УДК 517.968

Т. А. Комлева[1], **Л. И. Плотникова**[2], **А. В. Плотников**[1,3]
[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры
[2]Одесский национальный политехнический университет
[3]Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

В 1969 г. F. S. de Blasi и F. Iervolino рассмотрели многозначное дифференциальное уравнение (дифференциальное уравнение с производной Хукухары). В дальнейшем многие авторы изучали вопросы существования, единственности и свойства решений многозначных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, исследовали импульсные и управляемые системы, а также для таких систем была обоснована возможность применения асимптотических методов (метод усреднения). В последнее время все эти исследования трансформировались в теорию многозначных уравнений в качестве самостоятельной теории. Также данная теория имеет широкое применение в теории управления, дифференциальных включений, нечетких системах и др. В данной работе доказана теорема существования и единственности для одного из типов многозначных интегральных уравнений Вольтерра.

MSC: 45D05, 03E75.
Ключевые слова: многозначность, интегральное уравнение, существование, единственность .

Введение. Развитие дифференциального и интегрального исчисления в метрических пространствах стало объектом пристального внимания многих исследователей, что привело к появлению теории многозначных уравнений. В последнее время в рамках этой теории были рассмотрены свойства решений многозначных дифференциальных уравнений, многозначных дифференциальных включений, многозначных интегро-дифференциальные уравнений и многозначного интегральные уравнения, а также исследовались импульсные многозначные системы и управляемые многозначные системы. Обоснована возможность применения для таких систем асимптотических методов (см.: [1–6] и ссылки в них).

В данной работе мы докажем теорему существования и единственности для одного из типов многозначных интегральных уравнений Вольтерра.

Основные результаты

1. Основные определения и обозначения. Пусть $conv(R^n)$ — метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min_{r\geqslant 0} \left\{ B \subset S_r(A),\ \ A \subset S_r(B) \right\},$$

где $A, B \in conv(R^n)$, $S_r(A)$ — r-окрестность множества A.

Кроме обычных теоретико-множественных операций рассмотрим в пространстве $conv(R^n)$ еще две: операции суммы и умножения на скаляр:

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A,\, b \in B\} \quad \text{и} \quad \lambda A = \{\lambda a \,:\, a \in A,\, \lambda \in R\}.$$

Получена 28.08.2016

Также справедливы следующие свойства

1. $(conv(R^n), h)$ — полное метрическое пространство.

2. $h(A+C, B+C) = h(A, B)$.

3. $h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| h(A, B)$ для всех $A, B, C \in conv(R^n)$ и $\lambda \in R$.

Однако пространство $conv(R^n)$ не является линейным пространством относительно приведенных операций, так как в общем случае нельзя ввести понятие противоположного для $A \in conv(R^n)$ элемента, то есть в общем случае $A + (-1)A \neq \{0\}$, хотя, если $A \in R^n$, то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве $conv(R^n)$ приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. В данной статье мы будем использовать разность Хукухары [11].

Определение 1. *[11] Пусть $X, Y \in conv(R^n)$, а множество $Z \in conv(R^n)$ такое, что $X = Y + Z$. Тогда множество Z мы будем называть разностью по Хукухаре множеств X и Y и писать $Z = X \overset{h}{-} Y$.*

Основными свойствами разности Хукухары являются следующие:

1) если разность Хукухары двух множеств $A \overset{h}{-} B$ существует, то она единственная;

2) $A \overset{h}{-} A = \{0\}$, $\forall A \in conv(R^n)$;

3) $(A+B) \overset{h}{-} B = A$, $\forall A, B \in conv(R^n)$.

2. Интегральные уравнения. Рассмотрим следующие многозначные интегральные уравнения Вольтерра

$$X(t) + \int_0^t F(t, s, X(s))ds = G(t), \tag{1}$$

и

$$X(t) = G(t) + \int_0^t F(t, s, X(s))ds, \tag{2}$$

где $s \leqslant t$, $s, t \in [0, T]$, $X : [0, T] \to conv(R^n)$, $F : [0, T] \times [0, T] \times conv(R^n) \to conv(R^n)$ и $G : [0, T] \to conv(R^n)$ — известные многозначные отображения. Интеграл понимается в смысле Хукухары [11].

