УДК 62-50+519.7

Н. В. Жоголева
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Славянск

НЕЛИНЕЙНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Робота выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ гос. регистр. 0116U007161).

Рассмотрена задача наблюдения для системы взаимосвязанных осцилляторов Ван дер Поля. Такие системы возникают при моделировании многих биологических процессов, имеющих циклический характер. Для построения наблюдателя использован метод синтеза инвариантных соотношений, выражающий неизвестные как функции от известных величин.

MSC: 34C15, 93B07.
Ключевые слова: нелинейный наблюдатель, осциллятор Ван дер Поля, инвариантные соотношения, асимптотическое оценивание.

Введение. Исследование коллективного поведения многомасштабных динамических процессов является на данный момент одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики. Она имеет принципиальное значение для понимания основных закономерностей синхронной динамики распределенных активных подсистем с колебаниями, таких как нейронные ансамбли, биомеханические модели сердечной или локомоторной деятельности, модели турбулентных сред и других. Поскольку нелинейные колебания, которые наблюдаются в таких системах, имеют устойчивый предельный цикл, который не зависит от начальных условий, а их амплитуда является убывающей функцией частоты, то в качестве модели многомасштабных процессов обычно используют систему связанных между собой нелинейных осцилляторов. В качестве основной динамической модели каждого из этих осцилляторов часто используют уравнения Ван дер Поля либо некоторую их модификацию [1].

Практические медико-биологические исследования таких моделей зачастую связаны с проблемой определение характеристик активных подсистем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени. В частности, для изучения и управления процессом синхронизации требуется знание скорости колебаний каждого из осцилляторов системы при измерениях положения колеблющихся точек [2, 3]. В такой постановке эта задача является классической задачей наблюдения динамической системы по ее выходу [4].

В работе проводится построение нелинейного наблюдателя, позволяющего получать асимптотические оценки скоростей колебаний в ансамблях осцилляторов Ван дер Поля. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [5], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [6], [7]. На первом этапе наблюдатель строится для одного осциллятора. Найденное решение используется далее для системы связанных между собой нелинейных осцилляторов.

Получена 5.02.2016

Основные результаты

1. Задача определения скорости колебаний осциллятора Ван дер Поля. Рассмотрим уравнение Ван Дер Поля, описывающее процесс релаксационных колебаний [8]

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

Здесь x — отклонение точки от положения равновесия, μ — коэффициент при нелинейном слагаемом, который характеризует величину демпфирования, $\mu \geqslant 0$. Режим $\mu = 0$ соответствует колебаниям без трения и описывается уравнением гармонического осциллятора с собственной частотой ω. Одной из задач, возникающих при моделировании биологических функций организма, является задача определения скорости точки в предположении, что значения функции времени $x(t)$ доступны измерению.

Обозначив $x_1 = x,\ x_2 = dx/dt$, перепишем (1) в виде системы

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2, \\ &\dot{x_2} = -\omega^2 x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2, \\ &y = x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения $x_2(t)$ как задачу наблюдения системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функция $y(t)$, а также любые величины, которые могут быть найдены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R, \tag{3}$$

в которой функция $U(\xi, x_1)$ обеспечивает существование и единственность решения $\xi(t, \xi_0)$ для $t \in [0, \infty)$. Используя традиционный подход к решению задачи наблюдения [4], рассморим

Задача 1. Найти асимптотически точные оценки переменной $x_2(t)$ системы (2) по известным значениям выхода $x_1(t)$.

2. Синтез дополнительного соотношения. Для решения задачи используем метод синтеза инвариантных соотношений, с помощью которого на некоторых траекториях расширенной ситемы дифференциальных уравнений (2), (3) строятся явные зависимости неизвестных от известных величин [6, 7]. Суть данного подхода состоит в динамическом расширении исходной системы дифференциальных уравнений (2) уравнением (3). При этом правая часть (3) — функция $U(\xi, x_1)$ — подбирается таким образом, чтобы полученная расширенная система дифференциальных уравнений (2), (3) допускала некоторое семейство инвариантных соотношений

$$F(x_1, x_2, \xi) = 0 \tag{4}$$

со следующими свойствами:

А) Любое соотношение семейства (4) формирует уравнение для определения неизвестной, т. е. $\frac{\partial F}{\partial x_2} \neq 0$;

Б) Соответствующее соотношению (4) двумерное инвариантное многообразие $M = \{(x_1, x_2, \xi) \in R^3 :\ \ F(x_1, x_2, \xi) = 0\}$ обладает свойством глобального

притяжения для всех решений расширенной системы (2), (3). Иными словами, на любых решениях
$$\lim_{t\to\infty} F(x_1(t), x_2(t), \xi(t)) = 0.$$

Чтобы свойство A было выполнено во всей рассматриваемой области, соотношения (4) будем искать в виде
$$F(x_1, x_2, \xi) = x_2 - \xi - \Psi(x_1) = 0, \tag{5}$$
где переменная ξ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3). Если функции $\Psi(x_1), U(\xi, x_1)$ выбраны такими, что соотношения (5) становится инвариантными на рассматриваемом решении системы (2), (3), то тогда искомое $x_2(t)$ может быть найдено непосредственно из уравнения (5). Покажем, что в случае уравнений Ван дер Поля существует широкое семейство функций $\Psi(x_1)$, для которых такие соотношения могут быть построены.

