УДК 517.925

В. М. Евтухов, А. М. Клопот
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

При изучении нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений одними из важнейших являются вопросы о наличии у них правильных и сингулярных первого и второго рода решений, в частности, так называемых, «взрывных решений» (по терминологии И. Т. Кигурадзе). В настоящей работе для дифференциального уравнения $y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})$, где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m})$ — непрерывные функции, $\varphi_{kj} : \triangle Y_j \longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m};\ j = \overline{0,n-1})$ — непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\triangle Y_j$ — односторонняя окрестность Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$, устанавливаются условия существования сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–решений, которые содержатся в классе сингулярных решений первого и второго рода, а также асимптотических представлений для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.
MSC: 34E99.
Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, нелинейные дифференциальные уравнения, правильные и сингулярные решения, сингулярные $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решения, асимптотические представления решений.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \qquad (1)$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m})$ — непрерывные функции, $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m};\ j = \overline{0,n-1})$ — непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функции порядков σ_{kj}, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$[1], $\triangle Y_j$ — односторонняя окрестность Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$. При этом, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\begin{array}{llll} \Delta_{Y_j} = [b_j, Y_j[, & \text{если} & \Delta_{Y_j} - \text{левая окрестность} & Y_j, \\ \Delta_{Y_j} =]Y_j, b_j], & \text{если} & \Delta_{Y_j} - \text{правая окрестность} & Y_j \end{array} \quad (j = \overline{0,n-1}),$$

где $b_j \in \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0,n-1})$ и выбраны так, чтобы соблюдались неравенства

$$|b_j| < 1 \quad \text{при} \quad Y_j = 0, \quad b_j > 1 \ (b_j < -1) \quad \text{при} \quad Y_j = +\infty \ (Y_j = -\infty).$$

Непрерывная функция $\varphi : \Delta_Y \longrightarrow]0,+\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_Y — односторонняя окрестность Y, называется правильно меняющейся при $y \to Y$, если существует число $\sigma \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta Y}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^{\sigma} \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

[1]Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$, и $\omega - 1 < a < \omega$ при $\omega < +\infty$.

Получена 12.01.2016

При этом число σ называют порядком правильно меняющейся функции.

Правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция порядка ноль называется медленно меняющейся функцией. Если $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывная медленно меняющаяся функция при $y \to Y$, то

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Из этих определений ясно, что правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция φ порядка σ представима в виде

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y),$$

где L — медленно меняющаяся функция при $y \to Y$.

Основные свойства правильно и медленно меняющихся функций изложены в монографии Е. Сенета [2]. Примерами медленно меняющихся при $y \longrightarrow Y$ функций являются $|\ln|y||^{\gamma_1}$, $\ln^{\gamma_2}|\ln|y||$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\exp(|\ln|y||^{\gamma_3}), 0 < \gamma_3 < 1$, $\exp(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||})$, функции, имеющий отличный от нуля конечный предел при $y \longrightarrow Y$ и др.

Будем также говорить, что медленно меняющаяся при $y \longrightarrow Y$ функция $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_Y — односторонняя окрестность Y, удовлетворяет условию S_0, если

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где $\nu = \operatorname{sign} y$.

Из указанных выше примеров медленно меняющихся функций первые две, а также имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y$ удовлетворяют условию S_0, а третья и четвертая этому условию не удовлетворяют.

Определение 1. *Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, Y_1 \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–решением, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

По своим асимптотическим свойствам множество всех $P_\omega(Y_0, Y_1 \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–решений распадается на $n+2$ непересекающихся пордмножеств, соответствующих следующим значениям λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}; \quad \lambda_0 = \pm\infty;$$

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \ (i = 1, \dots, n-1).$$

В работах [3–7] для каждого из указанных значений λ_0 получены условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1 \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–решений, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ этих решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

Приведем два из установленных здесь результатов, относящихся к случаю, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$.

