ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 2(28).– С. 63–75

УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

БЛОЧНАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТИПА В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Для линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой имеют вид абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к блочно-диагональному виду в резонансном случае.
MSC: 34A34, 34A25.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье .

Введение. В теории дифференциальных уравнений важной задачей является задача разделения линейной однородной дифференциальной системы n-ого порядка на k независимых систем порядков $n_1, n_2, ..., n_k$ $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$, в частности, разделения этой системы на n независимых дифференциальных уравнений первого порядка (полное разделение). Эта задача рассматривалась, например, в [1–8]. Очевидно, что построение в явном виде преобразования, приводящего к разделённой системе, в общем случае невозможно. Такое построение фактически предполагает интегрирование самой исходной системы. Поэтому в указанных исследованиях не ставилась задача явного построения этого преобразования, а лишь устанавливались условия его существования, исследовались его свойства и возможность его приближённого построения, в частности, в форме асимптотических рядов. Важным также являлся вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы тем же классам, что и элементы матрицы исходной системы.

В работах автора [9–12] рассматривалась задача разделения линейной однородной системы вида

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t,\varepsilon) + \mu B(t,\varepsilon,\theta))x, \tag{1}$$

где $\Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon), ..., \lambda_n(t,\varepsilon))$, а функции $\lambda_j(t,\varepsilon)$ $(j = \overline{1,n})$ в определённом смысле медленно меняющиеся, μ – малый положительный параметр, элементы матрицы $B(t,\varepsilon,\theta)$ представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой $\varphi(t,\varepsilon) = \frac{d\theta}{dt}$. При этом были исследованы случаи как отсутствия, так и наличия резонанса, в том числе особый случай. Для каждого из этих случаев были получены условия, при которых элементы преобразующей матрицы имеют структуру, аналогичную структуре элементов матрицы $B(t,\varepsilon,\theta)$. В работе [13] исследовалась задача расщепления линейной однородной системы с коэффициентами аналогичного типа на две подсистемы меньшей размерности в резонансном случае. В настоящей статье исследуется возможность расщепления линейной системы на несколько независимых систем меньших размерностей также в резонансном случае.

Получена 29.07.2016 © Щёголев С. А., 2016

Обозначения. Пусть $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon: \ t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$.

Определение 1. Скажем, что функция $p(t, \varepsilon)$, в общем случае комплекснозначная, принадлежит классу $S(m; \varepsilon_0)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, если $t, \varepsilon \in G$ и

1) $p(t, \varepsilon) \in C^m(G)$ по t,

2) $d^k p(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |p_k^*(t, \varepsilon)| < +\infty$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$.

Медленная изменяемость функции понимается здесь в смысле принадлежности этой функции классу $S(m; \varepsilon_0)$. Примерами функций этого класса могут служить в общем случае комплекснозначные, ограниченные вместе со своими производными до m-го порядка включительно, функции, зависящие от "медленного времени"$\tau = \varepsilon t$: $\sin \tau, \mathrm{arctg} \tau$ и т. д.

Определение 2. Скажем, что функция $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ принадлежит классу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если эта функция представима в виде:

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp\left(in\theta(t, \varepsilon)\right),$$

причём

1) $f_n(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0), \ d^k f_n(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t, \varepsilon)$ $(n \in \mathbb{Z}, \ 0 \leqslant k \leqslant m)$,

2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{G(\varepsilon_0)} |f_{nk}(t, \varepsilon)| < +\infty$,

3) $\theta(t, \varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau, \ \varphi(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+, \ \varphi(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0), \ \inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t, \varepsilon) > 0$.

В частности, если $\varepsilon = 0$: $\varphi = \mathrm{const}$, $\theta = \varphi t$, $f_n = \mathrm{const}$, то функции класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ превращаются $2\pi/\varphi$-периодические функции переменной t:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi t},$$

такие, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < +\infty.$$

Множество функций класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ образует линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство ввведением нормы $\| \cdot \|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)}$. Справедлива следующая цепочка включений:

$$F(0; \varepsilon_0; \theta) \supset F(1; \varepsilon_0; \theta) \supset \cdots \supset F(m; \varepsilon_0; \theta).$$

Пусть заданы две функции класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$:

$$u(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

$$v(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Определим их произведение по формуле [14]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, что $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Сформулируем следущие свойства нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Пусть $u,v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k = \mathrm{const}$. Тогда
1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k|\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,
2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,
3) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Для любой $f(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,u)\exp(-inu)du.$$

Пусть $A(t,\varepsilon,\theta) = (a_{jk}(t,\varepsilon,\theta))$ – $(M\times K)$-матрица, элементы которой принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Обозначим:

$$(A)_{jk} = a_{jk}\ (j=\overline{1,M}, k=\overline{1,K}),\ \|A\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \max_{1\leqslant j\leqslant M}\sum_{k=1}^{K}\|(A)_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Основные результаты

