УДК 517.518

Е. И. Олефир
Южноукраинский национальный педагогический университет
имени К. Д. Ушинского

К ТЕОРИИ БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСОВ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются классы целых функций конечной степени, удовлетворяющих некоторым условиям, которые связаны с теоремами о безусловных базисах из значений целых вектор-функций. В частности, для любого (A_2)-веса w^2 на $\mathbb{R}$ дается конструкция целой функции φ с нулями в области $\operatorname{Im} z < 0$ и такой, что при любом $\varepsilon > 0$ вес $|w_+^{-1}(x+i\varepsilon)\varphi(x+i\varepsilon)|^2$ удовлетворяет A_2-условию. Здесь w_+ — внешняя функция в области $\operatorname{Im} z > 0$ со свойством $|w_+(x+i0)|^2 = w^2(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

MSC: 46E20, 32A15.
Ключевые слова: целые функции, безусловные базисы, веса Макенхаупта.

Введение. Пусть $E(z)$ — целая вектор-функция со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Известно [1, 2], что если для некоторой комплексной последовательности Λ семейство $\{E(\lambda_k)\colon \lambda_k \in \Lambda\}$ образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то при достаточно общих предположениях о функции E она резольвентно представима, то есть справедливо равенство

$$E(z) = (I - zB)^{-1}E(0), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где B — некоторый вполне непрерывный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ со спектром в нуле. Для определенности остановимся на наиболее исследованом случае, когда B принадлежит классу $\Lambda^{(exp)}$, то есть 1) $\sigma(B) = \{0\}, \operatorname{Ker} B = \{0\}$; 2) $(B - B^*)/i \geqslant 0$; 3) резольвента $(I - zB)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип.

Выделим подкласс вектор-функций E с оператором $B \in \Lambda^{(exp)}$, который является модельным в проблеме описания расматриваемых безусловных базисов [1-2]. Пусть w^2— произвольный A_2-вес Макенхаупта на $\mathbb{R}$, $w_-(z)$— внешняя в нижней полуплоскости функция, такая, что $|w_-(x - i0)|^2 = w^2(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$ [3]. Тогда имеет место представление [1]

$$w_-(z) = z \int_0^\infty e^{-izt} y_w(t)dt, \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

где функция $y_w \in L_2(0, b)$ при каждом $b > 0$. Вектор-функция

$$E_w(z,t) := \frac{d}{dt} \int_0^t y_w(t-s)e^{izs}ds, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2}$$

со значениями в каждом из пространств $L_2(0, b), b > 0$ резольвентно представима с оператором

$$(Bh)(t) = i \int_0^t h(s)ds, \quad h \in L_2(0, b),$$

который принадлежит классу $\Lambda^{(exp)}$.

Получена 07.11.2015

Две вектор-функции E_k вида (1) со значениями в пространствах $\mathfrak{H}_k, (k = 1, 2)$ называются изоморфными, если существует непрерывный и непрерывно обратный оператор S из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$ такой, что $SE_1(z) = E_2(z)$. Заметим, что если вектор-функции изоморфны, то семейства $\{E_1(\lambda_k),\ \lambda_k \in \Lambda\}$ и $\{E_2(\lambda_k),\ \lambda_k \in \Lambda\}$ только одновременно могут быть базисами соответствующих пространств.

В силу сформулированной ниже теоремы вектор-функции вида (2), порождаемые произвольными A_2-весами w^2 на вещественной оси, играют фундаментальную роль в описании безусловных базисов.

Теорема A [1, 2]. *Пусть E— произвольная вектор-функция вида (1), $B \in \Lambda^{(exp)}$, a — экспоненциальный тип E. Если существует комплексная последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ такая, что $\inf\limits_k \operatorname{Im} \lambda_k > -\infty$ и семейство $\{E(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\}$ образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$, то вес $w^2(x) :=\| E(x) \|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$ и вектор-функция $E(z)$ изоморфна функции $E_w(z,t)$ вида (2) со значениями в пространстве $L_2(0,a)$.*