Определение 2. *Многозначное отображение $X : [0, \tau] \to conv(R^n)$ называется решением интегрального уравнения (1) ((2)) на $[0, \tau]$, если оно непрерывно и удовлетворяет интегральному уравнению (1) ((2)) на интервале $[0, \tau] \subset [0, T]$.*

Замечание 1. *Условия существования решения для многозначного интегрального уравнения (2) при различных условиях были получены в работах [7–10]. Они обобщают результаты, полученные для обычных интегральных уравнений на многозначный случай.*

В данной работе мы рассмотрим уравнение (1). Используя определение 1, представим многозначное интегральное уравнение (1) в следующем виде

$$X(t) = G(t) \stackrel{h}{-} \int_0^t F(t, s, X(s))ds. \tag{3}$$

Замечание 2. *Очевидно, разность Хукухары в (3) может не существовать для всех* $t > 0$. *Например, если* $n = 2$ *и* $A = \{a \in R^2 : \|a\| \leqslant 1\}$, $B = \{b \in R^2 : |b_i| \leqslant 1, i = 1, 2\}$, *то разность Хукухары* $A \stackrel{h}{-} tB$ *не существует для всех* $t > 0$. *Для* $t \in (0, \sqrt{2})$ *будет выполняться условие* $A \supset tB$. *Следовательно, если* $G(t) \equiv A$ *и* $F(t, s, X(s)) \equiv B$, *то разность в (3) не существует для всех* $t > 0$.

Также, если $n \geqslant 1$, $A, B \in conv(R^n)$ *и* $diam(A) < diam(B)$, *то разность Хукухары* $A \stackrel{h}{-} B$ *не существует. Например,* $A = B = \{a \in R^2 : \|a\| \leqslant 1\}$, *то разность Хукухары* $A \stackrel{h}{-} tB$ *не существует для всех* $t > 1$. *Следовательно, если* $G(t) \equiv A$ *и* $F(t, s, X(s)) \equiv B$, *то разность в (3) не существует для всех* $t > 1$.

Пусть $CC(R^n)$ $(n \geqslant 2)$ — пространство непустых строго выпуклых замкнутых подмножеств пространства R^n [5, 12, 13] и всех элементов пространства R^n.

Замечание 3. *Если* $A, B \in CC(R^n)$ *и* $A + C = B$, *то* $C \in CC(R^n)$ *[5, 12, 13].*

Замечание 4. *Если* $A, B \in CC(R^n)$ *и существует* $c \in R^n$ *такое, что* $A + c \subset B$, *то существует* $C \in CC(R^n)$ *такое, что* $A + C = B$, *то есть* $C = B \stackrel{h}{-} A$ *[5, 12, 13].*

Теперь докажем существование единственного решения уравнения (3) на интервале $[0, d] \subset [0, T]$.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q = \{(t, s, X) \in [0, T] \times [0, T] \times CC(R^n)\}$ *выполняются следующие условия:*

1) для каждого фиксированного X *многозначное отображение* $F(t, s, X)$ *непрерывно на* $[0, T] \times [0, T]$;

2) многозначное отображение $F(t, s, X)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* X *с постоянной* $L > 0$, *то есть* $h(F(t, s, X'), F(t, s, X'')) \leqslant Lh(X', X'')$ *для всех* $(t, s, X'), (t, s, X'') \in Q$;

3) существует непрерывная функция $m(s) > 0$ *такая, что* $h(F(t, s, X), \{0\}) \leqslant m(s)$ *для всех* $(t, s, X) \in Q$;

4) многозначное отображение $G(\cdot)$ *непрерывно на* $[0, T]$;

5) $intG(t) \neq \emptyset$ *для всех* $t \in [0, T]$.

