

УДК 621.9.04

**С.В. Струтинський, асистент, канд. техн. наук,**

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,*

*пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056*

*kvt\_mti@mail.ru*

**Л.О. Рибак, професор, д-р техн. наук**

*Белгородський державний технологічний університет ім. В.Г. Шухова,*

*вул. Костюкова, 46, м. Белгород, Росія, 308012*

*rl\_bgtu@intbel.ru*

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ ПРИВОДІВ НА ОСНОВІ ПЛАНАРНОЇ ПАРЦІАЛЬНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ**

*Розглянуто багатокординатні просторові системи приводів, які входять в склад технологічного комплексу. Розроблена оригінальна математична модель просторової системи приводів яка базується на введенні планарних (плоских) парціальних динамічних підсистем, які визначають характерні рухи в просторових приводах. В планарних системах виділені характерні радіальні динамічні підсистеми для яких складені математичні моделі. На основі моделей виконано математичне моделювання перехідних динамічних характеристик просторової системи приводів. Результати моделювання співставлені з експериментальними даними. Підтверджена адекватність розроблених математичних моделей і результатів моделювання.*

**Ключові слова:** технологічний комплекс, система приводів, шести координатний стіл, динаміка, планарна система, математична модель, перехідний процес, експеримент, частота коливань, логарифмічний декремент.

Технологічне обладнання на основі просторової системи приводів має значні перспективи розвитку. З метою підвищення якісних показників технологічного обладнання необхідно його вдосконалити в напрямку поліпшення динамічних характеристик. Тому дослідження динамічних характеристик просторової системи приводів є актуальним.

Проблема в загальному вигляді полягає у визначенні динамічних характеристик просторової системи приводів.

Проблема пов'язана із важливими науковими і практичними завданнями розвитку вискоелективного технологічного обладнання, зокрема, обладнання для маніпулювання об'єктами машинобудування.

В останніх дослідженнях і публікаціях [1] наведені результати досліджень технологічного обладнання на основі мехатронних систем приводів із паралельними кінематичними зв'язками. Визначені статичні характеристики та особливості програмування обладнання [2]. Окремі публікації присвячено дослідженню питань динамічної точності просторових приводів [3]. Найвні різні підходи до визначення динамічних характеристик обладнання. Як правило досліджуються параметри динамічної точності та частотні характеристики обладнання [4].

Методів математичного моделювання перехідних характеристик просторових систем приводів в літературних джерелах не виявлено.

До невирішених раніше частин загальної проблеми відносяться визначення перехідних динамічних характеристик просторових систем приводів шляхом математичного моделювання.

Метою досліджень викладених в даній статті є математичне моделювання перехідних динамічних характеристик просторової системи приводів. Задачами досліджень є побудова динамічної моделі просторової системи приводів, математичне моделювання та експериментальне визначення динамічних характеристик просторової системи приводів.

### **Планарна парціальна динамічна модель просторової системи приводів.**

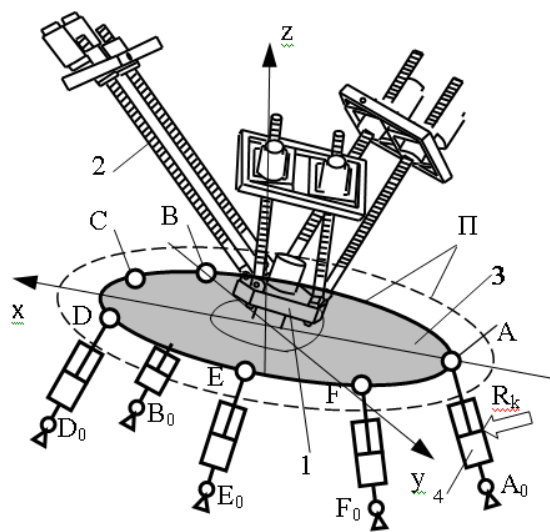
Просторова система приводів входить в склад технологічного комплексу, який об'єднує верстат паралельної кінематики та систему маніпулювання, що включає рухомий стіл з просторово розміщеними приводами. Дослідження проведені на спеціально розробленому технологічному комплексі [3]. Він призначений для багатокординатної обробки деталей в межах робочого простору 500x500x500мм. Число керованих координат складає 12. Шість із них забезпечується приводами переміщення інструменту. Інші шість керованих координат забезпечують необхідне просторове положення стола. Комплекс дозволяє встановлювати необхідну точність обробки: 0,05..0,1мм при застосуванні розімкнених схем керування та 0,001..0,005мм при використанні зворотніх зв'язків по виміру просторового положення виконавчого органу. Верстат включає виконавчий орган у вигляді платформи 1, який переміщується в просторі за допомогою штанг змінної довжини 2 (рисунок 1).