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = H_j(\varphi)x_j + \mu\sum_{k=1}^{M} B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)x_k,\ j=\overline{1,M}, \tag{2}$$

где $x_j = \mathrm{colon}(x_{j,1},...,x_{j,m_j})$ $(j=\overline{1,M})$, $m_1+...+m_M = \widetilde{M}$ – общий порядок системы (2),

$$H_j(\varphi) = \begin{pmatrix} ir_j\varphi & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & ir_j\varphi & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ir_j\varphi & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & ir_j\varphi \end{pmatrix}$$

— жордановы блоки размерностей n_j; $r_j \in \mathbb{Z}$; $B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j\times n_k)$-матрицы с элементами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $\varphi(t,\varepsilon)$ – функция, фигурирующая в определении класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $\mu\in(0,1)$. В этом смысле мы имеем дело с резонансным случаем.

Изучается вопрос об условиях существования преобразования вида

$$x_j = \sum_{k=1}^{M} L_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\tilde{x}_k,\ j=\overline{1,M}, \tag{3}$$

где элементы $(n_j\times n_k)$-матриц L_{jk} $(j,k=\overline{1,M})$ принадлежат классу

$F(m-1;\varepsilon^*;\theta)$ $(0<\varepsilon^*\leqslant\varepsilon_0)$), приводящего систему (2) к виду:

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt}=D_{n_j}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\tilde{x}_j,\ \ j=\overline{1,M}, \tag{4}$$

где элементы $(n_\times n_j)$-матриц D_{n_j} $(j=\overline{1,M})$ также принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon^*;\theta)$.

В случае $M=2$ соответствующий результат был получен в работе [13].

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим линейную однородную систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_j}{dt}=\left(J_{n_j}+\sum_{s=1}^{q}P_{js}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)X_j-X_j\left(J_{n_k}+\sum_{s=1}^{q}P_{js}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)+$$
$$+\sum_{\substack{l=1\\(l\neq j)}}^{N}\left(\sum_{s=1}^{q}P_{jls}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)X_l,\ \ j=\overline{1,N}, \tag{5}$$

где X_j – $(n_j\times n_k)$-матрицы, $P_{js}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j\times n_j)$-матрицы, $P_{js}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_k\times n_k)$-матрицы, $P_{jls}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j\times n_l)$-матрицы с элементами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $n_1+...+n_N=\widetilde{N}$.

$$J_{n_j}=\begin{pmatrix}0&0&...&0&0\\1&0&...&0&0\\...&...&...&...&...\\0&0&...&0&0\\0&0&...&1&0\end{pmatrix},\ J_{n_k}=\begin{pmatrix}0&0&...&0&0\\1&0&...&0&0\\...&...&...&...&...\\0&0&...&0&0\\0&0&...&1&0\end{pmatrix}$$

– жордановы блоки размерностей n_j и n_k соответственно, все диагональные элементы которых равны нулю, $\mu\in(0,1)$.

Введём блочные матрицы

$$X=\begin{pmatrix}X_1&O_{n_1,n_k}&...&O_{n_1,n_k}\\O_{n_2,n_k}&X_2&...&O_{n_2,n_k}\\...&...&...&...\\O_{n_N,n_k}&O_{n_N,n_k}&...&X_N\end{pmatrix},$$

$$J^{(1)}=\begin{pmatrix}J_{n_1}&O_{n_1,n_2}&...&O_{n_1,n_N}\\O_{n_2,n_1}&J_{n_2}&...&O_{n_2,n_N}\\...&...&...&...\\O_{n_N,n_1}&O_{n_N,n_2}&...&J_{n_N}\end{pmatrix},\ J^{(2)}=\begin{pmatrix}J_{n_k}&O_{n_k,n_k}&...&O_{n_k,n_k}\\O_{n_k,n_k}&J_{n_k}&...&O_{n_k,n_k}\\...&...&...&...\\O_{n_k,n_k}&O_{n_k,n_k}&...&J_{n_k}\end{pmatrix},$$

$$P_s^{(1)}=\begin{pmatrix}P_{1s}^{(1)}&O_{n_1,n_2}&...&O_{n_1,n_N}\\O_{n_2,n_1}&P_{2s}^{(1)}&...&O_{n_2,n_N}\\...&...&...&...\\O_{n_N,n_1}&O_{n_N,n_2}&...&P_{Ns}^{(1)}\end{pmatrix},\ P_s^{(2)}=\begin{pmatrix}P_{1s}^{(2)}&O_{n_k,n_k}&...&O_{n_k,n_k}\\O_{n_k,n_k}&P_{2s}^{(2)}&...&O_{n_k,n_k}\\...&...&...&...\\O_{n_k,n_k}&O_{n_k,n_k}&...&P_{Ns}^{(2)}\end{pmatrix},$$

$$P_s=\begin{pmatrix}O_{n_1,n_1}&P_{12s}&...&P_{1Ns}\\P_{21s}&O_{n_2,n_2}&...&P_{2Ns}\\...&...&...&...\\P_{N1s}&P_{N2s}&...&O_{n_N,n_N}\end{pmatrix},$$

где $O_{r,p}$ – нулевая матрица размерности $(r \times p)$.