Тогда уравнение (3) имеет единственное решение на интервале $[0, d]$ *и* $d \in (0, T]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^t m(s)ds \leqslant \frac{\theta(t)}{2} \quad \text{для всех } t \in [0, d],$$

где $\theta(t) = \min\limits_{\|\psi\|=1} |C(G(t), \psi) - C(G(t), -\psi)|$, $C(G, \psi) = \max\limits_{x \in G}(x_1\psi_1 + ... + x_n\psi_n)$.

Доказательство. Вначале докажем существование решения уравнения (3) на интервале $[0,d]$.

a) Так как $|F(t,s,X)| \leqslant m(s)$ for $(t,s,X) \in [0,T]\times[0,T]\times CC(R^n)$, тогда $F(t,s,X) \subset S_{m(s)}(0)$. Следовательно,

$$\int_0^t F(t,s,X)ds \subset \int_0^t S_{m(s)}(0)ds = S_{\int_0^t m(s)ds}(0).$$

Обозначим через $S(t) = S_{\int_0^t m(s)ds}(0)$. Очевидно, что если $0 < t_1 < t_2 < T$, то $\{0\} \subset S(0) \subset S(t_1) \subset S(t_2) \subset S(T)$.

Так как $G(t) \in CC(R^n)$ и $intG(t) \neq \emptyset$, то существует такое $d > 0$, что множество $S(t)$ может быть вложено в множество $G(t)$ для всех $t \in [0,d]$ (то есть существует $\zeta(t) \in R^n$ такое, что $S(t)+\zeta(t) \subset G(t)$) и не может быть вложено для $t > d$. И, следовательно, $d \in [0,T]$ такое, что должно выполняться неравенство $\int_0^t m(s)ds \leqslant \frac{\theta(t)}{2}$ для всех $t \in [0,d]$.

Отсюда, для всех $(t,s,X) \in Q_1 = \{(t,s,X) \in [0,d]\times[0,d]\times CC(R^n)\}$ множество $\int_0^t F(t,s,X)ds$ вложимо в множество $G(t)$.

b) Так как $F(t,s,X) \in CC(R^n)$ для всех $(t,s,X) \in Q_1$, то $\int_0^t F(t,s,X)ds \in CC(R^n)$ для всех $(t,s,X) \in Q_1$ [12]. Следовательно, так как $G(t) \in CC(R^n)$ и множество $\int_0^t F(t,s,X)ds$ может быть вложено в множество $G(t)$ для всех $t \in [0,d]$, то разность Хукухары $G(t)\overset{h}{-}\int_0^t F(t,s,X)ds$ существует для всех $(t,s,X) \in Q_1$ [12].

c) Теперь возьмем $b > 0$ такое, что $b = \lambda M \int_0^d m(s)ds$. Построим следующую последовательность многозначных отображений

$$X^0(t) = G(t),\ X^k(t) = G(t)\overset{h}{-}\lambda\int_0^t K(t,s)F(s,X^{k-1}(s))ds \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant d. \quad (4)$$

Из пункта b), $X^k(t)$ существует и $X^k(t) \in CC(R^n)$ для всех $k \in N$ и $t \in [0,d]$. Также из условий 1), 2) и 4) теоремы многозначные отображения $X^k(t)$ непрерывны на $[0,d]$ для всех $k \in N$.

Также

$$h(X^k(t),G(t)) \leqslant h\left(G(t)\overset{h}{-}\int_0^t F(t,s,X^{k-1}(s))ds, G(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant h\left(\int_0^t F(t,s,X^{k-1}(s))ds, \{0\}\right) \leqslant \int_0^t m(s)ds \leqslant b.$$

Отсюда получаем, что последовательность отображений $\{X^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно ограничена: $h(X^k(t), G(t)) \leqslant h(G(t), \{0\}) + b \leqslant g + b$, где $g = \sup\limits_{t\in[0,d]} h(G(t), 0)$.

