Mathematical Subject Classification: 34B37, 34K10
УДК 517.9

С. М. Чуйко, О. Д. Кичмаренко, А. С. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТИПА "INTERFACE CONDITIONS" С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

Чуйко С. М., Кічмаренко О. Д., Чуйко О. С. Крайові задачі з імпульсним впливом типу "interface conditions" із зосередженим запізненням. Розглядається лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі змінним зосередженим запізненням і імпульсним впливом типу «interface conditions» при відомій крайовій умові. Встановлюються умови існування та єдиності розв'язку відповідної однорідної задачі, будується узагальнений оператор Гріна і формулюються умови розв'язності початкової задачі Коші.
Ключові слова: лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, задача Коші, запізнення, імпульсний вплив.

Чуйко С. М., Кичмаренко О. Д., Чуйко А. С. Краевые задачи с импульсным воздействием типа "interface conditions" с сосредоточенным запаздыванием. Рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменным сосредоточенным запаздыванием и импульсным воздействием типа «interface conditions» при известном краевом условии. Устанавливаются условия существования и единственности решения соответствующей однородной задачи, строится обобщенный оператор Грина и формулируются условия разрешимости исходной задачи Коши.
Ключевые слова: линейное неоднородное дифференциальное уравнение, задача Коши, запаздывание, импульсное воздействие.

Chuiko S. M., Kichmarenko O. D., Chuiko A. S. Boundary value problems with impulsive "interface conditions" action and lumped delay. Linear nonhomogeneous differential equations with variable concentrated delay and impulsive influence of "interface condition" type with known boundary condition is considered.Conditions of existence and uniqueness of corresponding solution of homogeneous problem are established, generalized Green operator is got and solvability conditions of initial Cauchy problem are formulated.
Key words: non-homogeneous linear differential equation, Cauchy problem, delay, impulsive influence.

Введение. Существует группа прикладных задач, в которых на систему действуют не длительные по времени, но существенные по величине силы внешние воздействия, приводящие к почти мгновенному изменению состояния системы. Часто продолжительностью возмущения удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят мгновенный, импульсный характер. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием широко используются в математическом моделировании такого рода динамических систем. Исследованию дифференциальных уравнений с импульсным воздействием посвящено множество публикаций, например: [2, 8–11, 14, 16–19].

В то же время существует множество систем, на текущее состояние которых влияет информация о состоянии системы в некоторый предыдущий момент времени — это так называемые системы с последействием. Математической моделью таких систем является дифференциальное уравнение с запаздыванием, их исследованию посвящены работы [3–7, 13, 20–24].

В данной статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменным сосредоточенным запаздыванием и импульсным воздействием типа «interface conditions» при известном краевом условии, устанавливаются условия существования и единственности решения соответствующей однородной задачи, строится обобщенный оператор Грина и формулируются условия разрешимости неоднородной задачи Коши.

Основные результаты

1. Постановка задачи. Исследована задача о построении решения [1, 2]

$$z(t) \in C^1\Big\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\},\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ p$$

системы дифференциальных уравнений [3–7]

$$dz(t)/dt = A_i(t)z(h_i(t)) + f_i(t), \quad t \neq \tau_i \tag{1}$$

с импульсным воздействием типа «interface conditions» [8–11]

$$\ell_i z(\cdot) = a_i, \quad a_i \in \mathbb{R}^k \tag{2}$$

и краевым условием

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Здесь $A_i(t)-$ $(n\times n)$-мерные матрицы, $f_i(t)-$ вектор-функции и $h_i(t)-$ скалярные функции, непрерывные на отрезках

$$[a;\tau_1],\ [\tau_1;\tau_2],\ \dots,\ [\tau_p;b], \quad a \le h_i(t) \le t \le b,$$

$\ell_i z(\cdot)-$ линейные ограниченные векторные функционалы

$$\ell_i z(\cdot) : C\Big\{[a,\tau_{i+1}\ [\setminus\{\tau_1,\ \dots,\tau_i\}_I\Big\} \to \mathbb{R}^k$$

вида

$$\ell_i z(\cdot) = \sum_{j=0}^{i} \ell_i^{(j)} z(\cdot),\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ p,$$

