathbf{x} \in T^m:\ \frac{i_k}{2^{j_k}} \le x_k < \frac{i_k+1}{2^{j_k}},\ k = 1,...,m\}, \tag{1}$$

где $i_k = 0,1,...,2^{j_k} - 1,\ k = 1,...,m$.

Определение 3. *Определим через $L_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}$ пространство 1-периодических кусочно-постоянных функций $l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}$, заданых следующим образом:*

$$l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} b_{i_1\dots i_m} \chi_{\Pi_{i_1\dots i_m}}(\boldsymbol{x}),$$

где $b_{i_1\dots i_m} \in \mathbb{R}^1$ *и* $\chi_{\Pi_{i_1\dots i_m}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Pi_{i_1\dots i_m} \\ 0, & \boldsymbol{x} \overline{\in} \Pi_{i_1\dots i_m}. \end{cases}$

Определение 4. $\overline{E}_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f)_\psi = \inf\limits_{l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}} \in L_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}} \int\limits_{T^m} \|f_{\boldsymbol{t}} - l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}\|_\psi d\boldsymbol{t}$ – *усредненное приближение на периоде в метрике $L_\psi(T^m)$ функции f элементами подпространства $L_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}$.*

Определение 5. *Под частным модулем непрерывности функции f по переменной x_k $(1 \le k \le m)$ в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать*

$$\omega_k(f,h)_\psi = \sup_{|t_k| \le h} \| \vartriangle_{t_k \boldsymbol{e}_k} f\|_\psi,\ k = 1, \dots, m,$$

где $\vartriangle_{t_k\boldsymbol{e}_k} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + t_k \boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{e}_k$ *– вектор, k-я координата которого равна 1, а остальные координаты – нули.*

Определение 6. *Для $\alpha_i \in (0,1],\ i = 1, ..., m$, определим анизотропные классы Липшица*

$$\Lambda_{\psi}^{\alpha_1,...,\alpha_m}(T^m) = \{f \in L_{\psi}(T^m):\ \exists C,\ \omega_k(f,h)_{\psi} \le Ch^{\alpha_k},\ h \in \left(0, \frac{1}{2}\right),\ k = 1, ..., m\}.$$

Для периодических функций одной переменной из L_p при $0 < p < 1$, в случае приближения тригонометрическими полиномами, прямая и обратная теоремы Джексона были доказаны независимо в [1] и [2]. Из них следовала конструктивная характеристика классов Липшица $\Lambda_p^{\alpha}(T^1)$:

Теорема. [1], [2]. *Пусть $f \in L_p(T^1),\ 0 < p < 1$. Тогда при $\forall \alpha \in (0, p)$ имеет место эквивалентность*

$$f \in \Lambda_p^{\alpha}(T^1)\ \Leftrightarrow\ E_n^*(f)_p \le C\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha},\ n \ge 0,$$

где $E_n^*(f)_p = \inf\limits_{T_n} \|f - T_n\|_p = \inf\limits_{T_n} \int\limits_0^1 |f(x) - T_n(x)|^p dx$ – наилучшее приближение f в $L_p(T^1)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n.

А для периодических функций одной переменной из $L_{\psi}(T^1)$ прямая и обратная теоремы Джексона, в случае приближения тригонометрическими полиномами, были получены в [3], [4]. Выяснилось, что справедливость этих теорем зависит от нижнего показателя растяжения γ_{ψ} функции ψ.

Определение 7. [5, с. 75]. *Пусть $\varphi(t),\ t \in (0, \infty)$, – произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения называют функцию $M_{\varphi}(s),\ s \in (0, \infty)$,*

$$M_{\varphi}(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}.$$

Общие свойства M_{φ} в [5, с. 75-78].

Определение 8. *γ_{φ} – нижний показатель растяжения функции $\varphi(t) \in \Omega$, то есть:*
1) $\gamma_{\varphi} \in [0; 1]$;
2) $M_{\varphi}(s) \ge s^{\gamma_{\varphi}},\ \forall s \in (0; 1]$;
3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_{\varepsilon}$:

$$M_{\varphi}(s) \le C_{\varepsilon} s^{\gamma_{\varphi} - \varepsilon},\ s \in (0, 1).$$

Теорема. [3].

