

НАУКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ

УДК 691.32

ДО ПИТАННЯ ПІДВИЩЕННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ ПІДРЕЙКОВИХ ОСНОВ НА
ЗАЛІЗНИЦЯХ УКРАЇНИ

*О. М. Пішійко, д. т. н., проф., В. В. Пристинська, асп.
Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна*

Ключові слова: підрейкові основи, мостове полотно, залізобетонні шпали, довговічність, тріщиностійкість, оптимальний склад бетону, дефекти, фактори впливу

Постановка проблеми. Довговічність споруд підрейкових основ (залізобетонні шпали, плити безбаластного мостового полотна) залежить від багатьох факторів.

Основними дефектами підрейкових основ є тріщини, розташовані у різних місцях та в різних напрямках. Тому необхідно встановити основні причини їх виникнення та виробити рекомендації щодо можливого усунення цих дефектів.

Аналіз літератури. Проведений аналіз матеріалів досліджень і публікацій вказує, що дуже багато уваги приділяється вдосконаленню конструкції підрейкових основ, але довговічність і надійність цих виробів залежить також від дотримання технології їх виготовлення, правильного підбору складу бетону та використання якісних матеріалів.

Досвід обстежень і випробувань плит БМП та залізобетонних шпал, які проводилися на діючих лініях Укрзалізниці, показує, що плити, які зараз випускаються, недостатньо надійні та довговічні. Вони протягом нетривалого періоду експлуатації (близько 5 років) можуть отримувати масові пошкодження. Таким чином, існує проблема недостатньої тріщиностійкості плит БМП.

Мета статті. Виявити основні дефекти підрейкових основ на залізницях України та вказати причини їх імовірного розвитку. Викласти результати виконання планованого експерименту.

Виклад матеріалу. Основними дефектами, виявленими в залізобетонних шпалах та плитах БМП, є тріщини, розташовані в різних місцях та в різних напрямках.

З [1] видно, що найпоширенішим видом дефектів є розкол шпали по наскрізній поздовжній тріщині, що проходить через арматурні дротини (приблизно 25 % від загальної кількості виявлених), який, у свою чергу, викликаний недостатніми фізико-механічними характеристиками бетону як на стадії виготовлення шпали, так і на стадії її укладання у верхню будову колії. Основними причинами виникнення дефекту цього виду є: «культура» виробництва шпали; недостатня товщина захисного шару бетону; низька якість використовуваних матеріалів для виготовлення бетонної суміші; недосконалість підбору складу бетону; низька якість перемішування, вкладання та вібрування бетонної суміші та неправильний вибір режиму її пропарювання. Якісний контроль усіх цих факторів дозволить значно зменшити частоту виникнення дефектів даного виду.

Другим найбільш поширеним експлуатаційним дефектом є розкол шпали по наскрізній поздовжній тріщині з розкриттям понад 3 мм, що проходить через отвір для закладних болтів (приблизно 17 % від загальної кількості виявлених). Цей дефект можна віднести до таких, що виникли через неякісну експлуатацію колії. Для запобігання виникнення дефектів цього типу необхідно регулярно проводити діагностування та суцільне підтягування закладних болтів.

Третім та четвертим видами за кількістю виявлених дефектів є злам шпали в середній частині з руйнуванням бетону, розкриттям поперечної тріщини або розривом арматури та злам шпали в підрейковій частині з руйнуванням бетону, розкриттям поперечної тріщини або розривом арматури (відповідно 15 та 11 % від загальної кількості виявлених). Ці дефекти шпал можуть виникнути як під час нового будівництва, так і через незадовільну експлуатацію колії.

Також поширеним видом дефектів є поздовжня тріщина з розкриттям до 3 мм, що проходить через арматурні дротини на торцях і посередині шпали (приблизно 10,5 % від загальної кількості виявлених). Цей дефект виникає через ті ж самі причини, що і розкол по наскрізній поздовжній тріщині, і тому справедливо буде сказати, що і методи запобігання

виникнення цього виду дефекту для них мають бути однаковими. Інші види дефектів менш поширені.