где

$$\ell_i^{(0)} z(\cdot) : C[a,\tau_1[\to \mathbb{R}^k,\ \dots,\ \ell_i^{(i)} z(\cdot) : C[\tau_i,\tau_{i+1}\ [\ \to \mathbb{R}^k, i = 1,\ \dots,\ p-1,\ \dots,$$

$$\ell_p^{(0)} z(\cdot) : C\ [a,\tau_1\ [\to \mathbb{R}^k,\ \dots,\ \ell_p^{(p)} z(\cdot) : C[\tau_p,b] \to \mathbb{R}^k$$

— линейные функционалы. Рассмотрим однородную часть

$$dz_0(t)/dt = A_i(t)z_0(h_i(t)), \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \ i = 0, \ 1, \ \dots, \ p, \quad \tau_0 := a, \quad \tau_{p+1} := b \quad (4)$$

системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (1). Общее решение

$$z_0(t,c) = X_0(t)c, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

системы (4) определяет нормальная ($X_0(a) = I_n$) фундаментальная матрица $X_0(t)$. Существенной особенностью системы дифференциальных уравнений с переключениями и сосредоточенным запаздыванием (4) является тот факт, что фундаментальная матрица $X_0(t)$, вообще говоря, является вырожденной [11]; это обстоятельство не позволяет построение нормальной фундаментальной матрицы $X_0(t)$, непрерывной на всем отрезке $[a,b]$; для определенности положим $X_0(\tau_i + 0) := I_n$.

Пример 1. *Нормальная ($X_0(\tau_i + 0) = I_2$) фундаментальная матрица*

$$X_0(t) \in C^1\Big\{[0,2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad i = 0, \ 1, \ 2, \quad \tau_0 := 0, \quad \tau_1 := \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 := \frac{3\pi}{2}$$

системы с переключениями

$$\left\{ \begin{array}{lll} dz(t)/dt = A_0(t) \cdot z(h_1(t)), & h_0(t) := t, & t \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ dz(t)/dt = A_1(t) \cdot z(h_2(t)), & h_1(t) := \frac{\pi}{2}, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ dz(t)/dt = A_2(t) \cdot z(h_3(t)), & h_2(t) := t, & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi] \end{array} \right. \quad (5)$$

имеет вид

$$X_0(t) = \left\{ \begin{array}{cl} X_2(t), & t \in [0; \frac{\pi}{2}]; \\ (t + 1 - \frac{\pi}{2}) \cdot J_2, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]; \\ J_2 \cdot X_2(t), & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi], \end{array} \right.$$

где

$$X_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad A_0(t) = A_2(t) = J_2, \quad A_1(t) = I_2, \quad J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение нормальной ($X_0(a) = I_n$) фундаментальной матрицы $X_0(t)$, непрерывной на всем отрезке $[a,b]$, возможно [11] при дополнительных требованиях на правую часть системы (4).

Пример 2. *Нормальная ($X_0(0) = I_2$) фундаментальная матрица*

$$X_0(t) \in C^1\Big\{[0,2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad X_0(t) \in C[0,2\pi], \quad i = 0, \ 1, \ 2$$

системы с переключениями (5) имеет вид

$$X_0(t) = \left\{ \begin{array}{cl} X_2(t), & t \in [0; \frac{\pi}{2}]; \\ (t + 1 - \frac{\pi}{2}) \cdot J_2, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]; \\ -(1 + \pi) \cdot X_2(t), & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]. \end{array} \right.$$

Фундаментальную матрицу системы (4) с импульсным воздействием

$$\ell_i z(\cdot) = 0 \tag{6}$$

ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)Y_0, & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)Y_1, & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_0(t)Y_p, & t \in [\tau_p; b], \end{cases}$$

где $Y_0,\ \ldots, Y_p-$ неизвестные постоянные $(n \times n)$-матрицы. Для нахождения матрицы Y_1 приходим к уравнению

$$Q_1 Y_1 = \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) Y_0, \quad Q_1 := -\ell_1^{(1)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_1^*} \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) Y_0 = 0;$$

в этом случае существует по меньшей мере одна фундаментальная матрица вида

$$X(t) = X_0(t) Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot) Y_0, \quad t \in [\tau_1, \tau_2[.$$