Таким образом, матрица X имеет размерность $(\widetilde{N} \times Nn_k)$, матрица $J^{(1)}$ – размерность $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$, матрица $J^{(2)}$ – размерность $(Nn_k \times Nn_k)$, матрицы $P_s^{(1)}$ – размерность $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$, матрицы $P_s^{(2)}$ – размерность $(Nn_k \times Nn_k)$, матрицы P_s – размерность $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$.

Систему (5) тогда можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = \left(J^{(1)} + \sum_{s=1}^{q} P_s^{(3)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) X - X\left(J^{(2)} + \sum_{s=1}^{q} P_s^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right), \tag{6}$$

где $P_s^{(3)} = P_s^{(1)} + P_s$ $(s = \overline{1,q})$.

Лемма 1. *Существует $\mu_0 \in (0,1)$ такое, что для любых $\mu \in (0,\mu_0)$ существует преобразование вида*

$$X = \left(E_{\widetilde{N}} + \sum_{s=1}^{q} \Phi_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) Y \left(E_{Nn_k} + \sum_{s=1}^{q} \Psi_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right), \tag{7}$$

где Y – $(\widetilde{N} \times Nn_k)$-матрица, $E_{\widetilde{N}}$, E_{Nn_k} – единичные матрицы размерностей $\widetilde{N}$ и Nn_k соответственно, элементы $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$-матриц Φ_s и $(Nn_k \times Nn_k)$-матриц Ψ_s $s = \overline{1,q}$ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, приводящее уравнение (6) к виду:

$$\frac{dY}{dt} = \left(J^{(1)} + \textstyle\sum_{s=1}^{q} U_s(t,\varepsilon)\mu^s + \varepsilon \sum_{s=1}^{q} \widetilde{U}_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s + \mu^{q+1} W_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) Y -$$

$$-Y\left(J^{(2)} + \textstyle\sum_{s=1}^{q} V_s(t,\varepsilon)\mu^s + \varepsilon \sum_{s=1}^{q} \widetilde{V}_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s + \mu^{q+1} W_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right), \tag{8}$$

где $U_s(t,\varepsilon)$, $V_s(t,\varepsilon)$ $(s = \overline{1,q})$ – матрицы размерностей $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$ и $(Nn_k \times Nn_k)$ соответственно с элементами из класса $S(m;\varepsilon_0)$; $\widetilde{U}_s(t,\varepsilon,\theta)$, $\widetilde{V}_s(t,\varepsilon,\theta)$ $(s = \overline{1,q})$ – матрицы размерностей $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$ и $(Nn_k \times Nn_k)$ соответственно с элементами из класса $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$; W_1, W_2 – матрицы размерностей $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$ и $(Nn_k \times Nn_k)$ соответственно с элементами из класса $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Доказательство леммы 1 приведено в работе [13].

Рассмотрим теперь систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_j}{dt} = \left(J_{n_j} + \sum_{s=1}^{q} P_{js}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) X_j - X_j\left(J_{n_k} + \sum_{s=1}^{q} P_{js}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) + R_j(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq j)}}^{N} \left(\sum_{s=1}^{q} P_{jls}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) X_l - \mu^2 X_j \sum_{l=1}^{N} A_l(t,\varepsilon,\theta) X_l, \ \ j = \overline{1,N}, \tag{9}$$

где матрицы $P_{js}^{(1)}$, $P_{js}^{(2)}$, P_{jls} – те же, что и в системе (5), $R_j(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j \times n_k)$-матрицы, $A_l(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_k \times n_l)$-матрицы с элементами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Вводя обозначения

$$R(t,\varepsilon,\theta)=\begin{pmatrix} R_1(t,\varepsilon,\theta) & O_{n_1,n_k} & \dots & O_{n_1,n_k}\\ O_{n_2,n_k} & R_2(t,\varepsilon,\theta) & \dots & O_{n_2,n_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ O_{n_N,n_k} & O_{n_N,n_k} & \dots & R_N(t,\varepsilon,\theta)\end{pmatrix},$$

$$[A(t,\varepsilon,\theta),X]=\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N A_l(t,\varepsilon,\theta)X_l & O_{n_k,n_k} & \dots & O_{n_k,n_k}\\ O_{n_k,n_k} & \sum_{l=1}^N A_l(t,\varepsilon,\theta)X_l & \dots & O_{n_k,n_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ O_{n_k,n_k} & O_{n_k,n_k} & \dots & \sum_{l=1}^N A_l(t,\varepsilon,\theta)X_l\end{pmatrix}$$