Рухомий виконавчий орган верстата 1 має шість ступенів вільності і здійснює просторові рухи. Оброблювана деталь встановлюється на рухомому столі 3, який може змінювати своє положення в просторі за допомогою системи маніпулювання. Система маніпулювання побудована по схемі механізма-гексапода і має шість приводів 4. Система маніпулювання оснащена додатковими приводами мікропереміщень. Система маніпулювання забезпечує установку деталі в необхідному положенні. Відносно даного положення здійснюється переміщення виконавчого органу, в якому встановлено високообертвовий шпindelь.

Формоутворюючі рухи шпинделя, які забезпечують процес обробки, здійснюються в основному в площині перпендикулярній вісі інструменту, а відповідно вісі обертання шпинделя. Це відповідає контурній обробці деталі, встановленій на столі. Тому динамічні похибки обробки в основному визначаються взаємним зміщенням інструменту і деталі в площині стола. Відповідно для дослідження динамічних процесів, які мають місце при обробці, запропоновано використати планарні парціальні динамічні системи відносного переміщення стола і інструменту в площині П (рисунок 1 б). Переміщення визначаються як коливаннями стола, так і коливаннями інструменту. Тому розглянуто дві планарні парціальні динамічні системи в площині П, які відповідають руху стола та руху інструменту. Системи стола і інструменту мають різні інерційні та деформативні характеристики. В результаті їх аналізу встановлено, що основний вплив на динамічну точність обробки має динамічна система стола, яка має значну масу та низьку жорсткість. Тому в рамках даного дослідження розглянуто планарну парціальну динамічну систему стола. Враховуючи осьову симетрію інструмента, характерними переміщеннями парціальної системи прийняті поступальні переміщення, що визначені декартовими координатами  $x$ ,  $y$  відносного положення інструмента відносно стола.



а



б

Рисунок 1 – Технологічний комплекс на основі просторової системи приводів (а) та схема введення планарної парціальної динамічної моделі системи (б)

Введена загальна парціальна планарна динамічна система стола має основну парціальну підсистему плоско-паралельного переміщення стола та шість додаткових лінійних одновимірних парціальних динамічних систем, які визначаються динамічними процесами в шести приводах стола (рисунок 2).

Розроблена планарна динамічна модель (рисунок 2 б), включає парціальну динамічну систему поступального переміщення стола та шість радіальних парціальних динамічних підсистем  $AA_0, BB_0, \dots, FF_0$  відповідних приводам та вузлам їх кріплення. Основна поступальна і додаткова радіальна парціальні системи нерівнозначні по динамічному впливу, тому можна прийняти, що процеси в динамічній системі одного окремого привода, тобто окрема радіальна система, мало впливають на динамічні параметри основної поступальної парціальної системи стола.

Досліджено динамічні процеси в системі при навантаженнях на окремий привод ( $A_0A$ ). При цьому динамічними процесами в останніх п'яти приводах можна знехтувати. Тому парціальна радіальна динамічна система окремого привода може розглядатися ізольовано, а враховуватися лише її зв'язок із основною поступальною парціальною системою.