Для нахождения матрицы Y_2 приходим к уравнению

$$Q_2 Y_2 = \ell_2^{(0)} X_0(\cdot) + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) Y_1, \quad Q_2 := -\ell_2^{(2)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_2^*} \Big\{ \ell_2^{(0)} X_0(\cdot) + \ell_2^{(1)} X(\cdot) Y_1 \Big\} = 0;$$

в этом случае существует по меньшей мере одна фундаментальная матрица вида

$$X(t) = X_0(t) Q_2^+ \Big\{ \ell_2^{(0)} X(\cdot) + \ell_2^{(1)} X(\cdot) Y_1 \Big\}, \quad t \in [\tau_2, \tau_3[.$$

Продолжая рассуждения, для нахождения матрицы Y_p приходим к уравнению

$$Q_p Y_p = \sum_{j=0}^{p-1} \ell_p^{(j)} X(\cdot) Y_j, \quad Q_p := -\ell_p^{(p)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_p^*} \sum_{j=0}^{p-1} \ell_p^{(j)} X_0(\cdot) Y_j = 0;$$

в этом случае существует по меньшей мере одна фундаментальная матрица вида

$$X(t) = X_0(t) Q_p^+ \sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)} X(\cdot) Y_j, \quad t \in [\tau_p; b].$$

Предположим, что $Y_0 := I_n$; если при этом выполнены условия

$$P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot) = 0,\ P_{Q_2^*}\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot) + \ell_2^{(1)}X(\cdot)Y_1\right\} = 0,\ \dots, P_{Q_p^*}\sum_{j=0}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)Y_j = 0, \tag{7}$$

то существует по меньшей мере одно решение однородной задачи (4), (6), представимое нормальной ($X(a) = I_n$) фундаментальной матрицей $X(t)$. Если по меньшей мере одно из условий (7) не выполнено, то $Y_0 := 0$, при этом существует единственное решение однородной системы с импульсным воздействием (4), (6) является тривиальным. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *При условиях (7) существует по меньшей мере одно решение однородной системы с импульсным воздействием (4), (6) вида*

$$z_0(t, c) = X(t)c, \quad c_r \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & Y_0 = I_n, & t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)Y_1, & Y_1 = Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ X_0(t)Y_2, & Y_2 = Q_2^+\left\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot) + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)Y_1\right\}, & t \in [\tau_2; \tau_3[, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ X_0(t)Y_p, & Y_p = Q_p^+\sum\limits_{j=1}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)Y_j, & t \in [\tau_p; b] \end{cases}$$

нормальная ($X(a) = I_n$) матрица задачи (4), (6). Если по меньшей мере одно из условий (7) не выполнено, то единственное решение однородной задачи с импульсным воздействием (4), (6) является тривиальным.

Пример 3. *Нормальная ($X(0) = I_2$) фундаментальная матрица*

$$X(t) \in C^1\left\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}, \quad i = 0,\ 1,\ 2, \quad \tau_1 := \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 := \frac{3\pi}{2}$$

краевой задачи с импульсным воздействием

$$z\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - z\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) = 0, \quad z(+0) - z(2\pi - 0) = 0$$

для системы с переключениями (5) имеет вид

$$X(t) = \begin{cases} X_2(t), & t \in [0; \frac{\pi}{2}[; \\ 0, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[; \\ X_2(t), & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]. \end{cases}$$

Для построения нормальной ($X(0) = I_2$) фундаментальной матрицы поставленной задачи используем матрицу $X_0(t)$, найденную ранее в примере 2. Матрицы $Q_1 = \pi J_2$ и $Q_2 = -J_2$ невырождены, следовательно $P_{Q_1^*} = P_{Q_2^*} = 0$, при этом условие (7) выполнено. Поскольку $\ell_1^{(0)} z(\cdot) \equiv 0$, постольку $X(t) \equiv 0$ при $t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$. Аналогично $X(t) = X_2(t)$ при $t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$.