Таким образом, задача об описании абстрактных базисов $\{E(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\}$ сводится к аналогичной задаче о базисах в пространстве $L_2(0,a)$ из значений $E_w(z,t)$. Сформулируем соответствующий результат, предполагая, что существует прямая $\mathbb{R} + i\delta := \{x + i\delta, x \in \mathbb{R}\}$, которая лежит на положительном расстоянии от последовательности Λ. Введем в рассмотрение две последовательности $\Lambda_+^\delta := \{\lambda_k - i\delta, \operatorname{Im} \lambda_k > \delta, \lambda_k \in \Lambda\}$, $\Lambda_-^\delta := \{\lambda_k - i\delta, \operatorname{Im} \lambda_k < \delta, \lambda_k \in \Lambda\}$, из областей $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ соответственно.

Из результатов работ [1, 2] вытекает следующая теорема, в формулировке которой для определенности предполается, что $\delta \geqslant 0$ и принято обозначение $w_+(z) := \overline{w_-(\overline{z})}$.

Теорема B. *Пусть w^2 — произвольный A_2-вес на $\mathbb{R}$, w_- — отвечающая ему внешняя функция в $\mathbb{C}_-$. Для того, чтобы семейство векторов $\{E_w(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \Lambda\}$ было безусловным базисом пространства $L_2(0,a)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность Λ совпадала с множеством корней целой функции экспоненциального типа φ, которая удовлетворяет условиям:*

1) $\varphi(x)w^{-1}(x)(1 + |x|)^{-1} \in L_2(\mathbb{R})$;

2) $\lim\limits_{y\to+\infty} \sup\, y^{-1} \log |\varphi(iy)| = 0, \quad \lim\limits_{y\to-\infty} \sup\, |y|^{-1} \log |\varphi(iy)| = a$;

3) вес $W^2(x) := |w_+^{-1}(x + i\delta)\varphi(x + i\delta)|^2$ удовлетворяет A_2-условию на $\mathbb{R}$.

4) корни φ простые и последовательности Λ_+^δ, Λ_-^δ удовлетворяют условию Карлесона в $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ соответственно.

Напомним, что последовательность $\{\mu_k\}$(например, из $\mathbb{C}_+$) удовлетворяет условию Карлесона [3], если

$$\inf_k \prod_{j\neq k} \left|(\mu_k - \mu_j)(\mu_k - \overline{\mu_j})^{-1}\right| > 0.$$

Таким образом, важное значение приобретает задача построения целых функций φ конечной степени, которые удовлетворяют всем (некоторым) пречисленным условиям 1)–4). В настоящей статье рассматриваются два класса функций, удовлетворяющие трем условиям теоремы B.

Основные результаты

1. Рассмотрим класс целых функций φ вида

$$\varphi(z) = c + \int_0^a e^{izt} h(t)dt, \quad c \neq 0, \quad h \in L_2(0,a). \tag{3}$$

Ясно, что в этом случае существует такое $\delta_0 \geqslant 0$, что $\Lambda_+^\delta = \emptyset$ при всех $\delta \geqslant \delta_0$. При очевидном ограничении на h функция удовлетворяет всем условиям 1)–3) при любом весе Макенхаупта w^2. Оказывается, что условие 4) для функций вида (3) не имеет места.

Теорема 1. *Пусть φ — произвольная функция вида (3), m_k — кратность корня $\lambda_k \in \Lambda$. Если $\sup_{\lambda_k} m_k < \infty$, то любой сдвиг Λ_-^δ, $\delta \geqslant \delta_0$ в нижнюю полуплоскость последовательности корней Λ функции φ не удовлетворяет условию Карлесона.*

Доказательство. Шаг 1. Без ограничения общности будем считать, что Λ лежит в области $\mathbb{C}_-$ и $|\varphi(x)| \asymp 1$, $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, можно считать также, что

$$h_\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) = a,$$

где h_φ — индикатор роста функции φ. В пространстве $L_2(0,a)$ рассмотрим неограниченный оператор A, обратный к которому задается равенством

$$(A^{-1}g)(t) = (Jg)(t) + (g,f), \quad (Jg)(t) := i\int_0^t g(s)ds, \tag{4}$$

где скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(o,a)$, функция $f \in L_2(0,a)$ и находится из представления

$$(\varphi(0) - \varphi(z))/\varphi(0)z = \int_0^a e^{izt}\overline{f(t)}dt. \tag{5}$$