Для их формулировки потребуются следующие вспомогательные обозначения

$$\nu_j = \operatorname{sign} b_j \ (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$a_{0i} = (n-i)\lambda_0 - (n-i-1) \ (i = 1, \dots, n) \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R},$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj}, \quad \mu_{kn} = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_{kj}(n-j-1), \quad C_k = \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{(\lambda_0 - 1)^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}} \right|^{\sigma_{kj}} \qquad (k = \overline{1, m}),$$

$$J_{kn}(t) = \int_{A_{kn}}^{t} p_k(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\mu_{kn}} \, d\tau, \quad A_{kn} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega p_k(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{kn}} \, dt = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega p_k(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_{kn}} \, dt < +\infty \end{cases}$$

Теорема A. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ *и для некоторого* $s \in \{1, \dots, m\}$ *справедливо неравенство* $\gamma_s \neq 0$ *и при всех* $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$ *выполняются неравенства*

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{|\ln |\pi_\omega(t)||} < \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1}. \tag{2}$$

Тогда для существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*–решений необходимо, а если алгебраическое относительно* ρ *уравнение*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{sj} \prod_{k=j+1}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j} (a_{0k} + \rho) = (1+\rho) \prod_{k=1}^{n-1} (a_{0k} + \rho) \tag{3}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$\nu_j \nu_{j+1} > 0 \ \textit{при} \ Y_j = \pm\infty, \ \nu_j \nu_{j+1} < 0 \ \textit{при} \ Y_j = 0 \ (j = \overline{0, n-2}). \tag{4}$$

$$\alpha_s \nu_{n-1} > 0 \ \textit{при} \ Y_{n-1} = \pm\infty, \ \alpha_s \nu_{n-1} < 0 \ \textit{при} \ Y_{n-1} = 0, \tag{5}$$

выполнялись при $t \in]a, \omega[$ *неравенства*

$$\nu_j \nu_{j+1} a_{0j+1} (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0 \ (j = \overline{0, n-2}), \tag{6}$$

$$\alpha_s \nu_{n-1} (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0, \quad \alpha_s \nu_{n-1} \gamma_s J_{sn}(t) > 0 \tag{7}$$

и условие

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)}=\frac{\gamma_s}{\lambda_0-1}. \tag{8}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$y^{(j)}(t)=\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\,y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j=\overline{0,n-2}), \tag{9}$$

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_s}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}L_{sj}\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}y^{(n-1)}(t)\right)}=\alpha_s\nu_{n-1}\gamma_sC_sJ_{sn}(t)[1+o(1)], \tag{10}$$

где $L_{sj}\left(y^{(j)}\right)=|y^{(j)}|^{-\sigma_{sj}}\varphi_{sj}\left(y^{(j)}\right)$ $(j=\overline{0,n-1})$, причем существует l-параметрическое семейство решений с такими представлениями в случае, когда среди корней алгебраического уравнения (3) *имеется l корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\beta(\lambda_0-1)$.*

Теорема Б. *Пусть $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\left\{0,\frac{1}{2},\dots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ и для некоторого $s\in\{1,\dots,m\}$ соблюдается неравенство $\gamma_s\neq 0$ и условия* (2). *Пусть, кроме того, функции L_{sj} $(j=\overline{0,n-1})$ удовлетворяют условию S_0. Тогда каждое $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решение дифференциального уравнения* (1) *допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t)=\frac{\nu_{n-1}[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\times \tag{11}$$

$$\times\left|\gamma_sC_sJ_{sn}(t)\prod_{i=0}^{n-1}L_{si}\left(\nu_i|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0i+1}}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_s}}[1+o(1)]\ (j=\overline{0,n-1}).$$

Замечание 1. *Алгебраическое уравнение* (3) *заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если соблюдается неравенство*

$$\sum_{j=0}^{n-2}|\sigma_{sj}|<|\sigma_{sn-1}-1|.$$

При выполнении этого неравенства и неравенств $\gamma_s\neq 0$ и (2) условия (4)–(8) теоремы А являются необходимыми и достаточными для существования $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решений у дифференциального уравнения (1).