Пример 4. *Краевая задача с импульсным воздействием*

$$z\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - z(+0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - z\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) = 0$$

для системы с переключениями (5) не имеет решений

$$z(t) \in C^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad i = 0,\ 1,\ 2, \quad \tau_0 := 0, \quad \tau_1 := \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 := \frac{3\pi}{2},$$

отличных от тривиального.

2. Обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы с запаздывающим аргументом и импульсным воздействием типа «interface conditions». Предположим условия доказанной леммы выполненными. В силу непрерывности на промежутке $[a, \tau_1[$ решение системы (1), (2) имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c + \mathcal{I}(t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

где $X(t) = X_0(t), \quad \mathcal{I}(t)-$ некоторое частное решение системы (1), (2). Решение системы (1), (2) на промежутке $[\tau_1, \tau_2[$ ищем в виде

$$z(t, \gamma_1) = X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{I}(t),\ \gamma_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Для нахождения неизвестной γ_1 получаем уравнение

$$Q_1\gamma_1 = \ell_1^{(0)}\ X_0(\cdot)c + \ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\ ,$$

для разрешимости которого необходимо и достаточно, чтобы

$$P_{Q_1^*}\Big\{\ \ell_1^{(0)}\ X_0(\cdot)c + \ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\Big\} = 0.$$

С учетом первого из равенств (7) последнее условие упрощается

$$P_{Q_1^*}\Big\{\ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\Big\} = 0. \tag{8}$$

При условии (8) находим

$$\gamma_1 = Y_1 c + \bar{\gamma}_1, \quad \bar{\gamma}_1 = Q_1^+\Big\{\ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\ \Big\}.$$

Таким образом, при условии (7) и (8) решение системы (1), (2) на промежутке $[\tau_1, \tau_2[$ имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c + K\Big[f_1(s); a_1\Big](t),$$

где

$$K\Big[f_1(s); a_1\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_1 + \mathcal{I}(t), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2[$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы с импульсным воздействием (1), (2). Решение системы (1), (2) на промежутке $[\tau_2, \tau_3[$ ищем в виде

$$z(t, \gamma_1) = X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{I}(t),\ \ \gamma_1 \in \mathbb{R}^n.$$

При условии (7) для нахождения неизвестной γ_2 получаем уравнение

$$Q_2\gamma_2 = \ell_2^{(0)}\ X_0(\cdot)c + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)Y_1 c + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\gamma_1 + \ell_2\mathcal{I}(\cdot) - a_2,$$

для разрешимости которого, с учетом равенств (7), необходимо и достаточно, чтобы

$$P_{Q_2^*}\left\{\ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\gamma_1 + \ell_2\mathcal{I}(\cdot) - a_2\right\} = 0. \tag{9}$$

При условии (9) находим

$$\gamma_2 = Y_2 c + \bar{\gamma}_2, \quad \bar{\gamma}_2 = Q_2^+\left\{\ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\gamma_1 + \ell_2\mathcal{I}(\cdot) - a_2\right\}.$$

Таким образом, при условиях (7), (8) и (9) решение $T-$ периодической задачи (1), (2) на промежутке $[\tau_2, \tau_3[$ имеет вид

$$z(t, c_r) = X(t)c + K\left[f_2(s); a_2\right](t),$$

где

$$K\left[f_2(s); a_2\right](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_2 + \mathcal{I}(t), \quad \tau \in [\tau_2, \tau_3[$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы с импульсным воздействием (1), (2). Продолжая рассуждения, решение системы (1), (2) на отрезке $[\tau_p, b]$ ищем в виде

$$z(t, \gamma_p) = X_0(t)\gamma_p + \mathcal{I}(t), \quad \gamma_p \in \mathbb{R}^n.$$

При условиях (7), (8), (9), ... для нахождения неизвестной γ_p получаем уравнение

$$Q_p\gamma_p = \left\{\ \sum_{j=0}^{p-1} \ell_p^{(j)}\ X_0(\cdot)Y_j\ \right\}c + \sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)}\ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p\mathcal{I}(\cdot) - a_p,$$

для разрешимости которого, с учетом равенств (7), необходимо и достаточно, чтобы

$$P_{Q_p^*}\left\{\sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)}\ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p\mathcal{I}(\cdot) - a_p\right\} = 0. \tag{10}$$