(матрица R имеет размерность $(\widetilde{N}\times Nn_k)$, а матрица $[A,X]$ – размерность $(Nn_k\times Nn_k)$), запишем систему (9) в виде одного нелинейного матричного уравнения:

$$\frac{dX}{dt}=\left(J^{(1)}+\sum_{s=1}^{q}P_s^{(3)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)X-X\left(J^{(2)}+\sum_{s=1}^{q}P_s^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)+$$
$$+R(t,\varepsilon,\theta)-\mu^2X[A(t,\varepsilon,\theta),X] \tag{10}$$

(матрицы X, $P_s^{(2)}$, $P_s^{(3)}$ те же, что и в уравнении (6)).

Лемма 2. *Пусть уравнение (10) удовлетворяет одной из следующих совокупностей условий I, II, III:*

I. 1) $\widetilde{N}<Nn_k$,

2) $\sum_{l=1}^{\nu}\Gamma_0((R)_{l,Nn_k-\nu+l})\equiv 0$, $\nu=\overline{1,\widetilde{N}}$,

3) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Gamma_0((P_0^{(1)})_{1,Nn_k})|>0$;

II. 1) $\widetilde{N}=Nn_k$,

2) $\sum_{l=1}^{\nu}\Gamma_0((R)_{l,Nn_k-\nu+l})\equiv 0$, $\nu=\overline{1,\widetilde{N}}$,

3) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Gamma_0((P_0^{(1)})_{1,\widetilde{N}}-(P_0^{(2)})_{1,\widetilde{N}})|>0$;

III. 1) $\widetilde{N}>Nn_k$,

2) $\sum_{l=1}^{\nu}\Gamma_0((R)_{l,Nn_k-\nu+l})\equiv 0$, $\nu=\overline{1,Nn_k}$,

3) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Gamma_0((P_0^{(1)})_{1,\widetilde{N}})|>0$.

Тогда существует $\mu_1\in(0,1)$ такое, что для любых $\mu\in(0,\mu_1)$ и для любого $q\in\mathbb{N}$ существует преобразование вида

$$X=\sum_{s=0}^{q}\Xi_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s+\Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu), \tag{11}$$

где элементы $(\widetilde{N}\times Nn_k)$-матриц Ξ_s $(s=\overline{0,2q-1})$, $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$-матрицы Φ и $(Nn_k\times Nn_k)$-матрицы Ψ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $\forall\ \mu\in(0,\mu_1)$, приводящее уравнение (10) к виду:

$$\frac{dY}{dt}=\left(J^{(1)}+\sum_{l=1}^{q}U_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)Y-Y\left(J^{(2)}+\sum_{l=1}^{q}V_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)+$$

$$+\varepsilon(\widetilde{U}(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y - Y\widetilde{V}(t,\varepsilon,\theta,\mu)) + \mu^{q+1}(\widetilde{W}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y - Y\widetilde{W}_2(t,\varepsilon,\theta,\mu))+$$
$$+\varepsilon\widetilde{R}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}\widetilde{R}_2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu), \quad (12)$$

где U_l, V_l $(l = \overline{1,q})$ *– матрицы размерностей* $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$ *и* $(Nn_k \times Nn_k)$ *соответственно с элементами из класса* $S(m;\varepsilon_0)$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ *– матрицы размерностей* $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$ *и* $(Nn_k\times Nn_k)$ *соответственно с элементами из класса* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$ *– матрицы размерностей* $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$ *и* $(Nn_k\times Nn_k)$ *соответственно с элементами из класса* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ *– матрицы размерности* $(\widetilde{N}\times Nn_k)$ *с элементами из классов* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ *соответственно,* $\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu)$ *– матрица-функция размерности* $(\widetilde{N}\times Nn_k)$, *обладающая свойствами: если* $Y\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *то* $\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $\forall\ \mu\in(0,\mu_1)$, *причём существует* $K_1\in(0,+\infty)$ *такое, что*

$$\|\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu)\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K_1\left(\|Y\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\right)^2,$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2 из работы [13].

Введём матрицы

$$U(t,\varepsilon,\mu) = \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l,\ V(t,\varepsilon,\mu) = \sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon)\mu^l,$$

где матрицы U_l, V_l $(l=\overline{1,q})$ определены в лемме 2.