Спектр A совпадает с последовательностью Λ корней φ, причем корневое подпространство, отвечающее $\lambda_k \in \Lambda$ натягивается на функции $t^j e^{i\lambda_k t}$, $0 \leqslant j < m_k$. К оператору A применима теорема 3.1 из статьи [2], в силу которой существует изоморфизм S из $L_2(0,a)$ на подпространство

$$\mathcal{L}_- := \operatorname{closspan}_{\mathcal{H}_+^2} \left\{ j!(z-\lambda_k)^{-(j+1)} \,:\, \lambda_k \in \Lambda,\, 0 \leqslant j < m_k \right\}$$

класса Харди $\mathcal{H}_+^2$ такой, что $SAS^{-1} = A_-$, где A_- — антидиссипативный модельный оператор в $\mathcal{L}_-$. В [2, с. 47] доказано, что

$$S(t^j e^{i\lambda_k t}) = \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} \frac{e^{ia\lambda}}{z-\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_k}, \quad 0 \leqslant j < m_k, \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

Из этих равенств заключаем, что существуют константы b_{ks}^j такие, что

$$S\left(t^j e^{i\lambda_k t} + \sum_{s=0}^{j-1} b_{ks}^j t^s e^{i\lambda_k t}\right) = e^{ia\lambda_k}(-1)^j j!(z-\lambda_k)^{-(j+1)} \tag{6}$$

для всех $\lambda_k \in \Lambda$, $0 \leqslant j < m_k$.

Шаг 2. Предположим теперь, что Λ удовлетворяет условию Карлесона. Тогда из условия $\sup m_k < \infty$ следует безусловная базисность семейства правых частей равенств (6) в $\mathcal{L}_-$ и, стало быть, безусловная базисность семейства функций

$$e_j(\lambda_k, t) := t^j e^{i\lambda_k t} + \sum_{s=0}^{j-1} b_{ks}^j t^s e^{i\lambda_k t}, \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad 0 \leqslant j < m_k \tag{7}$$

в пространстве $L_2(0, a)$. Легко проверяется справедливсть равенств

$$(t^j e^{i\lambda_k t},\, f(\bar{\mu}, t))_{L_2(0,a)} = -j!\varphi(\mu)\varphi^{-1}(0)(\mu - \lambda_k)^{-(j+1)}, \quad 0 \leqslant j < m_k,$$

где $f(\bar{\mu}, t) := (I - \bar{\mu}J^*)^{-1} f$, J определяется формулой (4), f входит в (5). Поэтому

$$(e_j(\lambda_k, t),\, f(\bar{\lambda}_p, t)) = -\delta_{kp}\delta_{j(m_k-1)}(\varphi(0)m_k)^{-1}\varphi^{(m_k)}(\lambda_k),$$

где $\lambda_k, \lambda_p \in \Lambda$, $0 \leqslant j \leqslant m_k - 1$. Таким образом, семейство функций

$$\left\{-\overline{\varphi(0)}m_k\left(\overline{\varphi^{(m_k)}(\lambda_k)}\right)^{-1} f(\bar{\lambda}_k, t),\, \lambda_k \in \Lambda\right\}$$

является частью биортогональной системы к базисному семейству (7). Поэтому существует константа M такая, что

$$\|f(\bar{\lambda}_k, t)\| \leqslant M|\varphi^{(m_k)}(\lambda_k)|\|e_{m_k-1}(\lambda_k, t)\|^{-1}, \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{8}$$

Поскольку $\varphi'(\lambda_k) = \ldots = \varphi^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0$, с учетом (7) получим

$$(-i)^{m_k}\varphi^{(m_k)}(\lambda_k) = \int_0^a t^{m_k-1}e^{i\lambda_k t}th(t)dt = \int_0^a e_{m_k-1}(\lambda_k, t)th(t)dt,$$

где h входит в формулу (3).