Теорема 1. *Для любой дифференцируемой функции $\Psi(x_1)$ существует управление $U(\xi, x_1)$ такое, что равенство (5) выполняются тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (2), (3).*

Доказательство. Введем переменную ε, которая характеризует невязку в формулах (5) на решениях системы (2), (3).
$$x_2(t) - \xi(t) - \Psi(x_1(t)) = \varepsilon(t). \tag{6}$$
Сделаем в уравнениях (2) замену переменных. Перейдем по формулам (6) от переменной x_2 к переменной ε. Дифференцируя (6) в силу системы (2)(3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений
$$\dot{\varepsilon} = -\omega^2 x_1 - U + (\varepsilon + \xi + \Psi)\left[\mu(1 - x_1^2) - \Psi'\right],\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \tag{7}$$
где знак $'$ означает дифференцирование по переменной x_1.

Чтобы равенства (5) выполнялись тождественно на некоторых решениях системы (2), (3), достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Для этого зафиксируем вид правых частей (3), а именно: для любой функции $\Psi(x_1)$ положим
$$U(\xi, x_1) = -\omega^2 x_1 + (\xi + \Psi)\left[\mu(1 - x_1^2) - \Psi'\right]. \tag{8}$$

В результате дифференциальное уравнение для отклонения ε становится однородным
$$\dot{\varepsilon} = [\mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}']\varepsilon,\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0. \tag{9}$$
а значит допускает тривиальное решение. Утверждение доказано.

Замечание 1. *Таким образом, для любой дифференцируемой функции $\Psi(x_1)$ начальное значение ξ_0 в задаче Коши для уравнения (3) может быть выбрано так, что в момент $t = 0$ выражение (5) становится верным равенством. В частности, это означает, что начальное значение для отклонения $\varepsilon_0 = 0$. В этом случае равенство (5) на траектории расширенной системы (2), (3) выполняется тождественно, образуя, тем самым, дополнительное уравнение, в котором единственным неизвестным является $x_2(t)$.*

В общем случае осуществить такой выбор ξ_0 не представляется возможным, поскольку для этого необходимо знать значение $x_2(0)$, которое, вообще говоря, и есть искомой величиной. Чтобы использовать формулу (5) для оценки $x_2(t)$ на любом решении системы (2), (3), требуется из множества функций $\Psi(x_1)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение системы дифференциальных уравнений для отклонений (9) обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

3. Экспоненциальное затухание отклонений. Воспользуемся имеющейся свободой в выборе функции $\Psi(x_1)$, чтобы выполнить свойство Б, а именно – обеспечить асимптотическое стремление к нулю отклонения $\varepsilon(t)$. Уравнение (9) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, его общее решение имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(\int_0^t [\mu(1 - x_1(\tau)^2) - \Psi_1'(x_1(\tau))]d\tau\right).$$

Отсюда следует, что семейство допустимых функция $\Psi(x_1)$ определяется из условий отрицательности и расходимости несобственного интеграла

$$\int_0^\infty [\mu(1 - x_1(\tau)^2) - \Psi_1'(x_1(\tau))]d\tau.$$

Сузим это семейство, потребовав выполнения равенства

$$\mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}' = \lambda, \tag{10}$$

где λ – некоторая отрицательная постоянная. В этом случае общее решение имеет вид $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp \lambda t$, следовательно, функции $\Psi(x_1)$, удовлетворяющие (10), обеспечивают экспоненциальную оценку неизвестной $x_2(t)$.

Условие (10) будем рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $\Psi(x_1)$. Его общее решение имеет вид

$$\Psi(x_1) = (\mu - \lambda)x_1 - \frac{\mu x_1^3}{3} + C. \tag{11}$$

Зная функцию $\Psi(x_1)$, определяем по формуле (8) правую часть дифференциального уравнения (3). В итоге, подставляя полученные результаты в (5), получаем окончательное уравнения наблюдателя

$$\begin{aligned} &x_2 = \xi + (\mu - \lambda)x_1 - \mu\tfrac{x_1^3}{3} + C + O(\exp \lambda t), \\ &\dot{\xi} = \lambda\left[\xi + (\mu - \lambda)x_1 - \mu\tfrac{x_1^3}{3} + C\right] - \omega^2 x_1,\ \xi_0 \in R. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения (12) определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\lambda < 0, \xi_0, C$. При этом каждый из них обеспечивает экспоненциальное оценивание переменной $x_2(t)$ с показателем затухания, равным $|\lambda|$.