1. Если $\gamma_{\psi} > 0$, то имеют место неравенства Джексона

$$\sup_n \sup_{\substack{f \in L_{\psi}(T^1),\\ f \ne const}} \frac{E_n^*(f)_{\psi}}{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{\psi}} < \infty.$$

2. Если $\gamma_{\psi} = 0$, то неравенства Джексона в форме

$$\sup_n \sup_{\substack{f \in L_{\psi}(T^1),\\ f \ne const}} \frac{E_n^*(f)_{\psi}}{\omega\left(f, \alpha_n\right)_{\psi}} < \infty$$

невозможны ни при каком выборе последовательности $\{\alpha_n\},\ \alpha_n > 0,\ \alpha_n \downarrow 0$.

Теорема. [4]. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Тогда найдется константа* $C = C(\psi)$ *такая, что для всех* $f \in L_\psi(T^1)$ *и всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *имеют место неравенства*

$$\omega(f,h)_\psi \leq C \sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\psi(jh)}{j} E^*_{j-1}(f)_\psi.$$

Конструктивная характеристика классов Липшица $\Lambda^\alpha_\psi(T^1)$:

Следствие. [4]. *Пусть* $f \in L_\psi(T^1)$ *и* $\gamma_\psi > 0$, *тогда при* $\forall \alpha \in (0, \gamma_\psi)$ *имеет место эквивалентность*

$$f \in \Lambda^\alpha_\psi(T^1) \;\Leftrightarrow\; E^*_{n-1}(f)_\psi \leq K_f \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha, \; n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в случае приближения тригонометрическими полиномами, в пространствах $L_\psi(T^1)$ при $\gamma_\psi = 0$, например в L_0, теорем Джексона нет, а значит и нет возможности получить конструктивную характеристику классов Липшица.

В [6] для периодических функций одной переменной из $L_\psi(T^1)$ доказаны прямая и обратная теоремы Джексона для усредненной аппроксимации кусочно-постоянными функциями с равномерным разбиением, откуда следовала конструктивная характеристика классов Липшица $\Lambda^\alpha_\psi(T^1)$:

Теорема. [6]. *Для* $\forall \psi \in \Omega$, $\forall f \in L_\psi(T^1)$ *и* $\forall \alpha \in (0,1)$ *имеет место эквивалентность*

$$f \in \Lambda^\alpha_\psi(T^1) \;\Leftrightarrow\; \overline{E}_{2^k}(f)_\psi \leq C \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha, \; k \in \mathbb{N}.$$

В этом проявилось преимущество аппроксимации кусочно-постоянными функциями в сравнении с приближением тригонометрическими полиномами.

В [7] получен многомерный аналог прямой и обратной теорем Джексона для аппроксимации кусочно-постоянными функциями с равномерным разбиением тора периода и, как следствие, получена конструктивная характеристика изотропных классов Липшица $\Lambda^\alpha_\psi(T^m)$:

Теорема. [7]. *Для* $\forall \psi \in \Omega$, $\forall f \in L_\psi(T^m)$ *и* $\forall \alpha \in (0,1)$ *имеет место эквивалентность*

$$f \in \Lambda^\alpha_\psi(T^m) \;\Leftrightarrow\; \overline{E}_{2^k \ldots 2^k}(f)_\psi \leq C \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha, \; k \in \mathbb{N}.$$

В настоящей работе, в случае приближения кусочно-постоянными функциями с разбиением на m-мерные параллелепипеды основного тора периода, для усредненных приближений доказаны прямая и обратная теоремы Джексона. И при подходящем разбиении получена конструктивная характеристика анизотропных классов Липшица $\Lambda^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}_\psi(T^m)$.

Основные результаты.

1. Прямая и обратная теоремы Джексона.