Шаг 3. Так как функции $e_{m_k-1}(\lambda_k, t)$ являются элементами безусловного базиса пространства $L_2(0, a)$, последовательность правых частей в (8) принадлежит l_2, то есть $\sum \|f(\bar{\lambda}_k, t)\|^2 < \infty$.

Заметим, что справедливо представление $e^{izt} = (I - zJ)^{-1}\mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — функция равная 1 тождественно. Поэтому полагая в (5) $z = \lambda_k$, с учетом определения $f(\mu, t)$, для всех $\lambda_k \in \Lambda$ получим

$$\lambda_k^{-1} = (\mathbb{1}, (I - \bar{\lambda}_k J^*)^{-1} f) = (\mathbb{1}, f(\bar{\lambda}_k, t)/\|f(\bar{\lambda}_k, t)\|)\|f(\bar{\lambda}_k, t)\|.$$

Так как семейство $\{f(\bar{\lambda}_k, t) : \lambda_k \in \Lambda\}$ есть частью безусловного базиса $L_2(0, a)$, то из последних равенств, ввиду ограниченности m_k, следует, что $\sum m_k|\lambda_k|^{-1} < \infty$. Отсюда вытекает, что ширина индикаторной диаграммы φ равна нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, если Λ — множество корней любой функции φ вида (3), то семейство $\{E_w(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \Lambda\}$ для произвольного веса w^2 не будет базисом пространства $L_2(0, a)$. Вместе с тем, можно доказать, что соответствующие биортогональные разложения всегда суммируемы методом Абеля.

2. В этом пункте мы приведем метод построения целых функций φ, которые для заданного веса w^2 удовлетворяют условию 3) теоремы B.

Обозначим через M множество аналитических в области $\mathbb{C}_+$ функций, которые допускают факторизацию

$$\upsilon(z) = s(z)w(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{9}$$

где w — внешняя функция такая, что вес $|w(x+i0|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$, s — внутренняя, которая взаимно проста с $\exp(iaz)$, то есть

$$\inf_{z\in\mathbb{C}_+} \left\{|s(z)| + |e^{iaz}|\right\} > 0.$$

Каждая функция $\upsilon \in M$ представима в виде

$$\upsilon(z) = z\int_0^\infty e^{izt} g_v(t)dt, \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{10}$$

где g_v принадлежит L_2 на каждом конечном интервале. Функции класса M были введены в [4] и нашли там прменение в спектральной теории конечномерных возмущений вольтерровых операторов .

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$g_v(z,t) + iz\int_0^t g_v(z,s)ds = g_v(t), \quad t \geqslant 0, \tag{11}$$

решение которого $g_v(z,t) \in L_2(0,b)$ при любом $b > 0$.

И, наконец, введем целую функцию конечной степени

$$\Psi(z) = 1 + iz\int_0^a g_v(z,t)\overline{g_v(t)}dt, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть υ — произвольная функция класса M, w — внешний множитель в факторизации (9), $w_-(z) := \overline{w(\overline{z})}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Тогда корни функции Ψ вида (12) лежат в области $\mathbb{C}_+$ и при каждом $\delta < 0$ вес $|w_-^{-1}(x+i\delta)\Psi(x+i\delta)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Шаг 1. В пространстве $L_2(0,a)$ рассмотрим оператор

$$Kh = -Jh - i(h, g_v)g_v, \quad h \in L_2(0,a),$$

где оператор J снова задается формулой (4). Вычисляя резольвету $(I - zK)^{-1}$, приходим к выводу, что фредгольмов спектр оператора K совпадает с множеством корней функции Ψ, которую, как это следует из (12), можно записать в виде

$$\Psi(z) = 1 + iz\left((I + zJ)^{-1}g_v, g_v\right). \tag{13}$$

Легко проверяется, что

$$\mathrm{Im}\,(Kh,h) \leqslant 0, \quad h \in L_2(0,a). \tag{14}$$

Рассматривая это неравенство на собственных векторах оператора K, заключаем, что корни Ψ лежат в замыкании $\mathbb{C}_+$. Докажем, что K не имеет вещественных собственных чисел. Пусть, например, $Kh = \mu^{-1}h, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда, как уже отмечалось, $\Psi(\mu) = 0$, то есть