Теперь покажем, что последовательность $\{X^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является фундаментальной последовательностью. Возьмем произвольные $m, p \in N$. Тогда

$$h(X^{m+p}(t), X^p(t)) \leqslant h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X^{m+p-1}(s))ds, \int\limits_0^t F(t,s,X^{p-1}(s))ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^t h(X^{m+p-1}(s), X^{p-1}(s))ds.$$

Отсюда,

$$h(X^{m+p}(t), X^p(t)) \leqslant L^p \overbrace{\int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^{t_{p-1}}}^{p} h(X^m(t_p), G(t_p))dt_p \ldots dt_1 \leqslant \frac{(g+b)L^p d^p}{p!}.$$

Следовательно, последовательность $\{X^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является последовательностью Коши. Ее предел существует и является непрерывным многозначным отображением, которое обозначим через $X(t)$. В силу условий теоремы в уравнение (4) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Мы получаем, что многозначное отображение $X(t)$ удовлетворяет уравнению (3) на интервале $[0,d]$, то есть $X(t)$ является решением уравнения (3) на интервале $[0,d]$.

Теперь докажем единственность. Предположим, что существуют два различных решения $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ уравнения (3) на $[0,d]$, тогда $\delta = \max\limits_{t\in[0,d]} h(X(t), Y(t)) > 0$.

Так как

$$X(t) = G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,X(s))ds \quad \text{и} \quad Y(t) = G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,Y(s))ds,$$

то

$$h(X(t), Y(t)) = h\left(G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,X(s))ds, G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,Y(s))ds\right) =$$

$$= h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))ds, \int\limits_0^t F(t,s,Y(s))ds\right) \leqslant \int\limits_0^t h(F(t,s,X(s)), F(t,s,Y(s)))ds \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^t h(X(s), Y(s))ds \leqslant L\delta t \leqslant L\delta d.$$

Следовательно,

$$h(X(t),Y(t)) \leqslant L\int\limits_0^t L\delta s\,ds \leqslant \frac{L^2\delta t^2}{2!} \leqslant \frac{L^2\delta d^2}{2!},\ \ldots,\ h(X(t),Y(t)) \leqslant \frac{L^k\delta d^k}{k!}.$$

Тогда $\delta = \max\limits_{t\in[0,d]} h(X(t),Y(t)) \leqslant \frac{L^k\delta d^k}{k!}$. Отсюда, $1 \leqslant \frac{L^k d^k}{k!}$ для любого $k \in N$, что противоречит $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{L^k d^k}{k!} = 0$. Теорема доказана.

Заключение. Можно получить аналогичный результат, если вместо пространства $CC(R^n)$ рассмотреть пространство всех непустых M-строго выпуклых замкнутых подмножеств пространства R^n [13, 14] и всех элементов пространства R^n, то есть $MCC(R^n)$.

1. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi. – Cambridge Scientific Publishers, 2006. – 204 p.
2. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik // de Gruyter Stud. Math., Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co. – 2011. – Vol. 40. – 309 p.
3. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравненения с четкой и нечеткой правой частью. Асимптотические методы / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 192 с.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 355 с.
5. **Половинкин Е. С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е. С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014. – 597 с.
6. **Tolstonogov A.** Differential inclusions in a Banach space / A. Tolstonogov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 308 p.
7. **Babenko V.** Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces / V. Babenko // Applied Mathematics and Computation. – 2016. – V. 291. – P. 354–372.
8. **Plotnikov A. V.** Existence and uniqueness theorem for set integral equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik // J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. – 2013. – V. 5, № 2. – P. 65–72.
9. **Plotnikov A. V.** Existence and Uniqueness Theorem for Set-Valued Volterra Integral Equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik // American Journal of Applied Mathematics and Statistics. – 2013. – V. 1, № 3. – P. 41–45.
10. **Plotnikov A. V.** Existence and Uniqueness Theorem for Set Volterra Integral Equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik. // J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. – 2014. – V. 6, № 3. – P. 1–7.
11. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.