Таким чином, можна стверджувати, що основні причини виникнення дефектів – це незадовільна експлуатація колії та недостатні фізико-механічні характеристики матеріалів для виготовлення залізничних шпал.

Безбаластне мостове полотно (БМП) на залізобетонних плитах має високу стабільність положення елементів, захищає від забруднення й корозії верхні пояси балок проїзної частини й зв'язки між ними, забезпечує безпечний прохід по мосту колісних пар у випадку сходу з рейок й є економічним за сумарною вартістю виготовлення й укладання. Все це визначає масове застосування безбаластного мостового полотна на залізобетонних плитах під час будівництва нових і реконструкції залізничних мостів, що експлуатуються. Разом із тим, під час обстеження цілого ряду мостів виявлено велику кількість тріщин у залізобетонних плитах, що мають усадковий і силовий характер.

Простежується характерна послідовність утворення й розвитку тріщин. Звичайно спочатку проявляються усадкові тріщини на нижній або верхній поверхні плити. Потім під дією тимчасового навантаження й залежно від умов обпирання усадкові тріщини на нижній поверхні плит переростають у силові поздовжні або поперечні відносно осі. Далі в результаті змінного характеру навантаження плит тріщини стають наскрізними й отримують розвиток по осі від торця до торця або поперек осі від високоміцних шпильок до торців плит. Також зафіксовано велику кількість дефектних плит із тріщинами, що проходять по діагоналі через технологічні отвори (для шпильок, контруктників), які значно скорочують довговічність мостового полотна, а отже, і його надійність, підвищують експлуатаційні витрати [2 – 4].

З огляду літератури видно, що пропонувалося багато конструктивних рішень для поліпшення надійності плит безбаластного мостового полотна. Але дуже мало уваги приділяється такій проблемі як недосконалість бетону, з якого виготовляються ці плити, а саме: використання неякісних заповнювачів, неоднорідність бетонної суміші, недостатня міцність, морозостійкість та тріщиностійкість бетону.

У результаті всього вищесказаного можна зробити висновок про необхідність розробки оптимального складу бетону для виготовлення як плит БМП, так і залізобетонних шпал із метою поліпшення їхньої довговічності.

Результати проведення планованого експерименту. В'яжучим було вибрано цемент Амвросіївський ПЦ І-500 Н, що відповідає вимогам ДСТУ Б.В.2.7-46:2010 «Будівельні матеріали. Цементи загальнобудівельного призначення. Технічні умови».

Заповнювачами виступали такі матеріали: пісок річковий з модулем крупності 1,28, що відповідає вимогам ДСТУ Б.В.2.7-32-95 «Дрібні заповнювачі для будівельних матеріалів, виробів, конструкцій і робіт. Технічні умови» та пісок із модулем крупності 2,8 згідно з ДСТУ Б.В.2.7-210:2010 «Пісок із відсівів дроблення вивержених гірських порід для будівельних робіт. Технічні умови», а також щебінь фракції 5-20 мм відповідно до ДСТУ Б.В.2.7-75-98 «Будівельні матеріали. Щебінь і гравій щільні природні для будівельних матеріалів, виробів, конструкцій і робіт. Технічні умови».

Також для поліпшення властивостей бетонної суміші та затверділого бетону застосовували комплексну хімічну добавку ПЛКП. Підвищення механічних і технологічних характеристик бетонів і будівельних розчинів, отриманих із використанням комплексних добавок бетону ПЛКП, забезпечується за рахунок модифікування кристалів цементного каменю. Цілеспрямована розробка системи модифікаторів дозволила одночасно з прискоренням і більш повним здійсненням процесу гідратації цементу отримати можливість впливу на процеси кристалоутворення. Система комплексних добавок до бетону ПЛКП дозволяє впливати на розміри і форму кристалів цементного каменю, забезпечувати необхідні властивості будівельних матеріалів, структура штучного каменю, що формується, забезпечує підвищення міцності на стиск та розтяг під час згину, зносостійкість, морозостійкість і водонепроникність бетонів.

Основними компонентами добавок ПЛКП є електроліт із суміші солей роданіду, тіосульфату і сульфату натрію, суперпластифікатора С-3 та полікарбоксилату.