Теорема 1. *Для* $\forall\psi\in\Omega$ *и* $\forall f\in L_\psi(T^m)$ *справедливы неравенства:*

$$\overline{E}_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f)_\psi\le\sum_{k=1}^{m}\omega_k\left(f,\frac{1}{2^{j_k}}\right)_\psi. \tag{2}$$

Доказательство. Для оценки сверху достаточно ограничиться всюду плотным в L_ψ множеством непрерывных функций. В качестве аппроксимирующей функции выберем следующим образом определенную функцию $l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}$ из $L_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}$:

$$l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f,\mathbf{x})=\sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1}f\left(\frac{i_1}{2^{j_1}},\dots,\frac{i_m}{2^{j_m}}\right)\chi_{\Pi_{i_1,\dots,i_m}}(\mathbf{x}).$$

$$\begin{gathered}\overline{E}_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f)_\psi=\inf_{l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}\in L_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}}\int\limits_{T^m}\|f_{\mathbf{t}}-l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}\|_\psi d\mathbf{t}\le\\ \le\int\limits_{T^m}\|f_{\mathbf{t}}-l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f_{\mathbf{t}})\|_\psi d\mathbf{t}=\int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m}\psi\left(|f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})-l_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f_{\mathbf{t}},\mathbf{x})|\right)d\mathbf{x}d\mathbf{t}=\\ =\int\limits_{T^m}\sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1}\int\limits_{\frac{i_1}{2^{j_1}}}^{\frac{i_1+1}{2^{j_1}}}\dots\int\limits_{\frac{i_m}{2^{j_m}}}^{\frac{i_m+1}{2^{j_m}}}\psi\left(\left|f_{\mathbf{t}}(x_1,...,x_m)-f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{i_1}{2^{j_1}},...,\tfrac{i_m}{2^{j_m}}\right)\right|\right)dx_1...dx_m d\mathbf{t}=\\ =\sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1}\int\limits_{\frac{i_1}{2^{j_1}}}^{\frac{i_1+1}{2^{j_1}}}\dots\int\limits_{\frac{i_m}{2^{j_m}}}^{\frac{i_m+1}{2^{j_m}}}\int\limits_{T^m}\psi\left(\left|f_{\mathbf{t}}\left(x_1+\tfrac{i_1}{2^{j_1}},...,x_m+\tfrac{i_m}{2^{j_m}}\right)-f(\mathbf{t})\right|\right)d\mathbf{t}dx_1...dx_m=\\ =\sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_1}}}\dots\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_m}}}\int\limits_{T^m}\psi\left(|f(x_1+t_1,...,x_m+t_m)-f(\mathbf{t})|\right)d\mathbf{t}dx_1...dx_m.\end{gathered}$$

Рассмотрим отдельно полученое подинтегральное выражение

$$\begin{gathered}\psi\left(|f(x_1+t_1,\dots,x_m+t_m)-f(t_1,\dots,t_m)|\right)\le\\ \le\psi\left(|f(t_1+x_1,\dots,t_m+x_m)-f(t_1,t_2+x_2\dots,t_m+x_m)|\right)+\\ +\psi\left(|f(t_1,t_2+x_2\dots,t_m+x_m)-f(t_1,t_2,t_3+x_3,\dots,t_m+x_m)|\right)+\\ +\dots+\psi\left(|f(t_1,\dots,t_{m-1},t_m+x_m)-f(t_1,\dots,t_m)|\right).\end{gathered}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered}\overline{E}_{2^{j_1}\dots 2^{j_m}}(f)_\psi\le\\ \le\sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_1}}}\dots\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_m}}}\left(\|\triangle_{x_1\mathbf{e}_1}f\|_\psi+...+\|\triangle_{x_m\mathbf{e}_m}f\|_\psi\right)dx_1...dx_m=\\ =2^{j_1}\cdot...\cdot 2^{j_m}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_1}}}\dots\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_m}}}\sum_{k=1}^{m}\|\triangle_{x_k\mathbf{e}_k}f\|_\psi dx_1...dx_m=\\ =\sum_{k=1}^{m}2^{j_k}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2^{j_k}}}\|\triangle_{x_k\mathbf{e}_k}f\|_\psi dx_k.\end{gathered} \tag{3}$$

Из (3) следует (2). Теорема 1 доказана.