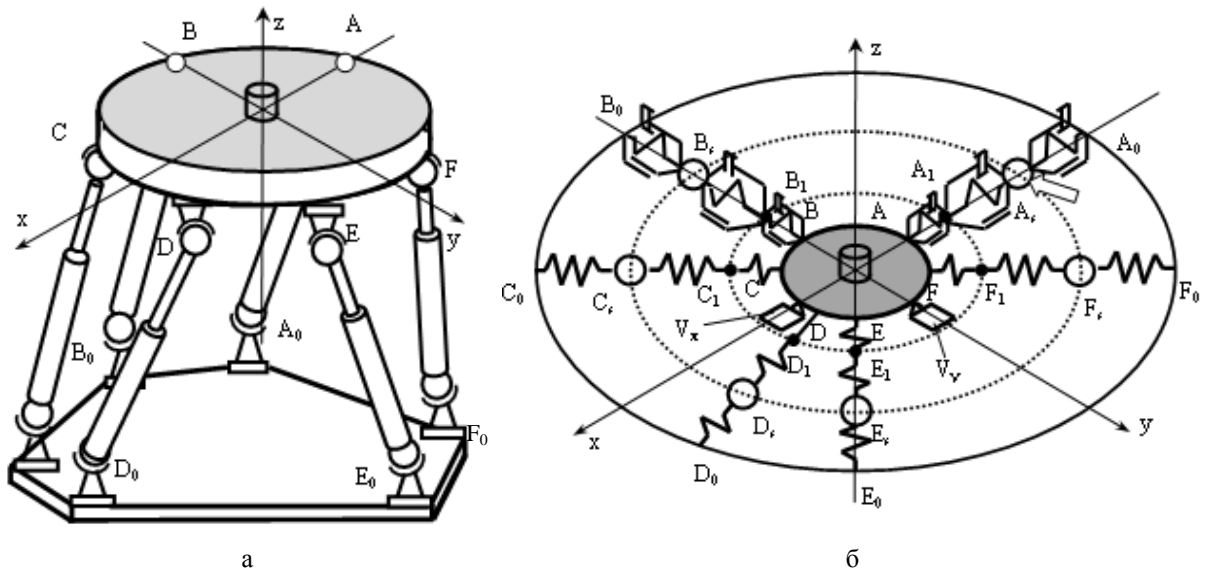


Рисунок 2 – Конструктивна схема стола (а) та запропонована планарна динамічна модель (б) переміщення стола обумовленого динамічними процесами в просторовій системі приводів стола

Розрахункова схема даної динамічної системи включає три маси (рисунок 3). Зміщення стола проходить в напрямку  $x$ .

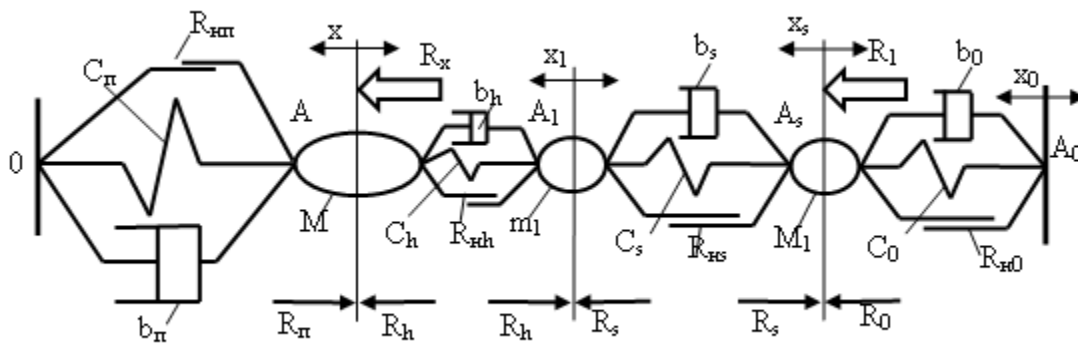


Рисунок 3 – Розрахункова схема парціальної динамічної системи поступального переміщення стола та першої радіальної парціальної системи

Маса стола  $M$  здійснює коливальний рух в напрямку силової дії привода  $x$ . Основна поступальна парціальна система стола має еквівалентну жорсткість  $C_{II}$ , еквівалентні лінійний  $b_{II}$  та нелінійний  $R_{HII}$  опір своєму переміщенню. Ці параметри визначаються схемою закріплення стола, яка включає 5 останніх приводів (крім розглянутого першого привода  $A_0A$ ).

Система закріплення стола формує динамічну реакцію на стіл  $R_{II}$ . На стіл додатково діють зовнішні навантаження  $R_x$ , які обумовлені всім комплексом зовнішніх факторів, зокрема, сили різання, гравітаційної сили та інші.

Перша радіальна парціальна динамічна система включає маси  $m_1$  та  $M_1$ , які з'єднані нелінійними пружно-дисипативними зв'язками.

Маса  $m_1$  на розрахунковій схемі являє собою масу шарніра  $A$  та частину маси першого привода, яка приєднана до шарніра  $A$ .

Маса  $M_1$  визначає інерційні властивості основної частини першого привода та шарніра  $A_0$  встановленого на основі.