Лемма 3. *Пусть уравнение (12) удовлетворяет следующим условиям:*
1) собственные значения $\lambda_{1j}(t,\varepsilon,\mu)$ $(j = \overline{1,\widetilde{N}}\ )$ *матрицы* $J^{(1)}+U(t,\varepsilon,\mu)$ *и* $\lambda_{2s}(t,\varepsilon,\mu)$ $(s=\overline{1,Nn_k})$ *матрицы* $J^{(2)}+V(t,\varepsilon,\mu)$ *таковы, что*

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}|\mathrm{Re}(\lambda_{1j}(t,\varepsilon,\mu)-\lambda_{2s}(t,\varepsilon,\mu))| \geq \gamma_0\mu^{q_0}$$

$(\gamma_0>0,\ 0<q_0\leqslant q;\ j=\overline{1,\widetilde{N}},\ s=\overline{1,Nn_k})$;
2) существуют $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$*-матрица* $L_1(t,\varepsilon,\mu)$ *и* $(Nn_k\times Nn_k)$*-матрица* $L_2(t,\varepsilon,\mu)$ *такие, что*
а) все элементы этих матриц принадлежат классу $S(m;\varepsilon_0)\subset F(m;\varepsilon_0;\theta)$,
б) существуют матрицы $L_1^{-1}(t,\varepsilon,\mu)$, $L_2^{-1}(t,\varepsilon,\mu)$,
причём $\|L_j^{-1}(t,\varepsilon,\mu)\|^*_{F(m\varepsilon_0,\theta)}\leqslant M_1\mu^{-\alpha}$, $M_1\in(0,+\infty)$, $\alpha\in[0,q]$, $j=1,2$,
в) $L_1^{-1}(J^{(1)}+U)L_1=\Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)$, $L_2(J^{(2)}+V)L_2^{-1}=\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu)$, *где* $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1,\widetilde{N}})$, $\Lambda_2=\mathrm{diag}(\lambda_{21},\ldots,\lambda_{2,Nn_k})$;
3) $q>q_0+\alpha-1/2$.

Тогда существует $\mu_2\in(0,1)$, $\beta\in(0,+\infty)$ *такие, что* $\forall\ \mu\in(0,\mu_2)$ *матричное дифференциальное уравнение (12) имеет частное решение* $Y(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ *такое, что все его элементы принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_1(\mu)=\min(\varepsilon_0,\beta\mu^{2q_0+2\alpha-1})$.

Доказательство. Произведём в уравнении (12) подстановку

$$Y=\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0+2\alpha}}\ L_1(t,\varepsilon,\mu)ZL_2(t,\varepsilon,\mu), \quad (13)$$

где Z – новая неизвестная $(\widetilde{N} \times Nn_k)$-матрица. Получим:

$$\frac{dZ}{dt} = \Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)Z - Z\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu) + \varepsilon(\widetilde{U}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z - Z\widetilde{V}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)) +$$

$$+\mu^{q+1}(\widetilde{W}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z - Z\widetilde{W}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)) + \frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0+2\alpha-1}}\ \widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu), \tag{14}$$

где $\widetilde{R}_3 = L_1^{-1}\widetilde{R}_1L_2^{-1}$, $\widetilde{R}_4 = L_1^{-1}\widetilde{R}_2L_2^{-1}$, $\widetilde{U}_1 = L_1^{-1}\widetilde{U}L_1 - \varepsilon^{-1}L_1^{-1}(dL_1/dt)$, $\widetilde{V}_1 = L_2\widetilde{U}L_2^{-1} + \varepsilon^{-1}(dL_2/dt)L_2^{-1}$, $\widetilde{W}_3 = L_1^{-1}\widetilde{W}_1L_1$, $\widetilde{W}_4 = L_2\widetilde{W}_2L_2^{-1}$.

Все элементы этих матриц принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. $\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu)$ – матрица-функция такая, что если $Z \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, то $\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём $K_2 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu)\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K_2\left(\|Z\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right)^2.$$

В силу выражений для матриц $\widetilde{R}_3$, $\widetilde{R}_4$, $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{W}_3$, $\widetilde{W}_4$ и условия 2б) леммы существует $K_3 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|\widetilde{R}_j\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{2\alpha}}\ (j=3,4),$$

$$\|\widetilde{U}_1\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{\alpha}},\ \|\widetilde{V}_1\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{\alpha}},$$

$$\|\widetilde{W}_j\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{\alpha}}\ (j=3,4).$$

Наряду с уравнением (14) рассмотрим матричное линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ_0}{dt} = \Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)Z_0 - Z_0\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu) +$$

$$+\frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{15}$$

Из результатов работы [15] следует, что условия леммы обеспечивают существование единственного частного решения $Z_0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ уравнения (15), все элементы которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём существует $K_0 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_0}{\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|\widetilde{R}_3\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|\widetilde{R}_4\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right). \tag{16}$$