Проведення планованого експерименту дозволяє скоротити об'єм експериментальних досліджень та отримати при цьому достатньо ймовірну модель поведінки системи.

Реалізація планованого експерименту проводиться в такі послідовності [5; 6]:

- постановка завдання, вибір основних показників контролю якості функціонування

системи (виходи Y_i);

- вибір основних факторів впливу на систему та діапазону їх зміни за апріорною інформацією;
- проведення експериментальних досліджень за встановленим алгоритмом плану;
- статистична обробка отриманих результатів.

Фактор є визначальним для формування певної характеристики або здійснює на неї значний позитивний вплив, що не має екстремального характеру в доцільних межах варіювання i , в той же час, негативно впливає на іншу характеристику. Аналіз впливу зміни даного фактора необхідний для встановлення його раціональної величини, тобто обмеження негативного впливу за максимально можливого збереження позитивного.

У випадку, коли залежність впливу фактору на основну характеристику його дії має екстремальний або близький до нього характер за додаткового негативного впливу на інші характеристики, доцільна є стабілізація фактора в зоні екстремуму.

Стабілізація факторів доцільна також у випадку, коли вони не є визначальними для певних характеристик, а застосовуються для компенсації негативних впливів.

Змінними факторами прийнято:

- вміст цементу в бетоні. Фактор визначальний для характеристики міцності бетону; за негативного впливу на усадкові деформації під час висушування, деформації набухання під час зволоженні, можливість прояву цементним каменем «нерівномірності зміни об'єму»;
- вміст відсіву у % від загальної кількості дрібного заповнювача. Фактор позитивно впливає на фізико-механічні характеристики бетону, але використання чистого відсіву без додавання дрібного піску спричинює до погіршення укладки бетонної суміші;
- вміст комплексної добавки ПЛКП. Фактор визначальним чином впливає на ранню та кінцеву міцність бетону, дозволяє знизити водоцементне відношення.

У таблиці наведено значення факторів впливу та рівні їх варіювання.

Таблиця

Позначення факторів експерименту та рівні їх варіювання

Фактори	Позначення	Рівні варіювання та натурні значення факторів		
		-1	0	+1
Вміст цементу, кг/м ³	X_1	350	400	450
Вміст відсіву, % від маси дрібного заповнювача	X_2	0	50	100
Вміст добавки ПЛКП, % від маси в'язучого	X_3	0	0,55	1,1

Отримана під час обробки результатів експериментальних досліджень математична модель взаємозв'язку між факторами X_i та виходами системи Y_i , що впливають на систему i є відгуками на впливи, в умовах перевірки її адекватності з достатньою ймовірністю відображує рівняння стану об'єктивно існуючої системи.

У даній статті застосовується поліноміальна експериментально-статистична модель загального вигляду

$$\hat{Y} = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i X_i + \sum_{i < j} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k a_{ii} X_i^2,$$

де, a_0 – величина відгуку системи при базовому рівні факторів;

a_i – лінійний ефект фактора X_i , що характеризує середню швидкість зміни відгуку системи при управлінні фактором X_i в діапазоні $-1 \leq X_i \leq +1$;

a_{ii} – квадратичний ефект фактора X_i , що характеризує прискорення зміни відгуку системи при управлінні фактором;

a_{ij} – ефект взаємодії, змінює середню швидкість зміни відгуку системи при управлінні фактором X_i , залежно від рівня фактора X_{i+1} .

Отримані після статистичного аналізу моделей рівняння регресії дозволяють простежити індивідуальний та спільний вплив чинників на досліджувані вихідні параметри системи.

Аналіз отриманої системи рівнянь зміни основних параметрів дозволить установити допустимі величини вмісту окремих компонентів в суміші та оптимізувати склад бетону.