Математична модель планарної парціальної динамічної системи.

Рівняння переміщення стола в напрямку  $x$  має вигляд:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = R_h - R_{II}, \quad (1)$$

де  $R_{\Pi}$  – сумарна реактивна дія 5-ти приводів (без першого);  $R_h$  – силова дія першого привода, в якому генеруються динамічні збурення.

Рівняння коливального руху шарніра з масою  $m_1$  :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = R_s - R_h, \tag{2}$$

де  $x_1$  – еквівалентне переміщення шарніра та приєднаної частини першого привода;  $R_s$  – динамічна дія основної частини першого привода на шарнір встановлений на столі.

Рівняння переміщення еквівалентної маси привода  $M_1$  має вигляд:

$$M_1 \frac{d^2 x_s}{dt^2} = R_1 + R_O - R_s, \tag{3}$$

де  $R_1$  – динамічне збурення, яке діє на привод

Динамічні дії зв'язків у системі  $R_{\Pi}$ ,  $R_h$ ,  $R_s$ ,  $R_O$  – із врахуванням нелінійних сил опору визначаються наступними залежностями:

$$\begin{cases} R_{\Pi} = R_{H\Pi} + C_{\Pi}x + b_{\Pi} \frac{dx}{dt}, \\ R_h = R_{Hh} + C_h(x_1 - x) + b_h \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx}{dt} \right), \\ R_s = R_{Hs} + C_s(x_s - x_1) + b_s \left( \frac{dx_s}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right), \\ R_O = R_{HO} + C_0(x_0 - x_s) + b_0 \left( \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_s}{dt} \right). \end{cases} \tag{4}$$

де  $R_{H\Pi}$ ,  $R_{Hh}$ ,  $R_{Hs}$ ,  $R_{HO}$  – нелінійні складові відповідних силових факторів, що визначають зв'язки в першій динамічній підсистемі;  $C_{\Pi}$ ,  $C_h$ ,  $C_s$ ,  $C_0$  – коефіцієнти жорсткості зв'язків;  $b_{\Pi}$ ,  $b_h$ ,  $b_s$ ,  $b_0$  – коефіцієнти лінійного опору зв'язків;  $x_0$  – переміщення основи з якою зв'язано шарнір  $A_0$  першого привода.

Нелінійні сили опору залежать від відносних переміщень окремих мас привода згідно наступних функціональних співвідношень.

$$\begin{cases} R_{H\Pi} = R_{H\Pi} \left( \frac{dx}{dt} \right), \\ R_{Hh} = R_{Hh} \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx}{dt} \right), \\ R_{Hs} = R_{Hs} \left( \frac{dx_s}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right), \\ R_{HO} = R_{HO} \left( \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_s}{dt} \right). \end{cases} \tag{5}$$

Перетворимо систему рівнянь (1-3) із врахуванням (4) по Лапласу при нульових початкових умовах. Після перетворення одержимо систему алгебраїчних рівнянь, яка включає зображення по Лапласу відповідних змінних функцій часу  $x(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_s(t)$  ( $S$  – оператор Лапласа)

$$\begin{cases} MS^2 X = R_x + R_{Hh} + (C_h + b_h S)(X_1 - X) - R_{H\Pi} - (C_{\Pi} + b_{\Pi} S)X, \\ m_1 S^2 X_1 = R_{Hs} + (C_s + S b_s)(X_s - X_1) - R_{Hh} - (C_h + S b_h)(X_1 - X), \\ M_1 S^2 X_s = R_1 + R_{HO} + (C_0 + S b_0)(X_0 - X_s) - R_{Hs} - (C_s + S b_s)(X_s - X_1). \end{cases} \tag{6}$$