При условии (10) находим

$$\gamma_p = Y_p c + \bar{\gamma}_p, \quad \bar{\gamma}_p = Q_p^+\left\{\ \sum_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)}\ X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p\mathcal{I}(\cdot) - a_p\ \right\}.$$

Таким образом, при условии (7), (8), (9), ... , (10) решение системы (1), (2) на промежутке $[\tau_p, b]$ имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f_p(s); a_p\Big](t),$$

где

$$K\Big[f_p(s); a_p\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_p + \mathcal{I}(t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы с импульсным воздействием (1), (2). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим выполненными требования леммы. При условиях (7), (8), (9), ... , (10) существует по меньшей мере одно решение системы (1), (2) с импульсным воздействием типа «interface conditions» и запаздыванием вида*

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f_i(s); a_i\Big](t),$$

где

$$K\Big[f_i(s); a_i\Big](t) = \begin{cases} \mathcal{I}(t), & t \in [a, \tau_1[, \\ X_0(t)Q_1^+\big\{\ell_1\mathcal{I}(\cdot) - a_1\big\} + \mathcal{I}(t), & t \in [\tau_1, \tau_2[, \\ X_0(t)Q_2^+\big\{\ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\gamma_1 + \ell_2\mathcal{I}(\cdot) - a_2\big\} + \mathcal{I}(t), & t \in [\tau_2, \tau_3[, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , & \cdots\cdots \\ X_0(t)Q_p^+\Big\{\sum\limits_{j=1}^{p-1}\ell_p^{(j)}X_0(\cdot)\bar{\gamma}_j + \ell_p\mathcal{I}(\cdot) - a_p\Big\} + \mathcal{I}(t), & t \in [\tau_p, b] \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы с импульсным воздействием (1), (2).

Если по меньшей мере одно из условий (7) не выполнено, то единственному тривиальному решению однородной задачи с импульсным воздействием (4), (6) соответствует по меньшей мере одно решение

$$z(t,c) = K\Big[f_i(s); a_i\Big](t)$$

неоднородной импульсной системы (1), (2) с запаздывающим аргументом.

Пример 5. *Исследуем задачу о построении решений*

$$z(t) \in C^1\Big\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \; i = 1, \; 2$$

системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{cases} dz(t)/dt = J_2 \cdot z(h_1(t)) + f(t), & h_0(t) := t, & t \in [0; \frac{\pi}{2}[, \\ dz(t)/dt = I_2 \cdot z(h_2(t)) + f(t), & h_1(t) := \frac{\pi}{2}, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[, \\ dz(t)/dt = J_2 \cdot z(h_3(t)) + f(t), & h_2(t) := t, & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi] \\ z(\tau_1 + 0) - z(\tau_2 - 0) = 0, & z(0) - z(2\pi) = 0; & \end{cases} \tag{11}$$

здесь

$$f(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \tau_1 := \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 := \frac{3\pi}{2}.$$

Однородная часть задачи (11) совпадает с задачей о построении решений системы (5) с импульсным воздействием (11), поэтому используем ранее найденные матрицы

$$X_0(t) = \begin{cases} X_2(t), & t \in [0; \frac{\pi}{2}]; \\ (t + 1 - \frac{\pi}{2}) \cdot J_2, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]; \\ -(1+\pi) \cdot X_2(t), & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]; \end{cases} \qquad X(t) = \begin{cases} X_2(t), & t \in [0; \frac{\pi}{2}[; \\ 0, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[; \\ X_2(t), & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi] \end{cases}$$

и функцию

$$\mathcal{I}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + \sin 2t \end{pmatrix}, & t \in [0; \frac{\pi}{2}[; \\ \begin{pmatrix} -\cos^2 t \\ \sin t \ \cos t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[; \\ \begin{pmatrix} -\cos 2t + \sin t \\ \cos t + \sin 2t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]. \end{cases}$$

Поскольку матрицы $Q_1 = \pi J_2$ и $Q_2 = -J_2$ невырождены, постольку $P_{Q_1^*} = P_{Q_2^*} = 0$, при этом условия (8) и (9) выполнены, следовательно поставленная задача для системы (11) разрешима. В силу непрерывности на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}[$ решение системы (11) имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{I}(t), \quad c \in \mathbb{R}^2.$$