Рівняння регресії, яке відображає середню міцність на стиск зразків після тепловологісної обробки:

$$Y_1 = 399,773 + 50,045 \cdot X_1 - 9,829 \cdot X_2 + 55,033 \cdot X_3 - 8,142 \cdot X_1^2 + 17,372 \cdot X_2^2 - 5,682 \cdot X_3^2 - 18,704 \cdot X_1 \cdot X_2 - 1,061 \cdot X_1 \cdot X_3 - 16,276 \cdot X_2 \cdot X_3.$$

Рівняння регресії, яке відображає середню міцність на стиск зразків у віці 7 діб за твердіння в природних умовах:

$$Y_2 = 432,725 + 47,776 \cdot X_1 + 4,825 \cdot X_2 + 25,316 \cdot X_3 - 13,263 \cdot X_1^2 - 15,018 \cdot X_2^2 + 7,197 \cdot X_3^2 - 18,951 \cdot X_1 \cdot X_2 - 3,631 \cdot X_1 \cdot X_3 + 2,731 \cdot X_2 \cdot X_3.$$

Рівняння регресії, яке відображає середню міцність на стиск зразків у віці 28 діб за твердіння в природних умовах:

$$Y_3 = 516,448 + 50,289 \cdot X_1 - 2,801 \cdot X_2 + 23,266 \cdot X_3 - 7,893 \cdot X_1^2 - 12,733 \cdot X_2^2 + 30,122 \cdot X_3^2 - 14,475 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,193 \cdot X_1 \cdot X_3 - 4,412 \cdot X_2 \cdot X_3.$$

На основі отриманих рівнянь за допомогою комп'ютерної програми MATLAB R2012b побудовано графіки, які відображають залежності відгуків системи від зміни двох факторів впливу за фіксованого значення третього фактора.

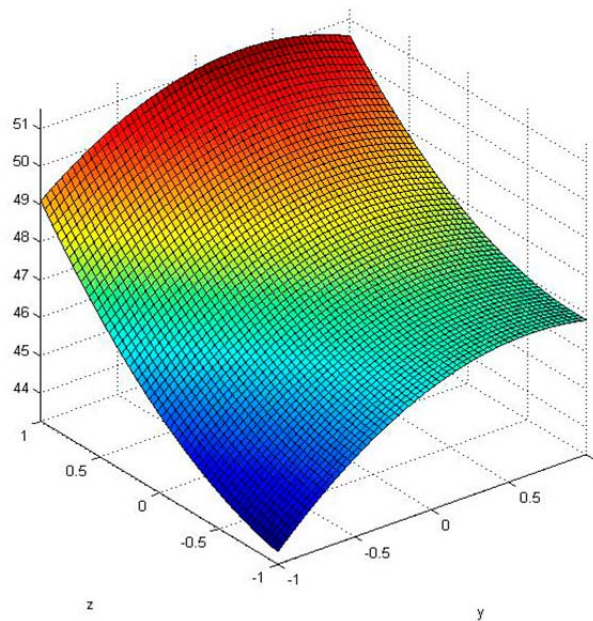


Рис. 1. Модель залежності відгуку системи (міцності бетону у віці 28 діб, МПа) від зміни факторів впливу X_2 (% відсіву) та X_3 (ПЛКП) за фіксованого значення X_1 (Ц) = -1.

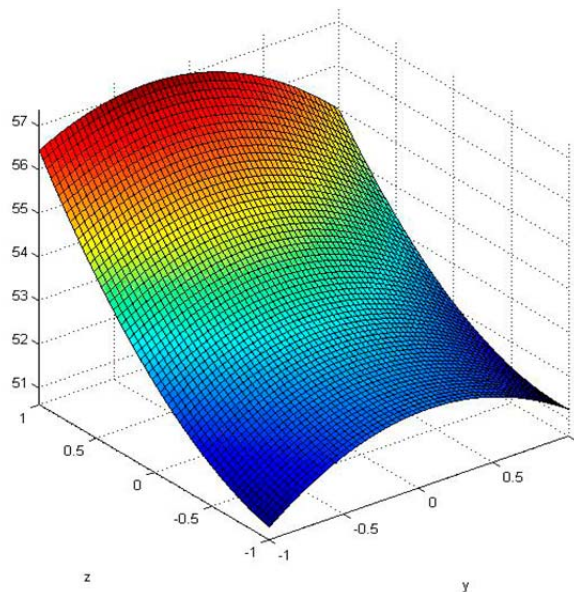


Рис. 2. Модель залежності відгуку системи (міцності бетону у віці 28 діб, МПа) від зміни факторів впливу X_2 (% відсіву) та X_3 (ПЛКП) за фіксованого значення X_1 (Ц) = 0.