$$1 + i\mu\big((I+\mu J)^{-1}g_\upsilon, g_\upsilon\big) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Учитывая, что

$$(J - J^*)h = i\int_0^a h(s)ds,$$

из соотношения Гильберта для резольвент найдем

$$\big((I+\mu J)^{-1}g_\upsilon, g_\upsilon)\big) - \big((I+\mu J^*)^{-1}g_\upsilon, g_\upsilon)\big) = -i\mu\left|\int_0^a g_\upsilon(t)e^{-i\mu t}dt\right|^2.$$

Теперь, с учетом (15) отсюда выводится неравенство $\mu^{-2} \leqslant 0$, что невозможно.

Поскольку из (14) следует, что Ker K = Ker K^* нетрудно доказать, что Ker $K = \{0\}$. Таким образом, корни Ψ лежат в $\mathbb{C}_+$ и, кроме того, существует плотно заданный замкнутый оператор A такой , что $K = A^{-1}$.

Шаг 2. Докажем двустороннюю оценку

$$m\|h\|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |w(x+i0|^{-2}|(g_\upsilon(x,t),h)|^2dx \leqslant M\|h\|^2, \tag{16}$$

где $m, M > 0$, $h \in L_2(0,a)$, w — внешний множитель в факторизации (9).

Докажем сначала неравенства (16) для случая $\upsilon = w$. Для этого применим преобразование Фурье—Лапласа (с ядром $\exp(i\lambda t)$) к обеим частям уравнения (11). Учитывая, что

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t}\int_0^t g_w(z,s)dsdt = -(i\lambda)^{-1}\int_0^\infty e^{i\lambda s}g_w(z,s)ds,$$

получим

$$(1 - z/\lambda)\int_0^\infty e^{i\lambda t}g_w(z,t)dt = \int_0^\infty e^{i\lambda t}g_w(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Принимая во внимание формулу (10), в случае $\upsilon = w$ найдем

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t}g_w(z,t)dt = \frac{w(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad z \in \mathbb{C}_-. \tag{17}$$

Теперь, используя унитарность преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ для любого $f \in L_2(0,a)$, вычислим скалярное произведение

$$\big((I+zJ)^{-1}g_w, f\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w(x+i0)}{x-z}\tilde{f}(x)dx, \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

$$\tilde{f}(x) := \int_0^a e^{-itx}\overline{f(t)}dt.$$

Переходя к пределу при $z \to u \in \mathbb{R}$ некасательно, найдем:

$$\big((I+uJ)^{-1}g_w, f\big) = -iw(u+i0)\tilde{f}(u) + \frac{1}{2\pi}\lim_{z\to u}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w(x+i0)}{x-z}\tilde{f}(x)dx. \tag{18}$$

Поскольку $\tilde{f} \in \mathcal{H}^2_-$, а второе слагаемое в (18) после деления на $w(x+i0)$ лежит в $\mathcal{H}^2_+$, то отсюда вытекает оценка (16) для $\upsilon = w, h = f$. В работе [4] найдена связь между функциями g_w и g_v на отрезке $[0,a]$. В ней доказано существование изоморфизма S пространства $L_2(0,a)$ такого, что $y_v = Sy_w$, $SJ = JS$. Подставляя в (18) $f = S^* h$, получаем справедливость оценки (16) для любой функции $\upsilon \in M$.

Шаг 3. Из (14) вытекает, что для оператора $A := K^{-1}$ (Шаг 1) справедливо неравенство $\operatorname{Im}(Af, f) \geqslant 0, f \in D_A$ и, следовательно, полугруппа $U(t) = \exp^{iAt}, t \geqslant 0$ является сжимающей. Обратимся теперь к теореме 3.2 работы [5]. Отметим, что двустороння оценка (16) означает, что оператор A есть w-возмущение оператора дифференцирования $A_0 := (-J)^{-1}$ [5]. Из (18) следует, что при каждом $f \in L_2(0,a)$ функция