Замечание 2. *В случае одного слагаемого (s-го слагаемого) в правой части уравнения (1) утверждения теорем А и Б остаются в силе без предположения о выполнении неравенств (2).*

Выберем теперь произвольным образом точку $t_* \in]a, \omega[$. Эта точка не является сингулярной для уравнения (1), поскольку $p_k(t_*) = \mathrm{const} > 0$ $(k = 1, \ldots, m)$. Однако в этой точке уравнение (1) может иметь сингулярные решения.

Определение 2. *Решение y уравнения (1) называется сингулярным $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–решением, где $t_* \in]a, \omega[$ и $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, t_*[\in [a, t_*[$ и удовлетворяет следующим условиям:*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_*[, \quad \lim_{t \uparrow t_*} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\lim_{t \uparrow t_*} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

Целью настоящей работы является установление условий существования у дифференциального уравнения (1) сингулярных $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений в случае, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, а также асимптотических представлений для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $t_* \in]a, \omega[$, $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ и для некоторого $s \in \{1, \ldots, m\}$ справедливы неравенство $\gamma_s \neq 0$ и неравенства*

$$\beta(\lambda_0 - 1) \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1} > 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}. \tag{12}$$

Тогда для существования у уравнения (1) *сингулярных $P_{t_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решений необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение* (3) *не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы наряду с* (4) *и* (5) *выполнялись условие*

$$(\mu_{sn} + 1)(\lambda_0 - 1) = \gamma_s \tag{13}$$

и неравенства

$$\nu_j \nu_{j+1} a_{0j+1}(\lambda_0 - 1) < 0 \ (j = \overline{0, n-2}), \quad \alpha_s \nu_{n-1}(\lambda_0 - 1) < 0. \tag{14}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow t_*$ асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)(t - t_*)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-2}), \tag{15}$$

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_s}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{sj}\left(\frac{[(\lambda_0-1)(t-t_*)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)\right)} = -\alpha_s \nu_{n-1}(\lambda_0 - 1) C_s p(t_*)(t_* - t)^{\mu_{sn}+1}[1 + o(1)], \tag{16}$$

где $L_{sj}\left(y^{(j)}\right) = |y^{(j)}|^{-\sigma_{sj}}\varphi_{sj}\left(y^{(j)}\right)$ $(j=\overline{0,n-1})$, *причем существует* l*-параметрическое семейство решений с такими представлениями в случае, когда среди корней алгебраического уравнения* (3) *имеется* l *корней, действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа* $(1-\lambda_0)$.

Теорема 2. *Пусть* $t_* \in]a,\omega[$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ *и для некоторого* $s\in\{1,\ldots,m\}$ *соблюдаются неравенство* $\gamma_s\neq 0$ *и неравенства* (12). *Пусть, кроме того, функции* L_{sj} $(j=\overline{0,n-1})$ *удовлетворяют условию* S_0. *Тогда каждое сингулярное* $P_{t_*}(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$*-решение дифференциального уравнения* (1) *допускает при* $t\uparrow t_*$ *асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t)=\frac{\nu_{n-1}[(\lambda_0-1)(t-t_*)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\times \tag{17}$$

$$\times\left|(\lambda_0-1)C_s p_(t_*)(t_*-t)^{\mu_{sn}+1}\prod_{i=0}^{n-1}L_{si}\left(\nu_i(t_*-t)^{\frac{a_{0i+1}}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_s}}[1+o(1)].$$

Доказательство теорем 1 и 2. Поскольку в дифференциальном уравнении (1) $\omega\leqslant+\infty$, то теоремы А и Б охватывают и случай, когда $\omega=\mathrm{const}$. При этом конечная точка ω может и не быть сингулярной для уравнения (1). Поэтому результаты о наличии и асимптотике сингулярных $P_{t_*}(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$–решений уравнения (1) могут быть получены из теорем А и Б с заменой в них ω на t_* и учетом того, что

$$\lim_{t\uparrow t_*}p_k(t)=p_k(t_*)=\mathrm{const}>0\quad(k=1,\ldots,m). \tag{18}$$