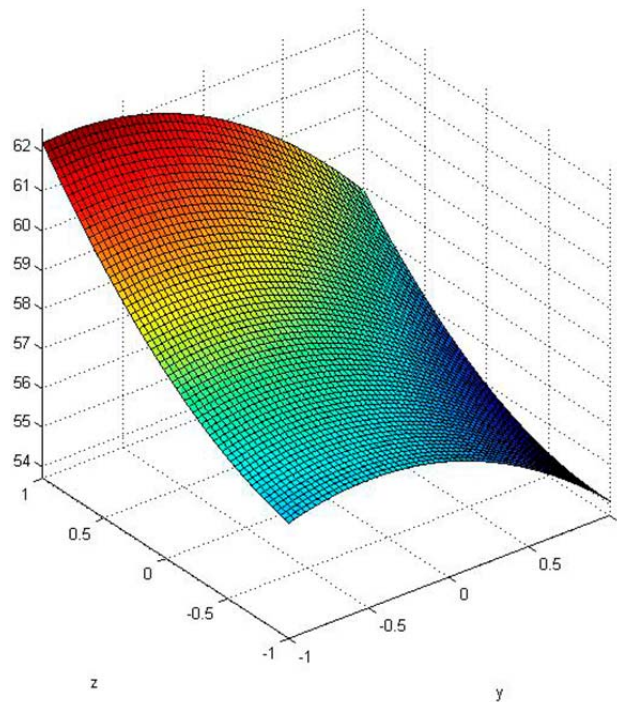


Рис. 3. Модель залежності відгуку системи (міцності бетону у віці 28 діб, МПа) від зміни факторів впливу X_2 (% відсіву) та X_3 (ПЛКП) за фіксованого значення X_1 (Ц) = 1.

У результаті проведеного експерименту можна зробити висновок, що введення комплексної добавки ПЛКП до складу бетонної суміші дозволяє не тільки значно знизити водоцементне відношення, а і зменшити витрату цементу, зберігши необхідну міцність.

Також з'ясовано, що введення піску з відсівів дроблення вивержених гірських порід замість частки дрібного заповнювача зумовлює до підвищення міцності затверділого бетону, але використання чистого відсіву без додавання дрібного річкового піску неможливе через значне погіршення укладання та ущільнення бетонної суміші.

Висновок. Під час проведення досліджень з'ясовано, що оптимальним є використання відсіву у кількості 50 % від загальної маси дрібного заповнювача, оскільки саме за такого співвідношення можна отримати оптимальну укладку бетонної суміші і забезпечити підвищену міцність бетону порівняно з використанням дрібного піску.

У разі введення хімічних добавок до складу бетонної суміші можна значно знизити водоцементне відношення та скоротити витрату цементу, забезпечуючи при цьому необхідну міцність затверділого бетону.

У подальшому планується проведення більш детального експерименту для отримання такого складу бетону, що матиме необхідні характеристики міцності, водонепроникності, морозостійкості, тріщиностійкості і який можна буде рекомендувати для виготовлення залізобетонних шпал та плит БМП.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Вознесенский В. А.** Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ : учеб. / В. А. Вознесенский, Т. В. Ляшенко, Б. Л. Огарков. – К. : Вища шк. Глав. изд-во, 1989. – 328 с.
2. Методические указания по применению теории планирования эксперимента при конструировании строительных материалов с заданными свойствами. – Д. : ДИИТ, 1989. – 24 с.
3. **Мірошніченко С. В.** Дослідження напруг і деформацій у плитах безбаластного мостового полотна [Текст] / С. В. Мірошніченко : зб. наук. праць – Харків: УкрДАЗТ, 2009. – Вип. 109. – С. 113 – 119.
4. **Мірошніченко С. В.** Механізм тріщиноутворення у плитах безбаластного мостового полотна [Текст] / С. В. Мірошніченко: зб. наук. праць – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – Вип. 125. – С. 160 – 164.
5. **Плугін А. А.** Систематизація пошкоджень залізобетонних плит безбаластного

мостового полотна залізничних мостів [Текст] / А. А. Плуґін, С. В. Мірошніченко, О. А. Забіяка, Г. О. Линник, А. І. Бабенко : зб. наук. праць. – Харків: УкрДАЗТ, 2009. – Вип. 109. – С. 120 – 130.