4. Система связанных осцилляторов. Рассмотрим теперь механическую модель системы, составленную из n осцилляторов Ван дер Поля. Предполагается, что положение каждого из осцилляторов доступно измерению $y_i(t) = x_{1i}(t)$ и они соединены между собой упругими связями с линейными жесткостями $k_{ij},\ i, j =$

$\overline{1,n}$. Системы такого рода используются в медико-биологических исследованиях. В частности, случай $n=2$ описывает распространенную модель сердечной деятельности, а $n=3$ модель ходьбы человека [1]. Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{x_{i1}} = x_{i2}, \\
&\dot{x_{i2}} = -{\omega_i}^2 x_{i1} + \mu_i(1-x_{i1}^2)x_{i2} + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1}-x_{i1}), \\
&y_i = x_{i1}, \quad i=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки переменных $x_{i2}(t)$ системы (13) по известным значениям выхода $x_{i1}(t),\ i=\overline{1,n}$.

Решение задачи 2 проведем по описанной выше схеме. Представим неизвестные в виде суммы неопределенных величин

$$x_{i2}(t) = \xi_{i1}(t) + \Psi_i(x_{i1}(t)) + \varepsilon_i(t)\ i=\overline{1,n}, \tag{14}$$

где $\varepsilon_i(t)$ – отклонения, $\xi_i(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi_i} = U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}),\ \xi_i(0)=\xi_{i0}\in R,\ i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Правые части системы (15) должны зависеть только лишь от известных величин. В качестве управлений $U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})$ возьмем функции

$$U_i = -{\omega_i}^2 x_1 + (\xi_i+\Psi_i)\left[\mu_i(1-x_{i1}^2) - {\Psi_i}'\right] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1}-x_{i1}),\ i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

В результате получаем для отклонений n однотипных дифференциальных уравнений вида (9)

$$\dot{\varepsilon_i} = [\mu_i(1-x_{i1}^2) - {\Psi_i}']\varepsilon_i,\ \varepsilon_i(0)=\varepsilon_{i0},\ i=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Полагая в правой части (17) коэффициенты при отклонениях равными некоторой отрицательной постоянной λ, получаем аналогичные (10) уравнения для функций $\Psi_i(x_{i1}(t))\ i=\overline{1,n}$. Используя найденные ранее решения (11), запишем уравнения наблюдателя скоростей системы n осцилляторов Ван дер Поля

$$\begin{aligned}
&x_{i2} = \xi_i + (\mu_i-\lambda)x_{i1} - \mu_i\tfrac{x_{i1}^3}{3} + C_i + O(\exp\lambda t), \\
&\dot{\xi_i} = \lambda\left[\xi_i + (\mu_i-\lambda)x_{i1} - \mu\tfrac{x_{i1}^3}{3} + C_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1}-x_{i1})\right] - \omega_i^2 x_{i1},\ i=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{18}$$

5. Численное моделирование. Предложенная в работе схема была промоделирована путем численного интегрирования для широкого спектра начальных условий и параметров системы (1). Результаты одного из вариантов счета для отдельно взятого осциллятора приведены на рисунке. В качестве известного выхода системы (2) взята координата $x_1(t)$ – численное решение системы (2) с начальными условиями $x_1(0)=2.5;\ x_2(0)=-5.0$ и параметрами $\omega=1.5;\ \mu=1.0.$

Начальное условие для решения вспомогательной системы $\zeta_0 = 5.0$, показатель затухания $\lambda = -2.0$. На рисунке искомая координата $x_2(t)$, найденная в результате численного интегрирования уравнения Ван дер Поля, сопоставлена с ее экспоненциальной оценкой, полученной по формуле $\xi(t) + (\mu - \lambda)x_1(t) - \mu\frac{x_1(t)^3}{3}$.

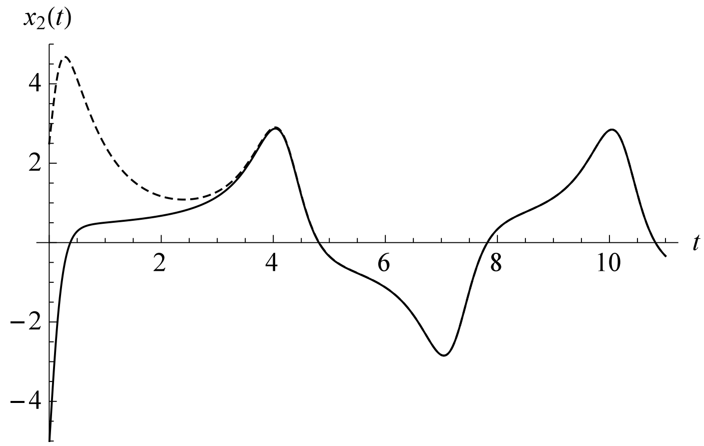

Рис 1. Экспоненциальное оценивание переменной $x_2(t)$

Результаты численного моделирования показывают работоспособность предложенного способа решения задачи наблюдения скоростей колебаний системы осцилляторов.