Виконаємо групування подібних в системі рівнянь (6) і одержимо:

$$\begin{cases} [MS^2 + (b_h + b_{\Pi})S + C_h + C_{\Pi}]X = R_{Hh} - R_{H\Pi} + (C_h + b_h S)X_1 + R_x, \\ [m_1 S^2 + (b_s + b_h)S + (C_s + C_h)]X_1 = R_{Hs} - R_{Hh} + (C_h + S b_h)X + (C_s + b_s)X_s, \\ [M_1 S^2 + (b_0 + b_s)S + C_0 + C_s]X_s = R_{HO} - R_{Hs} + (C_0 + S b_0)X_0 + (C_s + S b_s)X_1 + R_1. \end{cases} \tag{7}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (6) відносно переміщень і введемо нові константи:

$$\begin{cases} X = \frac{K_x}{(T_x^2 S^2 + 2\xi_x T_x S + 1)} [R_{Hh} - R_{H\Pi} + K_1(\tau_1 S + 1)X_1 + R_x], \\ X_1 = \frac{K_{x_1}}{(T_{x_1}^2 S^2 + 2\xi_{x_1} T_{x_1} S + 1)} [R_{Hs} - R_{Hh} + K_2(\tau_2 S + 1)X_s + K_1(\tau_1 S + 1)X], \\ X_s = \frac{K_{x_s}}{T_{x_s}^2 S^2 + 2\xi_{x_s} T_{x_s} S + 1} [R_{H0} - R_{Hs} + K_3(\tau_3 S + 1)X_0 + K_2(\tau_2 S + 1)X_1 + R_1], \end{cases} \quad (8)$$

Введені нові константи визначено через параметри системи наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned} T_x^2 &= \frac{M}{C_{\Pi} + C_h}, \quad T_{x_1}^2 = \frac{m_1}{C_s + C_h}, \quad T_{x_s}^2 = \frac{M_1}{C_0 + C_h}, \\ \xi_x &= \frac{b_n + b_{\Pi}}{2\sqrt{M(C_h + C_{\Pi})}}, \quad \xi_{x_1} = \frac{b_s + b_{\Pi}}{2\sqrt{m_1(C_s + C_h)}}, \quad \xi_{x_s} = \frac{b_0 + b_s}{2\sqrt{M_1(C_0 + C_s)}}, \\ K_x &= \frac{1}{C_h + C_{\Pi}}, \quad K_{x_1} = \frac{1}{C_s + C_h}, \quad K_{x_s} = \frac{1}{C_0 + C_s}, \\ K_1 &= C_h, \quad \tau_1 = \frac{b_n}{C_h}, \quad K_2 = C_s, \quad \tau_2 = \frac{b_s}{C_s}, \quad K_3 = C_0, \quad \tau_3 = \frac{b_0}{C_0}. \end{aligned}$$

Система рівнянь (8) послужила основою розробки структурної математичної моделі динамічної системи (рисунок 4).

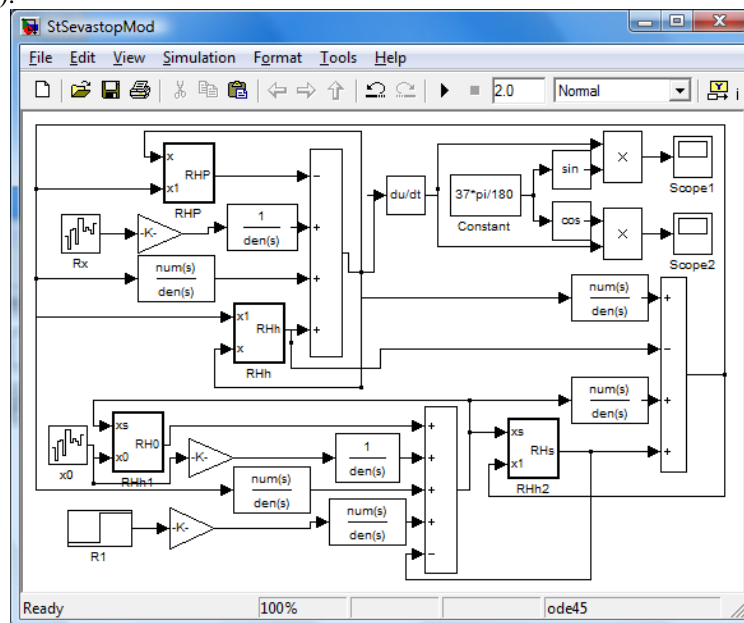


Рисунок 4 – Математична модель динамічної системи стола

Виходом моделі є переміщення стола  $x$  в напрямку дії динамічних збурень від першого привода. Входами системи є динамічні силові фактори  $R_x$ ,  $R_1$  та кінематичний фактор у вигляді переміщення основи  $x_0$ .