Построим решение уравнения (14), все элементы которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_1;\theta)$ методом последовательных приближений, взяв в качестве начального приближения $Z_0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, а последующие определив как решения, все элементы которых принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ линейных неоднородных матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dZ_{\nu+1}}{dt}=\Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)Z_{\nu+1}-Z_{\nu+1}\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu)+$$

$$+\frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\varepsilon(\widetilde{U}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z_\nu-Z_\nu\widetilde{V}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu))+\mu^{q+1}(\widetilde{W}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z_\nu-Z_\nu\widetilde{W}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu))+$$

$$+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0+2\alpha-1}}\ \widetilde{\widetilde{\Xi}}_1(t,\varepsilon,\theta,Z_\nu,\mu),\ \nu=0,1,2,.... \tag{17}$$

Обозначим

$$\Omega=\left\{Z\in F(m-1;\varepsilon_0;\theta):\ \|Z-Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant d\ \right\}.$$

Несложно показать, что существует $K_4\in(0,+\infty)$ такое, что $\forall\ Z_1^*,Z_2^*\in\ \Omega$ выполнено неравенство:

$$\|\widetilde{\widetilde{\Xi}}_1(t,\varepsilon,\theta,Z_1^*,\mu)-\widetilde{\widetilde{\Xi}}_1(t,\varepsilon,\theta,Z_2^*,\mu)\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant K_4\|Z_1^*-Z_2^*\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Используя обычную методику принципа сжимающих отображений [16], легко установить, что если

$$K_0K_5\left(\frac{\varepsilon+\mu^{q+1}}{\mu^{q_0+\alpha}}\ 2^m\left(\|Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}+d\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{2q_0+2\alpha-1}}\ \left(\|Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}+d\right)^2\right)\leqslant d_0<d, \tag{18}$$

где $K_5=\max(K_2,K_3)$, то все приближения (17) не выходят за пределы Ω. И если

$$K_0K_6\left(2^m\frac{\varepsilon+\mu^{q+1}}{\mu^{q_0+\alpha}}+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{2q_0+2\alpha-1}}\right)<1, \tag{19}$$

где $K_6=\max(K_3,K_4)$, то процесс (17) сходится к решению уравнеия (14), все элементы которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_1;\theta)$. Неравенства (18), (19) выполняются в силу условия 3) леммы для достаточно малых μ и $\varepsilon/\mu^{2q_0+2\alpha-1}$. Поэтому $\varepsilon_1(\mu)=\min(\varepsilon_0,\beta\mu^{2q_0+2\alpha-1})$, где β – достаточно малая постоянная.

Лемма 3 доказана.

Следующие две леммы являются непосредственным следствием леммы 3.

Лемма 4. *Пусть уравнение (10) удовлетворяет всем условиям леммы 2, а уравнение (12), получающееся из уравнения (10) с помощью преобразования (11), удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда существует* $\mu_3\in(0,1)$, $\beta_1\in(0,+\infty)$ *такие, что для любых* $\mu\in(0,\mu_3)$ *уравнение (10) имеет частное решение* $X(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, *все элементы которого принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_2(\mu)=\min(\varepsilon_0,\beta_1\mu^{2q_0+2\alpha-1})$, *а* q_0,α *определены в лемме 2.*

Лемма 5. *Пусть система матричных дифференциальных уравнений (9) такова, что соответствующее ей матричное уравнение (10) удовлетворяет* *условиям леммы 4. Тогда существует* $\mu_4 \in (0,1)$, $\beta_2 \in (0,+\infty)$ *такие, что для любых* $\mu \in (0,\mu_4)$ *система (9) имеет частное решение* $X_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j = \overline{1,N})$, *все элементы которого принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_3(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_3(\mu) = \min(\varepsilon_0, \beta_2\mu^{2q_0+2\alpha-1})$, *а* q_0, α *определены в лемме 2.*

3. Основные результаты. Вернёмся к системе (2) и произведём в ней подстановку:

$$x_j = e^{ih_j\theta}y_j,\ j = \overline{1,M}, \tag{20}$$

где $y_j = \mathrm{colon}(y_{j,1},...,y_{j,m_j})$ $(j = \overline{1,M})$. Получим:

$$\frac{dy_j}{dt} = J_{n_j}y_j + \mu\sum_{k=1}^{M}\widetilde{B}_{jk}(t,\varepsilon,\theta)y_k,\ j = \overline{1,M}, \tag{21}$$

где $\widetilde{B}_{jk} = B_{jk}e^{i(h_k-h_j)\theta}$.