При замене ω на t_* и в силу (18) имеем

$$\pi_\omega(t)=t-t_*,\quad t-t_*<0\quad\text{при}\quad t\in]a,t_*[, \tag{19}$$

$$J_{sn}(t)=\int\limits_{A_{sn}}^{t}p_s(\tau)(t_*-\tau)^{\mu_{sn}}\,d\tau\sim\begin{cases}-\dfrac{p_s(t_*)(t_*-t)^{\mu_{sn}+1}}{\mu_{sn}+1}, & \mu_{sn}\neq-1,\\ -p_s(t_*)\ln(t_*-t), & \mu_{sn}=-1,\end{cases}\quad\text{при } t\uparrow t_*. \tag{20}$$

Учитывая (20), находим, что

$$\lim_{t\uparrow t_*}\frac{(t-t_*)J'_{sn}(t)}{J_{sn}(t)}=\lim_{t\uparrow t_*}\frac{p(t)(t_*-t)(t_*-t)^{\mu_{sn}}}{J_{sn}(t)}=\begin{cases}\mu_{sn}+1, & \text{если}\quad \mu_{sn}\neq-1,\\ 0, & \text{если}\quad \mu_{sn}=-1.\end{cases}$$

Отсюда ввиду неравенств $\gamma_s\neq0$ и $\lambda_0\neq1$ ясно, что условие (8) теоремы А выполняется лишь в случае, когда $\mu_{sn}\neq-1$ и $\mu_{sn}+1=\frac{\gamma_s}{\lambda_0-1}$, т. е. когда соблюдается условие (13). Кроме того, в силу (18)

$$\limsup_{t\uparrow t_*}\frac{\ln p_k(t)-\ln p_s(t)}{|\ln(t_*-t)|}=0\quad\text{для всех}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{s\}$$

и поэтому условия (2) теоремы А принимают вид неравенств (12). Также с учетом (13) и (19) замечаем, что условия (6), (7) теоремы А запишутся в виде неравенств (14).

Таким образом, показано, что условия (12)–(14) теоремы 1 совпадают при $\omega = t_*$ с условиями (2), (6)–(8) теоремы А. Условия (4), (5) в них одни и те же. Поэтому в силу теорем А, Б и формул (13), (20) справедливы утверждения теорем 1 и 2.

Замечание 3. *В случае одного слагаемого (s-го слагаемого) в правой части уравнения (1) утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе без предположения о выполнении неравенств (12).*

Заключение. В настоящей работе впервые для уравнения (1) с правильно меняющимися нелинейностями получены условия существования сингулярных $P_{t_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–решений при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$. Кроме того, установлены асимптотические представления для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно, а также выяснен вопрос о количестве решений с найденными асимптотическими представлениями.

1. **Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
3. **Евтухов В. М.** Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Клопот // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, №3. – С. 354–380.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Клопот // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, №5. – С. 584–600.
5. **Клопот А. М.** Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка / А. М. Клопот // Нелинейные колебания. – 2012. – 15, №4. – С. 447–465.
6. **Клопот А. М.** Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / А. М. Клопот // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.18, вип. 3(19). – С. 16–34.
7. **Evtukhov V. M.** Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities / V. M. Evtukhov, A. M. Klopot // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2014. – Vol. 61. – P. 37–61.

Євтухов В. М., Клопот А.М.