Основним вхідним параметром системи прийнято навантаження в приводі  $R_1$ . Воно відповідає зміні зусилля в приводі при його поперечних коливаннях. Додатковими входами прийняті динамічні випадкові збурення у вигляді навантаження на стіл  $R_x$  та вібрації основи  $x_0$ .

Для визначення динамічних властивостей системи використані імпульсні характеристики. Розрахунок імпульсної характеристики має певні складності по причині формування імпульсного навантаження на систему. Тому для розрахунку імпульсної характеристики використана процедура, яка включає визначення реакції системи на одиничну ступінчасту функцію, тобто визначення перехідної

функції. Шляхом диференціювання перехідної функції знайдена імпульсна характеристика. Для врахування шумових складових, які мають місце в системі у математичну модель введено блоки, які генерують випадкові силові фактори у вигляді навантаження на стіл  $R_x$  та коливання основи  $x_0$ .

Характеристики нелінійних блоків наявних в математичній моделі прийняті відповідними характеристиками «сухого» тертя в шарнірах та приводах стола.

Результати моделювання для вказаних параметрів визначають слабо затухаючий процес, в якому наявні низькочастотна і високочастотна складові (рисунок 5, а).

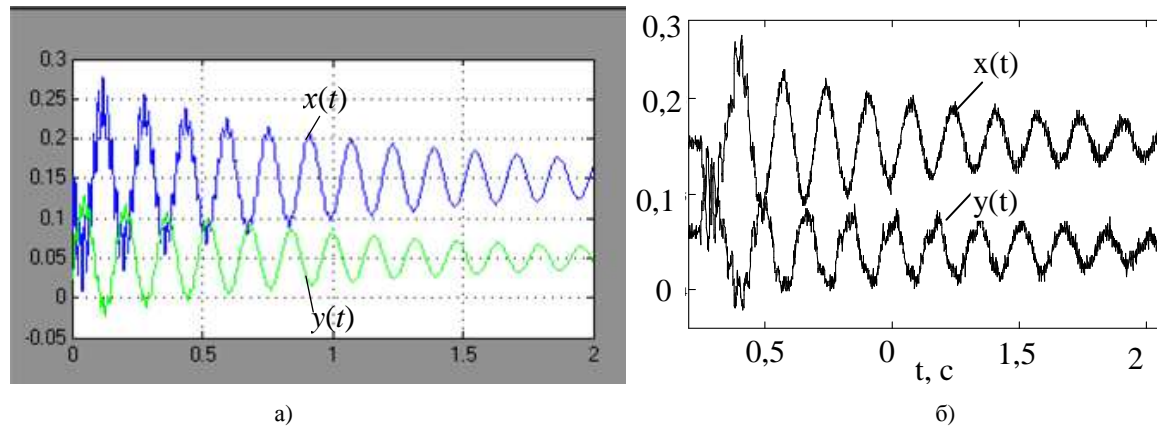


Рисунок 5 – Результати розрахунку імпульсної характеристики по розробленій моделі (а) та експериментально визначені імпульсні характеристики при ударному навантаженні привода (б)

Високочастотна складова простежується на протязі 1...3 періодів низькочастотних коливань і пов'язана із коливаннями елементів приводів. Низькочастотна складова визначається коливаннями стола. Низькочастотні складові коливань, одержані розрахунком, являють собою характерний затухаючий процес коливань стола. Коливання стола у напрямку силової дії першого привода визначають відповідні коливальні переміщення стола в напрямку  $x$  і  $y$ .

Проведена перевірка адекватності моделі шляхом порівняння розрахунку та результатів експериментальних вимірів. Імпульсні характеристики одержано вимірами коливань стола при імпульсних навантаженнях привода  $A_0A$ . Удари наносились по корпусу пневмоциліндра в напрямку  $R_k$  (див. рисунок 1б). Поперечні переміщення корпусу як показано [8] визивають основні динамічні збурення в планарній динамічній системі відповідні силовому фактору  $R_1$  (див. рисунок 2, б та рисунок 3).

В процесі експериментальних досліджень здійснено виміри переміщення стола в напрямках  $x$  і  $y$ . Для цього використані два вимірювачі  $V_x$  і  $V_y$ , встановлені у двох взаємно-перпендикулярних напрямках (див. рисунок 2б).

Для вимірів переміщення стола використано безконтактні високочутливі триангуляційні лазерні вимірювачі відстані серії РФ603-10/2. Вимірювач має робочий діапазон 2 мм з точністю вимірів 0,2 мкм.