В системе (21) произведём подстановку:

$$y_j = z_j + \mu\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{M}Q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z_k,\ j = \overline{1,M}. \tag{22}$$

Потребовав выполнение условия блочной диагональности преобразованной системы, для $(n_j \times n_k)$-матриц Q_{jk} $(k \neq j)$ получим систему вида:

$$\frac{dQ_{jk}}{dt} = J_{n_j}Q_{jk} - Q_{jk}J_{n_k} + \widetilde{B}_{jk}(t,\varepsilon,\theta) + \mu(\widetilde{B}_{jj}(t,\varepsilon,\theta)Q_{jk} - Q_{jk}\widetilde{B}_{kk}(t,\varepsilon,\theta)+$$

$$+\mu\sum_{\substack{s=1\\(s\neq j,s\neq k)}}^{M}\widetilde{B}_{js}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sk} - \mu^2Q_{jk}\sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}}^{M}\widetilde{B}_{ks}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sk},\ j,k = \overline{1,M}\ (j\neq k). \tag{23}$$

Для n_j-векторов z_j получим систему

$$\frac{dz_j}{dt} = D_{n_j}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z_j,\ j = \overline{1,M}, \tag{24}$$

где

$$D_{n_j} = J_{n_j} + \mu\widetilde{B}_{jj}(t,\varepsilon,\theta) + \mu^2\sum_{\substack{s=1\\(s\neq j)}}^{M}\widetilde{B}_{js}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sj},\ j = \overline{1,M}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что система (23) распадается на M независимых подсистем, каждая из которых содержит $M-1$ неизвестную матрицу, и имеет вид (9). Поэтому на основании леммы 5 справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть каждая из систем (23) удовлетворяет условиям леммы 5. Тогда существует $\mu_5 \in (0,1)$, $\beta_3 \in (0,+\infty)$ такие, что для любых $\mu \in (0,\mu_5)$ существует преобразование вида (3) с коэффициентами из класса $F(m-1;\varepsilon_4(\mu);\theta)$, где $\varepsilon_4(\mu) = \beta_3\mu^{2q_0+2\alpha-1}$ (q_0 и α определены в лемме 2), приводящее систему (2) к блочно-диагональному виду (4), где матрицы D_{n_j} $(j = \overline{1,M})$ определяются выражениями (25).

Заключение. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2) установлены условия существования линейного преобразования, приводящего эту систему к блочно-диагональному виду, причём коэффициенты этого преобразования имеют структуру, аналогичную структуре коэффициентов системы (2).

1. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М. : Наука, 1973. – 431 с.
2. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения // Укр. матем. журн.– 1955. – **7**, № 4. – С. 403–418.
3. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Укр. матем. журн. – 1955. – **7**, № 1. – С. 47–55.
4. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. Фю – 1967ю – № 7. – С. 593–595.
5. **Митропольский Ю. А. Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова. – К. : Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. **Фещенко С. Ф. Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1966. – 251 с.
7. **Митропольский Ю. А., Белан Е. П.** О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость // Укр. матем. журн. – 1968. – 20, № 2. – С. 166–175.
8. **Амелькин К. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – 6, вип. Фіз.-мат.науки. – С.1 – 7.
9. **Щёголев С.А.** Об одном варианте теоремы полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівецький держ. ун-т ім. Ю. Федьковича. – 1999. – Вип. 4. – С. 282–289.
10. **Щёголев С.А.** Резонансный случай полного разделения линейной дифференциальной системы с медленно меняющимися паракметрами // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: ІМ НАНУ. – 1998. – Вип. 3. – С. 165–175.
11. **Щёголев С.А.** О полном разделении некоторых классов линейных однородных систем дифференциальных уравнений // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем і механ. – 2008. – Т. 13, вип. 18. – С. 119–131.
12. **Щёголев С. А.** Полное разделение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами в особом случае // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2 (13-14). – С. 119–131.
13. **Shchogolev S. A.** On the block separation of the linear homogeneous differential System with oscillating coefficients in the resonance case // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2014. – 63. – pp. 123–140.
14. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 935 с.
15. **Щоголев С. А.** Деякі задачі теорії коливань для диференціальних систем, які містять повільно змінні параметри: дис. доктора фізико-математичних наук. – Київ, 2012. – 290 с.
16. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Щоголев С. А.

Блочна діагоналізація лінійної однорідної диференціальної системи з коефіцієнтами коливного типу в резонансному випадку

Резюме

Для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою, отримано умови існування лінійного перетворення з коефіцієнтами аналогічної структури, що приводить цю систему до блочно-діагонального вигляду в резонансному випадку.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'е.

Shchogolev S. A.