Решение системы (11) на промежутке $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s)\Big](t), \quad K\Big[f_1(s)\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_1 + \mathcal{I}(t) \equiv \mathcal{I}(t),$$

поскольку

$$\bar{\gamma}_1 = Q_1^+ \ell_1 \mathcal{I}(\cdot) = Q_1^{-1}\left[\mathcal{I}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \mathcal{I}\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right)\right] = 0.$$

Решение системы (11) на промежутке $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s)\Big](t), \quad K\Big[f(s)\Big](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_2 + \mathcal{I}(t),$$

где

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{1}{1+\pi}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы (11) имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + K\Big[f(s)\Big](t),$$

где

$$K\Big[f(s)\Big](t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + \sin 2t \end{pmatrix}, & t \in [0; \frac{\pi}{2}[; \\ \begin{pmatrix} -\cos^2 t \\ \sin t \ \cos t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[; \\ \begin{pmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + \sin 2t \end{pmatrix}, & t \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi] \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши импульсной системы с сосредоточенным запаздыванием (11).

3. Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи для системы с запаздывающим аргументом. Рассмотрим далее задачу о построении решения

$$z(t) \in C^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \ i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p$$

импульсной краевой задачи для системы с запаздывающим аргументом (1), (2), (3). Здесь

$$\ell z(\cdot): \ C^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\} \to R^m$$

— линейный ограниченный функционал. Предположим выполненными условия доказанной теоремы 1. Доказательство следующей теоремы аналогично [11].

Теорема 2. *В критическом случае* ($P_{Q*} \neq 0$) *импульсная краевая задача для системы с запаздывающим аргументом (1), (2), (3) разрешима тогда и только тогда, когда*

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f_i(s); a_i\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{12}$$

При условии (12) критическая ($P_{Q*} \neq 0$) *импульсная краевая задача (1), (2), (3) имеет* $r-$ *параметрическое семейство решений*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f_i(s); a_i\Big](t);$$

здесь

$$G\Big[f_i(s); a_i\Big](t) = X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f_i(s); a_i\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f_i(s); a_i\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы с импульсным воздействием типа «interface conditions» (1), (2), (3).

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, rank $Q = n_1, \ n - n_1 = r, \ P_{Q^*}$ — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной системы с импульсным воздействием (4), (6); $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$ — $(n \times r)$-мерная фундаментальная матрица однородной импульсной краевой задачи с запаздывающим аргументом

$$dz(t)/dt = A_i(t)z(h_i(t)), \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0, \quad \ell z(\cdot) = 0.$$

P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно-независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $P_{Q_d^*}$ — $(d\times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из $d = m - n_1$ линейно-независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*} [1], Q^+ — псевдообратная матрица по Муру—Пенроузу.

Пример 6. *Требованиям теоремы 2 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений*

$$z(t) \in C^1\left\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\right\},\ i = 1,\ 2$$

импульсной системы с запаздывающим аргументом (11).

Действительно, $Q = 0$, следовательно $P_{Q^*} = I_2 \neq 0$, при этом условие (12) выполнено, поскольку

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \ell K\left[f_i(s); a_i\right](\cdot)\right\} = \ell K\left[f(s)\right](\cdot) = K\left[f(s)\right](0) - K\left[f(s)\right](2\pi) = 0.$$

Искомое 2π-периодическое решение системы (11) имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c + K\left[f(s)\right](t);$$

обобщенный оператор Грина задачи Коши импульсной системы с сосредоточенным запаздыванием (11) и нормальная $(X(0) = I_2)$ фундаментальная матрица $X(t)$ ранее найдены в примере 5.

Теорема 3. *В некритическом случае ($P_{Q*} = 0$) импульсная краевая задача для системы с запаздывающим аргументом (1), (2), (3) для любых неоднородностей $f_i(t), a_i$ и α имеет по меньшей мере одно решение вида*

$$z(t) = G\left[f_i(s); a_i\right](t).$$

Пример 7. *Требованиям теоремы 3 удовлетворяет задача о построении решений*

$$z(t) \in C^1\left\{[0, 2\pi] \setminus \{\tau_i\}_I\right\},\ i = 1,\ 2$$

импульсной системы с запаздывающим аргументом (11), подчиненных антипериодическому краевому условию $z(0) + z(2\pi) = 0$.