$$G(u,f) := w^{-1}(u+i0)\left((I+uJ)^{-1}g_w, f\right)$$

такова,что $e^{ibu}G(u,f)$ принадлежит классу Харди $\mathcal{H}^2_+$ при каждом $b \geqslant a$ и, вообще говоря, не принадлежит $\mathcal{H}^2_+$, если $b < a$. Это свойство означает, что w-возмущению A отвечает вес $|w(x+i0)|^2$ и внутрення функция $\theta(z) := e^{iaz}$. Теперь из теоремы 3.2 [5] следует второе утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы уже легко вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть υ — произвольная функция класса M, w — внешний множитель в факторизации (9),Ψ — целая функция вида (12), $\varphi(z) := \overline{\Psi(\overline{z})}$. Тогда корни функции φ лежат в области $\mathbb{C}_-$ и при каждом $\varepsilon > 0$ вес $|w^{-1}(x+i\varepsilon)\varphi(x+i\varepsilon)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$. Кроме того, выполняется условие 1), а также первое равенство условия 2) теоремы B.*

Действительно, условие 1) легко вытекает из правого неравенства (16) и представления (13) функции Ψ. Первое равенство условия 2) вытекает из теоремы 3.2 [5].

Формула (12) не всегда удобна для вычисления функции Ψ. Поэтому приведем другую формулу для Ψ, а значит, и для искомой функции φ. Для этого заметим,что оператор

$$\mathbb{P}_a f = e^{iax}\mathbb{P}_- e^{-iax} f(x), \qquad f \in \mathcal{H}^2_+,$$

где $\mathbb{P}_-$ — ортопроектор из $L_2(\mathbb{R})$ на класс Харди $\mathcal{H}^2_-$, ортогонально проектирует класс $\mathcal{H}^2_+$на подпространство Винера—Пэли преобразований Фурье функций $g \in L_2(0,a)$. Кроме того, те же рассуждения, что и при доказательстве формулы (17), дают

$$\int_0^\infty e^{i\lambda t} g_v(z,t)dt = \frac{\upsilon(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, z \in \mathbb{C}_-,$$

где υ — произвольная функция класса M. Поэтому приходим к формуле

$$\int_0^a e^{ixt} g_v(z,t)dt = e^{iax}\ \mathbb{P}_-\ e^{-iax} \int_0^\infty e^{ixt} g_v(z,t)dt =$$

$$= e^{iax}\ \mathbb{P}_-\ e^{-iax} \frac{\upsilon(x+i0)}{x-z}, \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

Кроме того, из формулы (10) следует, что

$$\int_0^a e^{ixt} g_v(t)dt = \lim_{\varepsilon \to +0} e^{iax}\ \mathbb{P}_-\ e^{-iax} \int_0^\infty e^{i(x+i\varepsilon)t} g_v(t)dt =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} e^{iax}\,\mathbb{P}_-\, e^{-iax}\frac{v(x+i\varepsilon)}{x+i\varepsilon}.$$

Учитывая унитарность преобразования Фурье, формулу (12) перепишем в виде

$$\Psi(z)=1+2\pi iz\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbb{P}_-\frac{e^{-iax}v(x+i0)}{x-z}\right)\frac{e^{iax}\overline{v(x+i\varepsilon)}}{x-i\varepsilon}dx,\quad z\in\mathbb{C}_-.$$

Эта формула позволяет вычислять функцию Ψ в конкретных случаях. Например, с помощью теории вычетов нетрудно проделать вычисления в случае $v(z)=B(z)$, где B — произвольное произведение Бляшке в $\mathbb{C}_+$.

Заключение. Рассмотрены классы целых функций конечной степени, удовлетворяющих некоторым условиям, которые связаны с теоремами о безусловных базисах из значений целых вектор-функций. В частности, для любого (A_2)-веса w^2 на $\mathbb{R}$ дана конструкция целой функции φ с нулями в области $\mathrm{Im}\, z<0$ такой, что при любом $\varepsilon>0$ вес $|w_+^{-1}(x+i\varepsilon)\varphi(x+i\varepsilon)|^2$ удовлетворяет A_2-условию.