Пусть $\{j_k(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ – монотонно возрастающие последовательности натуральных чисел $j_k(\nu)$ при каждом фиксированном k, где $k=1,...,m$. При фиксированном k $(k=1,...,m)$ с помощью последовательности $\{j_k(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ устраиваем разбиение соответствующей k-ой оси равноотстоящими точками:

$$\frac{i_k}{2^{j_k(\nu)}},\ i_k=0,1,...,2^{j_k(\nu)}-1.$$

Для удобства обозначим

$$\overline{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi:=\overline{E}_{2^{j_1(\nu)}\dots 2^{j_m(\nu)}}(f)_\psi,\quad l_{2^{Q_\nu}}:=l_{2^{j_1(\nu)}\dots 2^{j_m(\nu)}},\ \nu\in\mathbb{N}.$$

Далее получим неравенства типа Бернштейна для приращений кусочно–постоянных функций, которые будут использованы при доказательстве обратной теоремы Джексона.

Лемма. *Для любой функции* $l_{2^{Q_\nu}}$ *из* $L_{2^{Q_\nu}}$, $\nu=1,...,n$, $n\in\mathbb{N}$, *при* $h_k\in\left(0,\frac{1}{2^{j_k(n)}}\right]$ *и для* $|t_k|\le h_k$ *выполняются неравенства:*

$$\|\triangle_{t_k\mathbf{e}_k}l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi\le h_k2^{j_k(\nu)+1}\|l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi,\quad k=1,2,...,m. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $l_{2^{Q_\nu}}\in L_{2^{Q_\nu}}$, $\nu=1,...,n$, тогда

$$\begin{aligned}\|l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi&=\sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1}\int_{\frac{i_1}{2^{j_1(\nu)}}}^{\frac{i_1+1}{2^{j_1(\nu)}}}\dots\int_{\frac{i_m}{2^{j_m(\nu)}}}^{\frac{i_m+1}{2^{j_m(\nu)}}}\psi\left(|b_{i_1\dots i_m}|\right)dx_1...dx_m=\\&=\prod_{s=1}^{m}\frac{1}{2^{j_s(\nu)}}\sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1}\psi\left(|b_{i_1\dots i_m}|\right).\end{aligned}\tag{5}$$

Так как $h_k\le\frac{1}{2^{j_k(n)}}$, $k=1,...,m$, то :

$$\|\triangle_{t_k\mathbf{e}_k}l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi=\int_{T^m}\psi\left(|\triangle_{t_k\mathbf{e}_k}l_{2^{Q_\nu}}|\right)dx\le$$
$$\le 2\sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1}\dots\sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1}\psi\left(|b_{i_1\dots i_m}|\right)\mu\left(\Pi_{i_1\dots i_{k-1}\ i_k+t_k2^{j_k}\ i_{k+1}\dots i_m}/\Pi_{i_1\dots i_m}\right),$$

где $\mu(A)$ – m-мерная мера Лебега множества A.

Из определения разбиения (1) получаем

$$\mu(\Pi_{i_1\dots i_m})=\prod_{s=1}^{m}\frac{1}{2^{j_s(\nu)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\mu(\Pi_{i_1\dots i_{k-1}\ i_k+t_k2^{j_k}\ i_{k+1}\dots i_m}/\Pi_{i_1\dots i_m})=\prod_{s=1}^{m}\frac{1}{2^{j_s(\nu)}}-\\&-\left(\frac{1}{2^{j_k(\nu)}}-t_k\right)\prod_{\substack{s=1\\s\ne k}}^{m}\frac{1}{2^{j_s(\nu)}}\le\prod_{s=1}^{m}\frac{1}{2^{j_s(\nu)}}(1-(1-2^{j_k(\nu)}h_k))=\\&=2^{j_k(\nu)}h_k\prod_{s=1}^{m}\frac{1}{2^{j_s(\nu)}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает

$$\|\triangle_{t_k \mathbf{e}_k} l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi \leq 2^{j_k(\nu)+1} h_k \prod_{s=1}^{m} \tfrac{1}{2^{j_s(\nu)}} \sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1} \psi\left(|b_{i_1 \dots i_m}|\right) = \\ = 2^{j_k(\nu)+1} h_k \|l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi,$$

$k = 1, 2, ..., m.$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для* $\forall \psi \in \Omega$ *и* $\forall f \in L_\psi(T^m)$ *при условии, что последовательности натуральных чисел* $\{j_k(\nu)\}_{\nu=1}^{n}$ *– монотонно возрастающие при каждом фиксированном* k*, где* $k = 1, ..., m$ *и* $n \in \mathbb{N}$*, справедливы неравенства:*