12. **Половинкин Е. С.** Сильно выпуклый анализ / Е. С. Половинкин // Математический сборник. – 1996. – Т. 187, № 2. – С. 103–130.
13. **Половинкин Е. С.** Элементы выпуклого и строго выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. – М.: Физматлит, 2007, 438 с.
14. **Балашов М. В.** М-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества / М. В. Балашов, Е. С. Половинкин // Математический сборник. – 2000. – Т. 191, № 1. – Р. 27–64.

Комлева Т. О., Плотнікова Л. І., Плотніков А. В.
Умови існування та єдиності розв'язку для багатозначних інтегральних рівнянь Вольтерра

Резюме

У 1969 р. F. S. de Blasi і F. Iervolino розглянули багатозначне диференціальне рівняння (диференціальне рівняння з похідною Хукухари). Надалі багато авторів вивчали питання існування, єдиності та властивості розв'язків багатозначних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, досліджували імпульсні і керовані системи, а також для таких систем була обгрунтована можливість застосування асимптотичних методів (метод усереднення). Останнім часом всі ці дослідження трансформувалися в теорію багатозначних рівнянь в якості самостійної теорії. Також дана теорія має широке застосування в теорії управління, диференціальних включень, нечітких системах та ін. У даній роботі доведена теорема існування та єдиності для одного з типів багатозначних інтегральних рівнянь Вольтерра.
Ключові слова: багатозначність, інтегральне рівняння, існування, единость.

Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V.
Conditions of existence and uniqueness of solutions for set-valued Volterra integral equation

Summary

In 1969, F. S. de Blasi and F. Iervolino examined set-valued differential equation (differential equation with derivative Hukuhara). In the future, many authors have studied the question of the existence, uniqueness and properties of set-valued solutions of differential and integral-differential equations, higher-order equations, investigated the impulse and control systems, as well as the possibility of using the asymptotic methods (the averaging method) has been proved for such systems. In recent years, all of these studies were transformed into the theory of set-valued equations as an independent theory. As this theory is widely used in control theory, differential inclusions, fuzzy systems, and others. In this paper we proved the existence and uniqueness theorem for one of the types of set-valued Volterra integral equations.
Key words: set-valued, integral equation, existence, uniqueness.

References

1. Lakshmikantham, V., Granna Bhaskar, T. and Vasundhara Devi J. (2006). *Theory of set differential equations in metric spaces.* Cambridge Scientific Publishers, 204 p.

2. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. and Skripnik, N. V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities.* de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
3. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2009). *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods.* Odessa: AstroPrint, 192 p.
4. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. and Vityuk, A. N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods.* Odessa: AstroPrint, 355 p.
5. Polovinkin, E. S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions.* Moscow: Fizmatlit, 597 p.
6. Tolstonogov, A. (2000). *Differential inclusions in a Banach space.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 308 p.
7. Babenko, V. (2016). Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces. *Applied Mathematics and Computation*, № 291, P. 354–372.
8. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2013). Existence and uniqueness theorem for set integral equations. *J. Adv. Res. Dyn. Control Syst.*, Vol. 5, № 2, P. 65–72.
9. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2013). Existence and Uniqueness Theorem for Set-Valued Volterra Integral Equations. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 1, № 3, P. 41–45.
10. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2014). Existence and Uniqueness Theorem for Set Volterra Integral Equations. *J. Adv. Res. Dyn. Control Syst.*, Vol. 6, № 3, P. 1–7.
11. Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, № 10, P. 205–223.
12. Polovinkin, E. S. (1996). Strongly convex analysis. *Sb. Math.*, Vol. 187, № 2, P. 259–286.
13. Polovinkin, E. S., Balashov, M. V. (2004). *Elements of Convex and Strongly Convex Analysis.* Moscow: Fizmatlit, 438 p.
14. Balashov, M. V., Polovinkin, E. S. (2000). M-strongly convex subsets and their generating sets. *Sb. Math.*, Vol. 191, № 1, P. 25–60.