1. **Губреев Г. М.** Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B-представимых вектор-функций / Г. М. Губреев // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, вып.6. – С. 1–97.
2. **Губреев Г. М.** Регулярные ядра Миттаг—Леффлера и спектральное разложение одного класса несамосопряженных операторов / Г. М. Губреев // Известия РАН. – 2005. – Т. 69, №1. – С. 17–60.
3. **Гарнетт Дж.** Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984.
4. **Губреев Г. М.** L_2-устойчивые полугруппы, условие Макенхаупта и безусловные базисы из значений квазиэкспонент / Г. М. Губреев // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, №12. – С. 3–36.
5. **Губреев Г. М.** Функциональные модели несамосопряженных операторов, сильно непрерывные полугруппы и матричные веса Макенхаупта / Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин // Известия РАН. – 2011. – Т. 75, №2. – С. 69–126.

Олефир О. І.

До теорії безумовних базисів гільбертових просторів із значень цілих вектор-функцій

Резюме

В статті розглядаються класи цілих функцій скінченного ступеню, які задовольняють деяким умовам, що пов'язані з теоремами про безумовні базиси із значень цілих вектор-функцій Зокрема, для кожної (A_2)-ваги w^2 на $\mathbb{R}$ дається конструкція цілої функції φ з нулями в області $\mathrm{Im}\, z<0$ і такої, що при будь–якому $\varepsilon>0$ вага $|w_+^{-1}(x+i\varepsilon)\varphi(x+i\varepsilon)|^2$ задовольняє A_2-умові. Тут w_+ — зовнішня функція в області $\mathrm{Im}\, z>0$ з властивістю $|w_+(x+i0)|^2=w^2(x)$ майже всюди на $\mathbb{R}$.

Ключові слова: ціла функція, безумовний базис, ваги Макенгаупта.

Olefir E. I.

To the theory of Hilbert space's unconditional basis from values of entire vector-functions

Summary

Classes of entire functions of exponential type are considered in the article. They fulfil certain conditions related to theorems about unconditional basises from the values of entire vector-functions. In particular, for any (A_2)-weight w^2 on $\mathbb{R}$ is given by entire function φ with zeros in region Im $z < 0$; futher, for any $\varepsilon > 0$ the weight $|w_+^{-1}(x + i\varepsilon)\varphi(x + i\varepsilon)|^2$ meets the A_2-condition. Here w_+ is an exterior function in region Im $z > 0$ with a property that $|w_+(x + i0)|^2 = w^2(x)$ almost everywhere on $\mathbb{R}$.

Key words: entire function, unconditional basis, Muckenhoupt's weights.

References

1. **Gubreev, G. M.** 2000, Spektralnaya teotiya regulyarnykh kvaziexponent i regulyarnykh B-predstavimykh vektor-funkciy [Spectral theory of regular quaziexponential and regular B-representable vector-functions], *Algebra and Analysis*, vol. 12 (6), pp. 1–97.
2. **Gubreev, G. M.** 2005, Regulyarnyie yadra Mittag—Lefflera i spektralnoe razlozhenie odnogo klassa nesamosopryazhennyih operatorov [Regular Mittag—Leffler kernels and spectral decomposition of a class of self-adjoint operators], *Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, vol. 69 (1), pp. 17–60.
3. **Garnett, J.** 1984, Ogranichenye analiticheskie funkcii [Bounded Analytic Functions]. M.: Mir.
4. **Gubreev, G. M.** 1999, L_2-ustoychivyie polugruppyi, uslovie Makenhaupta i bezuslovnyie bazisyi iz znacheniy kvazieksponent [L_2-stable semigroup, Muckenhoupt condition and unconditional bases of values of quasiexponent], *Sbornik: Mathematics*, vol. 190 (12), – pp. 3–36.
5. **Gubreev, G. M. & Latushkin, Yu. D.** 2011, Funktsionalnyie modeli nesamosopryazhennyih operatorov, silno nepreryivnyie polugruppyi i matrichnyie vesa Makenhaupta [Functional models of self-adjoint operators, strongly continuous semigroups and Muckenhout matrix weights], *Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, vol. 75 (2), pp. 69–126.