6. **Рибкін В. В.** Дослідження експлуатаційного ресурсу попередньо напружених залізобетонних шпал українського виробництва [Текст] / В. В. Рибкін, Ю. Л. Заяць, В. В. Коваленко, П. О. Пшінько // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2011. – Вип. 39. – Д. : Вид-во ДНУЗТ, 2011. – С. 173 – 179.

7. **Matias D., Brito de J., Rosa A., Pedro D.** Mechanical properties of concrete produced with recycled coarse aggregates – influence of the use of superplasticizers / D. Matias, J. de Brito, A. Rosa, D. Pedro // Construction and building materials. – 2013. – Vol. 44. – P. 101 – 109.

8. **Nagrockiene D., Pundiene I., Kicaite A.** The effect of cement type and plasticizer addition on concrete properties / Drigita Nagrockiene, Ina Pundiene, Asta Kicaite // Construction and building materials. – 2013. – Vol. 45. – P. 324 – 331.

SUMMARY

Problem definition. On the Railways of Ukraine is very large number of slab tracks operated with cracks, which leads to significant reduction of term of their service. The main causes of defects are unsatisfactory operation of the way and insufficient physical-mechanical characteristics of concrete and low quality raw materials. It is therefore necessary to develop the optimum structure of concrete for manufacturing these concrete products.

Purpose: to identify the main defects slab tracks on the Railways of Ukraine and give reasons for their possible development. Put the results of implementation of the planned experiment and to provide recommendations for improving the technology of manufacturing these concrete products.

Analysis of recent research: a lot of scientific works of the previous years it is dedicated to the improvement of the design of slab tracks. But very little attention is paid to quality of materials, improving the technology of manufacturing of these structures.

Results: to develop optimal composition of concrete was conducted planned experiment using quality materials that meet all the requirements of normative documents. As a result it was established that to increase the strength necessary introduction of chemical additives in the structure of concrete that allows reducing water-cement ratio and reducing consumption of cement. It also has a positive effect on the structure of a cement stone, which leads to increased strength, frost resistance and water resistance of concrete.

Conclusion. On the basis of the received results it is necessary to conduct the second of the planned experiment. This will allow more carefully choose such a composition of the concrete mixture that will meet all the requirements and have very high physical-mechanical characteristics. But the task should be approached very carefully, because most of the existing defects in structures of slab tracks appear because of infringement of technology of their manufacture.

REFERENCES

1. **Voznesensky V. A.** Chyslennyye metodu reshenyya stroytel'no-tekhnolohycheskykh zadach na EVM : ucheb. / V. A. Voznesensky, T. V. Lyashenko, B. L. Oharkov. – K. : Vyshcha shk. Hlav. yzd-vo, 1989. – 328 s.

2. Metodycheskye ukazaniya po pryomenenyyu teoryy planyrovaniya tksperymenta pry konstruyovany stroytel'nukh materyalov s zadannymy svoystvamy. – D. : DYYT, 1989. – 24 s.

3. **Miroshnichenko S. V.** Doslidzhennya napruh i deformatsiy u plytakh bezbalastnoho mostovoho polotna [Tekst] / S. V. Miroshnichenko : zb. nauk. prats' – Kharkiv: UkrDAZT, 2009. – Vyp. 109. – S. 113 – 119.

4. **Miroshnichenko S. V.** Mekhanizm trishchynoutvorenniya u plytakh bezbalastnoho mostovoho polotna [Tekst] / S. V. Miroshnichenko: zb. nauk. prats' – Kharkiv: UkrDAZT, 2011. – Vyp. 125. – S. 160 – 164.