Действительно, $Q = 2I_2 \neq 0$, следовательно $P_{Q^*} = 0$, при этом имеет место некритический случай. Решение импульсной системы с запаздывающим аргументом (11), подчиненное условию $z(0) - z(2\pi) = 0$, имеет вид

$$z(t) = G\left[f_i(s); a_i\right](t) = K\left[f(s)\right](t);$$

причем обобщенный оператор Грина антипериодической краевой задачи для импульсной системы с сосредоточенным запаздыванием (11) совпадает с ранее найденным в примере 5.

Заключение. Утверждения доказанной леммы и теорем 1–3 обобщают соответствующие результаты из [1,2,8,9,14] на случай дифференциальных систем с запаздывающим аргументом, а также соответствующие результаты из [3–7, 15] на случай дифференциальных систем с импульсным воздействием.

1. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. **Мышкис А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. – М.: Гостехиздат, 1951. – 256 с.
4. **Азбелев Н. В.** Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Н. В. Азбелев, Л. Ф. Рахматуллина // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 9. – С. 1542–1552.
5. **Митропольский Ю. А.** Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969. – 309 с.
6. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир., 1984. – 424 с.
7. **Беллман Р.** Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. – М.: Мир., 1967. – 548 с.
8. **Чуйко С. М.** Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием / С. М. Чуйко // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, №8. – С. 1132–1135.
9. **Чуйко С. М.** Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием / С. М. Чуйко // Доклады Академии наук. 2001. – Т. 379. – № 2, июль. – С. 170–172.
10. **Бойчук А. А.** Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием / А. А. Бойчук, Е. В. Чуйко, С. М. Чуйко // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 5. – С. 588–594.
11. **Бойчук А. А.** Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями / А. А. Бойчук, С. М. Чуйко // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 51–65.
12. **Лабовский С. М.** О свойствах фундаментальных систем решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием / С. М. Лабовский // Труды Тамбовского ин-та хим. машиностроения. – 1971. – Т. 6. – С. 49–52.
13. **Chuiko S. M.** On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case / S. M. Chuiko, A. S. Chuiko // Nonlinear Oscillations (N.Y.) – 2012. – V. 14, № 3. – C. 445–460.
14. **Чуйко С. М.** Нетерові крайові задачі з імпульсним впливом / С. М. Чуйко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Кібернетика. – 2011. – № 11. – С. 58–62.
15. **Чуйко С.М.** Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае / С. М. Чуйко, И. А. Бойчук // Нелинейные колебания. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 115–132.
16. **Мильман В. Д.** Случайные толчки в линейных динамических системах / В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. — К.: Изд-во АН УССР, 1963. — С. 64–81.
17. **Мышкис А. Д.** Системы с толчками в заданные моменты времени / А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко // Матем. сб. — 1967. — Т. 74, № 2. — С. 202–208.

18. **Bainov D. D.** Systems with impulse effect: stability, theory and applications / D. D. Bainov, P. S. Simeonov. – New York: Halsted Press, 1989.
19. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
20. **Kichmarenko O.** Quazidifferential equations with delay / O. D. Kichmarenko // Applications of Mathematics in Engineering and Economics 26. – Sofia: Heron Press, 2001. – P. 100–105.
21. **Плотников В. А.** Асимптотическое исследование управляемых систем с запаздыванием с медленными и быстрыми переменными / В. А. Плотников, В. П. Желтиков, О. Д. Кичмаренко // Труды Одесского политехнического университета. – 2004. – Вып. 2 (22). – С. 214–217.
22. **Плотников В. А.** Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2007. – Т. 12, вип. 7. – С. 130–139.
23. **Kichmarenko O. D.** Averaging of fuzzy differential equations with delay / O. D. Kichmarenko, N. V. Skripnik // Nonlinear Oscillations. – 2008. – Vol. 11, No. 3. – P. 316–328.
24. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием / О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева // Науковий вiсник Ужгородського унiверситету. Серiя: Математика i iнформатика. – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 76–86.