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi \leq \frac{1}{2^{j_k(n)-2}} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{j_k(\nu)} \overline{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi, \;\; k = 1, 2, ..., m. \tag{7}$$

Доказательство. Фиксируем n. Так как $(l_{2^{Q_\nu}} - l_{2^{Q_{\nu-1}}})$ – кусочно-постоянная функция, то по лемме для $\nu \leq n$ имеем

$$\omega_k\left(l_{2^{Q_\nu}} - l_{2^{Q_{\nu-1}}}, \frac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi \leq \frac{1}{2^{j_k(n)}} 2^{j_k(\nu)} \|l_{2^{Q_\nu}} - l_{2^{Q_{\nu-1}}}\|_\psi. \tag{8}$$

Для заданной f и произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $l_{2^{Q_\nu}}$, $\nu = 1, ..., n$, удовлетворяющие условиям:

$$\int\limits_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi d\mathbf{t} < \overline{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi + \varepsilon. \tag{9}$$

Тогда, учитывая (8) и (9), получаем

$$\omega_k\left(f, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi = \int\limits_{T^m} \omega_k\left(f_{\mathbf{t}}, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi d\mathbf{t} \leq \int\limits_{T^m} \omega_k\left(f_{\mathbf{t}} - l_{2^{Q_n}}, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi d\mathbf{t} + \\ + \omega_k\left(l_{2^{Q_n}}, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi = \int\limits_{T^m} \omega_k\left(f_{\mathbf{t}} - l_{2^{Q_n}}, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi d\mathbf{t} + \\ + \omega_k\left(l_{2^{Q_0}} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(l_{2^{Q_\nu}} - l_{2^{Q_{\nu-1}}}\right), \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi \leq \int\limits_{T^m} \omega_k\left(f_{\mathbf{t}} - l_{2^{Q_n}}, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi d\mathbf{t} + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} \omega_k\left(l_{2^{Q_\nu}} - l_{2^{Q_{\nu-1}}}, \tfrac{1}{2^{j_k(n)}}\right)_\psi \leq 2 \int\limits_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - l_{2^{Q_n}}\|_\psi d\mathbf{t} + \\ + \tfrac{1}{2^{j_k(n)}} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{j_k(\nu)} \int\limits_{T^m} \|l_{2^{Q_\nu}} - f_{\mathbf{t}} + f_{\mathbf{t}} - l_{2^{Q_{\nu-1}}}\|_\psi d\mathbf{t} < 2\left(\overline{E}_{2^{Q_n}}(f)_\psi + \varepsilon\right) + \\ + \tfrac{1}{2^{j_k(n)}} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{j_k(\nu)} 2\left(\overline{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi + \varepsilon\right) \leq 2\varepsilon + 2\tfrac{1}{2^{j_k(n)}} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{j_k(\nu)} 2\left(\overline{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi + \varepsilon\right) = \\ = \tfrac{1}{2^{j_k(n)-2}} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{j_k(\nu)} \overline{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi + 2\varepsilon\left(1 + \tfrac{1}{2^{j_k(n)-1}} \sum_{\nu=1}^{n} 2^{j_k(\nu)}\right),$$

и ввиду произвольности ε отсюда следует (7).

Теорема 2 доказана.

2. Конструктивная характеристика анизотропных классов Липшица.

Теорема 3. *Для* $\forall\psi\in\Omega$, $\forall f\in L_\psi(T^m)$ *и* $\forall\alpha_k\in(0,1)$, $k=1,...,m$, *имеет место эквивалентность:*

$$f\in\Lambda_\psi^{\alpha_1,...,\alpha_m}\ \Leftrightarrow\ \overline{E}_{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_1}\right]}...2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_m}\right]}}(f)_\psi\le A\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}},\ n\in\mathbb{N},$$

где $\widetilde{\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+...+\frac{1}{\alpha_m}}$ *и* A *– константа, не зависящая от* n.

Доказательство. Положим $j_k(\nu)=\left[\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]$, где $\nu\in\mathbb{N},\ k=1,...,m$.