The block diagonalization of the linear homogeneous differential system with coefficients of oscillating type in resonance case

Summary

For the linear homogeneous system of the differential equations, coefficients of which are represented by an absolutely and uniformly convergent Fourier series with slowly varying coefficients and frequency, conditions of existence of the linear transformation with coefficients of similar structure, this system leads to a block-diagonal form in a resonance case are obtained.
Key words: differential, slowly-varying, Fourier series.

References

1. Abgaryan, K. A. (1973), Matrix and asymptotic methods in the linear systems theory [Matrichnye i asimptoticheskie metody v teorii linejnyh sistem], Moscow: Nauka, 431 p.
2. Lyaschenko, N. Y. (1955), On a theorem of complete separation linear homogeneous system of differential equations and some separation properties of the matrix [Ob odnoj teoreme polnogo razdelenija linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij i nekotoryh svojstvah matricy razdelenija], *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 7, no. 4, pp. 403–418.
3. Lyaschenko, N. Y. (1955), On a theorem of linear division a system of differential equations with almost periodic coefficients [Ob odnoj teoreme razdelenija linejnoj sistemy differencial'nyh uravnenij s pochti periodicheskimi kojefficientami], *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 7, no. 1, pp. 47–55.
4. Kostin, V. V. (1967), Some issues of distribution and full asymptotic behavior of solutions of systems of ordinary differential equations [Deyaki pytannya povnogo rozpodilu ta asymptotychnoyi povedinky rozv'yazkiv system zvychajnyh dyferencialnyh rivnyan] *Dop. AN URSR Ser. F*, no. 7, pp. 593–595.
5. Mitropolskii, Yu. A., Samoylenko, A. M. & Kulik, V. L. (1990), Research on dichotomy of linear systems using Lyapunov functions [Issledovanie dihotomii linejnyh sistem s pomoshh'ju funkcij Ljapunova], K.: Science. Dumka, 272 p.
6. Feshenko, S. F., Shkil N. I. & Nikolenko, L. D. (1966), Asymptotic methods in the theory of linear differential equations [Asimptoticheskie metody v teorii linejnyh differencial'nyh uravnenij], K .: Science. Dumka, 251 p.

7. Mitropolskii, Yu. A. & Belan, E. P. (1968), On the construction of solutions almost diagonal systems of linear differential equations using a method that provides an accelerated convergence [O postroenii reshenij pochti diagonal'nyh sistem linejnyh differencial'nyh uravnenij s pomoshh'ju metoda, obespechivajushhego uskorennuju shodimost'], *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 20, no. 2, pp. 166–175.
8. Amelkin, K. V. (2001), On the decomposition of linear homogeneous systems ordinary differential equations [O rasshheplenii linejnyh odnorodnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij], *Visnyk Odesk. St. Univ.*, vol. 6, pp. 1–7.
9. Shchegolev, S. A. (1999), On a variant of the complete separation theorem for linear homogeneous system of differential equations [Ob odnom variante teoremy polnogo razdelenija linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij // Krajovi zadachi dlja diferencial'nih rivnjan'], *Krayovi zadachi diferentsialnih rivnyan*, issue 4, pp. 282–289.
10. Shchegolev, S. A. (1998), The resonant case of complete separation linear differential system with slowly varying parameters [Rezonansnyj sluchaj polnogo razdelenija linejnoj differencial'noj sistemy s medlenno menjajushhimisja parakmetrami] *Krayovi zadachi diferentsialnih rivnyan*, K .: IM NASU, issue 3, pp. 165–175.
11. Shchegolev, S. A. (2008), A complete separation of certain classes linear homogeneous systems of differential equations [O polnom razdelenii nekotoryh klassov linejnyh odnorodnyh sistem differencial'nyh uravnenij], *Visnyk Odesk. nat. univ. Mat. i mech.*, vol. 13, is. 18, pp. 119–131.
12. Shchegolev, S. A. (2012), Complete separation of linear homogeneous a system of differential equations with oscillating coefficients in one special case [Polnoe razdelenie linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij s oscillirujushhimi kojefficientami v osobom sluchae], *Visnyk Odesk. nat. univ. Mat. i mech.*, vol. 17, is. 1-2 (13-14), pp. 119–131.
13. Shchogolev, S. A. (2014), On the block separation of the linear homogeneous differential System with oscillating coefficients in the resonance case *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, vol. 63, pp. 123–140.
14. Bari, N. K. (1961), Trigonometric series [Trigonometricheskie rjady], M .: Fizmatgiz, 935 p.
15. Schogolev, S. A. (2012), Some problems of the theory of vibrations for differential systems that contain slow variables [Deyaki zadachi teoriyi kolyvan dlyai dyferencialnyh system, yaki mistyat povilno zminni parametry], Dr. Sc. dissertation, Kyiv - 290 p.
16. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1984), Functional analysis [Funktsionalnyi analiz], M .: Nauka, 752 p.