Заключение. В работе проводится построения нелинейного наблюдателя, позволяющего получать асимптотические оценки скоростей колебаний в ансамблях осцилляторов Ван дер Поля. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [5], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [6,7]. На первом этапе наблюдатель строится для одного осциллятора. Найденное решение используется далее для системы связанных между собой нелинейных осцилляторов.

1. **Кузнецов А. П.** Феномен уравнения ван дер Поля / А. П. Кузнецов, Е. С. Селиверстова, Д. И. Трубецков, Л. В. Тюрюкина // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
2. **Grudzinski K.** Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators / K. Grudzinski, J.J. Zebrowski// Physica A 336. – 2003. – P. 153–162.
3. **Булдаков Н. С.** Моделирование связей в системе «сердце–сосуды» / Н. С. Булдаков, Н. С. Самочетова, А. В. Ситников, С. И. Суятинов // Наука и образование, Электронный научно-технический журнал. – 2013. – С. 123.
4. **Справочник** по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

5. **Харламов П. В.** Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6.
6. **Щербак В. Ф.** Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения / В. Ф. Щербак // Механика тведого тела. – 2004. – Т. 33. – С. 197–216.
7. **Жоголева Н. В.** Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления / Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т.29. – С. 69–76.
8. **Van der Pol B.** On relaxation oscillations / Van der Pol B. // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci. – 1927. – V. 2(7). – P. 978–992.

Жоголева Н. В.
Нелінійний спостерігач системи осциляторів Ван дер Поля

Резюме

Розглянуто задачу спостереження для системи взаємопов'язаних осциляторів Ван дер Поля. Такі системи виникають при моделюванні багатьох біологічних процесів, що мають циклічний характер. Для побудови спостерігача використано метод синтезу інваріантних співвідношень, за яким шукані невідомі представлено як функції від відомих величин.
Ключові слова: нелінійний спостерігач, осцилятор Ван дер Поля, інваріантні співвідношення, асимптотичне оцінювання.

Zhogoleva N. V.
Nonlinear observer for system of the Van der Pol oscillators

Summary

The problem of velocities determination for interconnected Van der Pole oscillators by known data is considered as observation problem. Such systems arise on modelling of many cyclical biological or physical processes. A new method — a synthesis of invariant relations is used to design nonlinear observer. The method allows us to represent unknowns as a function of known quantities. The scheme of the construction of invariant relations consists in the expansion of the original dynamical system by equations of some controlled subsystem (integrator). Control in the additional system is used for the synthesis of some relations that are invariant for the extended system and have the attraction property for all of its trajectories. Such relations are considered in observation problems as additional equations for unknown state vector of initial oscillators ensemble. To design the observer, first we introduce a observer for unique Van der Pole oscillator and prove its exponential convergence. This observer is then extended on several coupled Van der Pole oscillators. The performance of the proposed method is investigated by numerical simulations.
Key words: nonlinear observer, Van der Pol oscillators, invariant relations, asymptotic estimation.

References

1. **Kuznietsov, A. P., Seliverstova E. S., Trubetskov, D. I. & Tyuryukina, L. V.** 2014, Fenomen uravneniya Van Der Polya, *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, vol. 22, № 4, pp. 3–42.

2. **Grudzinski, K. & Zebrowski J. J.** 2003, Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators, *Physica A*, 336, pp. 153–162.
3. **Buldakov, N. S., Samochetova, N. S., Sitnikov, A. V. & Suyatinov S. I.** 2013, Modelirovaniye cvyazey v sisteme "serdtse–sosudy", *Nauka i obrazovaniye, Elektronnyy nauchno-technicheskiy zhurnal*, pp. 123.
4. **Spravochnik** po teorii avtomaticheskogo upravleniya / Pod red. A. A. Krasovskogo, M.: Nauka, 1987, 712 p.
5. **Kharlamov, P. V.** 1974, Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy, *Mekhanika tverdogo tela*, vol. 6.
6. **Scherbak, V. F.** 2004, Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v zadache nabludeniya, *Mechanika tverdogo tela*, vol. 33, pp. 197–216.
7. **Zhogoleva, N. V. & Scherbak, V. F.** 2015, Sintez dopolnitelnykh sootnosheniy v obratnykh zadachakh upravleniya, *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, vol. 29, pp. 69–76.
8. **Van der Pol B.** 1927, On relaxation oscillations, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci.*, vol 2 (7), pp. 978–992.