Необходимость. Пусть $f\in\Lambda_\psi^{\alpha_1,...,\alpha_m}(T^m)$. Тогда, применяя теорему 1, получаем

$$\overline{E}_{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_1}\right]}...2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_m}\right]}}(f)_\psi\le\sum_{k=1}^m\omega_k\left(f,\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\right)_\psi\le C\sum_{k=1}^m\left(\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\right)^{\alpha_k}<$$
$$<C\sum_{k=1}^m\left(\frac{1}{2^{n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}-1}}\right)^{\alpha_k}=C\sum_{k=1}^m2^{\alpha_k}\left(\frac{1}{2^{n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}}}\right)^{\alpha_k}=A\left(\tfrac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}},$$

где A – константа, не зависящая от n.

Достаточность. Пусть для любой функции $f\in L_\psi$ и $\forall\alpha_k\in(0,1)$, $k=1,...,m$, выполняются неравенства

$$\overline{E}_{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_1}\right]}...2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_m}\right]}}(f)_\psi\le A\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}}. \tag{10}$$

При каждом фиксированном k ($k=1,2,...,m$) последовательности $\left\{\left[\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]\right\}_{\nu=1}^n$ монотонно возрастают, поэтому по теореме 2 при $h_k=\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}$ и, учитывая (10), получаем

$$\omega_k\left(f,h_k\right)_\psi=\omega_k\left(f,\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\right)_\psi\le\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]-2}}\sum_{\nu=1}^n2^{\left[\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}\overline{E}_{2^{\left[\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_1}\right]}...2^{\left[\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_m}\right]}}(f)_\psi\le$$
$$\le A\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]-2}}\sum_{\nu=1}^n2^{\left[\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}\left(\tfrac{1}{2^\nu}\right)^{\widetilde{\alpha}}<A\frac{1}{2^{n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}-3}}\sum_{\nu=1}^n2^{\nu\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}}\left(\tfrac{1}{2^\nu}\right)^{\widetilde{\alpha}}=$$
$$=\frac{A_1}{2^{n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}}}\sum_{\nu=1}^n\left(2^{\widetilde{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha_k}-1\right)}\right)^\nu\le\frac{A_2}{2^{n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}}}2^{n\widetilde{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha_k}-1\right)}=A_2\left(\tfrac{1}{2^{n\widetilde{\alpha}}}\right)=$$
$$=A_2\left(\frac{1}{2^{n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}}}\right)^{\alpha_k}\le A_2\left(\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\right)^{\alpha_k},$$

где A_2 – константа, не зависящая от n.

Теперь для произвольного $h_k\in(0,\frac12]$ ($k=1,...,m$) найдем $n\in\mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\ \le\ h_k<\ \frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]-1}}$. Тогда

$$\omega_k\left(f,h_k\right)_\psi\le\omega_k\left(f,\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]-1}}\right)_\psi\le2\omega_k\left(f,\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\right)_\psi\le B\left(\frac{1}{2^{\left[n\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_k}\right]}}\right)^{\alpha_k}\le Bh_k^{\alpha_k},$$

где B – константа, не зависящая от n.

Теорема 3 доказана.

Заключение. В представленной статье для усредненных приближений функций многих переменных доказаны прямая и обратная теоремы Джексона в случае приближения кусочно-постоянными функциями с разбиением на m-мерные параллелепипеды основного тора периода в пространствах L_ψ. Важнейшими представителями пространств L_ψ являются пространства L_p, $0 \leq p \leq 1$. При подходящем разбиении удалось получить конструктивную характеристику анизотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(T^m)$, которая, в случае когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = \alpha$, дает конструктивную характеристику изотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^\alpha(T^m)$.

1. **Стороженко Э. А.** Прямые и обратные теоремы типы Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд // Мат. сб. – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415.
2. **Иванов В. И.** Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ / В. И. Иванов // Мат. заметки. – 1975. – Т. 18, № 5. – С. 641–658.
3. **Пичугов С. А.** О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, № 11. – С. 1524–1533.
4. **Пичугов С. А.** Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, № 11. – С. 351–362.
5. **Крейн С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
6. **Пичугов С. А.** Аппроксимация измеримых периодических функций по мере кусочно–постоянными функциями / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 5. – С. 711–715.
7. **Агошкова Т. А.** Аппроксимация в метрических пространствах периодических функций многих переменных кусочно–постоянными функциями / Т. А. Агошкова // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 10. – С. 1303–1314.