5. **Pluhin A. A.** Systematyzatsiya poshkodzen' zalizobetonnykh plyt bezbalastnoho mostovoho polotna zaliznychnykh mostiv [Tekst] / A. A. Pluhin, S. V. Miroshnichenko, O. A. Zabiya, H. O. Lynnyk, A. I. Babenko : zb. nauk. prats'. – Kharkiv: UkrDAZT, 2009. – Vyp. 109. – S. 120 – 130.

6. **Rybkin V. V.** Doslidzhennya ekspluatatsiynoho resursu poperedn'o napruzhenykh

zalizobetonnykh shpal ukrayins'koho vyrobnytstva [Tekst] / V. V. Rybkin, Yu. L. Zayats', V. V. Kovalenko, P. O. Pshin'ko // Visnyk Dnipropetr. nats. un-tu zalizn. transp. im. akad. V. Lazaryana. – 2011. – Vyp. 39. – D. : Vyd-vo DNUZT, 2011. – S. 173 – 179.

7. **Matias D., Brito de J., Rosa A., Pedro D.** Mechanical properties of concrete produced with recycled coarse aggregates – influence of the use of superplasticizers. Construction and building materials. – 2013. – Vol. 44. – P. 101 – 109.

8. **Nagrockiene D., Pundiene I., Kicaite A.** The effect of cement type and plasticizer addition on concrete properties. Construction and building materials. – 2013. – Vol. 45. – P. 324 – 331.

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В ВОЛОКНИСТОМ КОМПОЗИЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ В СЛУЧАЕ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ

В. В. Данишевский, д. т. н, А. И. Рыжков асс.

Ключевые слова: нелинейные волны, композиционный материал, неидеальный контакт

Введение. Упругие волны деформации, распространяющиеся в микронеоднородных композиционных материалах, могут быть подвержены действию эффектов нелинейности, дисперсии и диссипации [1]. Нелинейность приводит к локализации энергии, генерации высших гармоник и перекачке энергии из низкочастотной в высокочастотную часть спектра. Дисперсия приводит к рассеянию энергии. Крутизна волнового фронта уменьшается и, таким образом, влияние нелинейности становится менее выраженным. Если нелинейность и дисперсия действуют одновременно, они компенсируют влияние друг друга. В этом случае возможно распространение стационарных периодических нелинейных волн. Усиление нелинейности приводит к формированию локализованных волн колоколообразной формы (солитонов) или ударного типа (кинков). Такие волны аккумулируют большое количество энергии и способны распространяться на значительные расстояния, сохраняя постоянными форму и скорость.

Анализ публикаций. Нелинейные упругие волны в твердых телах исследовались многими авторами [2 – 4]. Как правило, основное внимание уделялось однородным материалам и конструкциям, в которых эффект дисперсии вызван геометрическими факторами. Влияние структурной дисперсии на распространение нелинейных волн изучено меньше.

Цель статьи. Работа посвящена исследованию антиплоских нелинейных волн деформации, распространяющихся в однонаправленном волокнистом композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами.

Изложение материала. Рассмотрим однонаправленный волокнистый композит, состоящий из матрицы $\Omega^{(1)}$ и квадратной решетки цилиндрических включений $\Omega^{(2)}$ (рис. 1). Предположим, что физической и геометрической нелинейностью можно пренебречь, а нелинейные свойства модели в первую очередь обусловлены неидеальными условиями контакта на границе раздела компонентов. Рассмотрим антиплоские волны сдвига, распространяющиеся в плоскости x_1x_2 .

Исходное волновое уравнение имеет вид:

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\mu^{(n)}$ – модуль сдвига; $\rho^{(n)}$ – плотность; $u^{(n)}$ – перемещение в направлении x_3 . Здесь и ниже верхний индекс (n) обозначает различные компоненты материала, $n = 1, 2$

Краевые условия на границе раздела компонентов $\partial\Omega$ могут быть записаны в виде [5]:

$$\sigma^* = \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \alpha l \frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} - \alpha\beta l \left(\frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} \right)^3 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\sigma^{(n)} = \mu^{(n)} (\partial u^{(n)} / \partial \mathbf{n})$; $\partial / \partial \mathbf{n}$ – производная по нормали \mathbf{n} к границе $\partial\Omega$; l – размер