Асимптотичні представлення сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь з нелінійностями, що правильно змінюються

Резюме

При дослідженні нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь одними з найважливіших є питання про наявність в них правильних та сингулярних розв'язків першого та другого роду, зокрема, так званих «вибухових розв'язків» (за термінологією І. Т. Кігурадзе). В цій роботі для диференціального рівняння $y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \times \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})$, де $\alpha_k \in \{-1;1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m})$ — неперервні функції, $\varphi_{kj} : \triangle Y_j \longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m};\ j = \overline{0,n-1})$ — неперервні та такі, що правильно змінюються при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\triangle Y_j$ — односторонній окіл Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$, встановлюються умови існування сінгулярних $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язків, що містяться в класі сінгулярних розв'язків першого та другого роду, а також асимптотичних представлень для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Ключові слова: функції, що змінюються правильно, нелінійне диференціальне рівняння, правильні та сингулярні розв'язки, сингулярні $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язки, асимптотичні представлення розв'язків.

Evtukhov V. M., Klopot A. M.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE SINGULAR SOLUTIONS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH REGULARLY VARYING FUNCTIONS

Summary

In the study of non-linear non-autonomous ordinary differential equations, one of the most important questions are existence of regular and singular solutions of the first and second kind, particularly, so-called ¡¡explosive solutions¿¿ (in the terminology by I. T. Kiguradze [1]). This paper deals with the differential equation $y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})$, where $\alpha_k \in \{-1;1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m})$ are continuous functions, $\varphi_{kj} : \triangle Y_j \longrightarrow]0,+\infty[$ $(k = \overline{1,m};\ j = \overline{0,n-1})$ are continuous and regularly varying functions subject to $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\triangle Y_j$ is an one-sided neighborhood of Y_j, Y_j equals either 0 or $\pm\infty$. We establish existence conditions of singular $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–solutions, which are contained in the class of singular solutions of first and second kind as well as the asymptotic representations of such solutions and their derivatives up to $n-1$ order inclusively.

Key words: regularly varying functions, non-linear differential equations, regular and singular solutions, singular $P_{t_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of the solutions.

REFERENCES

1. **Kiguradze, I. T. & Chanturia, T. A.** 1990, Asimptoticheskie svoistva resheniy obyknovennykh differencialnykh uravneniy [Asymptotic properties of the solutions of ordinary differential equations]. M.: Nauka, 430 p.

2. **Seneta, E.** 1985, Pravil'no menyayushchiesya funktsii [Regularly varying functions]. M.: Nauka, 144 p.

3. **Evtukhov, V. M. & Klopot, A. M.** 2013, Asimptotica nekotorykh klassov resheniy obyknovennykh differencialnykh uravneniy n-go poryadka s pravil'no menyayushchimisya nelineynostyami [The asymptotic behavior of some classes of the solutions of ordinary differential equations of order n with regularly varying nonlinearities], *Ukrainian mathematical journal*, vol. 65, no. 3, pp. 354–380.

4. **Evtukhov, V. M. & Klopot, A. M.** 2014, Asimptoticheskoe povedenie resheniy obyknovennykh differencialnykh uravneniy n-go poryadka s pravil'no menyayushchimisya nelineynostyami [The asymptotic behavior of some classes of the

solutions of ordinary differential equations of order n with regularly varying non-linearities] *Differential Equations*, vol. 50, no. 5., pp. 584–600.

5. **Klopot, A. M.** 2015, Ob asimptotike resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differencialnykh uravneniy n-go poryadka [On asymptotic behavior of the solutions of non-autonomous ordinary differential equations of order n] *Nonlinear Oscillations*, vol. 15, no. 4, pp. 447–465.

6. **Klopot, A. M.** 2013, Asimptoticheskoe povedenie resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differencialnykh uravneniy n-go poryadka s pravil'no menyayushchimisya nelineynostyami [On asymptotic behavior of the solutions of non-autonomous ordinary differential equations of order n with regularly varying non-linearities] *Visnyk Odes'kogo nats. univ. Matem. i mekh.*, vol. 18, no. 3(19), pp. 16–34.

7. **Evtukhov, V. M. & Klopot, A. M.** 2014, Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, vol. 61, pp. 37–61.