Експериментально визначені переміщення столу мають плавно затухаючий коливальний характер. За час перехідного процесу має місце 10...15 коливань (рисунок 5а).

Для порівняння розрахункових і експериментальних даних визначено частоти коливань та параметри затухання коливального процесу. Встановлено, що розрахункова частота коливань стола складає  $f = 6,37$  Гц. Експериментально визначена частота низькочастотних коливань знаходиться в межах  $f_e = 6,2..6,3$  Гц, що відповідає розрахунковому значенню.

Визначено ступінь затухання розрахункового та експериментально визначеного коливальних процесів. Ступінь затухання визначено у вигляді середнього за десять коливань логарифмічного декременту, який складає:

$$\delta = \frac{1}{10} \ln \frac{x_1}{x_{11}},$$

де  $x_1$  та  $x_{11}$  – значення амплітуд коливань

Розрахункове значення декременту 0,179, а експериментально визначене 0,138.

Відповідно ступінь затухання коливань одержана розрахунком дещо перевищує експериментально визначену величину. Це можна пояснити не врахованими при розрахунку люфтами в шарнірних опорах.

**Висновки**

1. Доведено, що для визначення динамічних характеристик просторової системи приводів доцільно ввести планарну парціальну динамічну систему, яка є проекцією динамічних параметрів просторової системи приводів на характерну площину, що визначає динамічну точність системи.
2. Планарна парціальна динамічна система стола включає парціальні системи окремих приводів та основну парціальну систему поступального руху стола. Для розрахунку динамічних характеристик доцільно розглянути дві парціальні системи: окремого привода та об'єднану з іншими приводами динамічну систему стола.
3. Математична модель динаміки просторової системи приводів відповідна введеної планарній парціальній динамічній системі, забезпечує розрахунок перехідних характеристик з точністю 5...15%, що є задовільним, враховуючи значну складність просторової системи приводів.
4. Як напрямок подальших досліджень рекомендується дослідити за допомогою розробленої моделі, вплив нелінійних люфтових характеристик шарнірів на динаміку просторової системи приводів.

**Бібліографічний список використаної літератури**

1. Рыбак Л.А. Эффективные методы решения задач кинематики и динамики работа-станка параллельной структуры / Л.А. Рыбак, В.В. Ержуков, А.В. Чичварин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 148 с. ISBN978-5-9221-1296-3.
2. Новіков М. Розробка верстата-гексапода з шести координатною системою ЧПК і результатів його дослідницького застосування / М. Новіков, В. Струтинський, А. Кириченко // *Машинознавство*. — Львів: ТзОВ «КІНПАТРИ ЛТД», 2011. — № 5–6 (167–168). — С. 3 – 10.
3. Струтинський С.В. Визначення стохастичних динамічних навантажень, які виникають на особливих ділянках траєкторії руху виконавчого органу просторової системи приводів / С.В. Струтинський, А.А. Гуржій // *Вісник НТУУ «КПІ»*. Серія: *Машинобудування*. — 2012. — № 66. — С. 38–45.
4. Струтинський С.В. Математичне моделювання нелінійних стохастичних коливальних процесів у просторовій системі приводів / С.В. Струтинський // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні: Український міжвідомчий наук.-техн. зб.* — Львів, 2011. — № 45. — С. 129–134.

*Надійшла до редакції 20.03.2013 р.*

**Струтинский С.В., Рыбак Л.О. Математическое моделирование переходных динамических характеристик системы приводов на основе планарной парциальной динамической системы**

Рассмотрены многокоординатные пространственные системы приводов, которые входят в состав технологического комплекса. Разработана оригинальная математическая модель пространственной системы, которая базируется на введении планарных (плоских) парциальных динамических подсистем, которые определяют характерные движения в пространственных приводах. В планарных системах выделены характерные радиальные динамические подсистемы, для которых составлены математические модели. На основании моделей проведено математическое моделирование переходных динамических характеристик пространственной системы приводов. Результаты моделирования сопоставлены с экспериментальными данными. Подтверждена адекватность разработанных математических моделей и результатов моделирования.

**Ключевые слова:** технологический комплекс, система приводов, шестикоординатный стол, динамика, планарная система, математическая модель, переходный процесс, эксперимент, частота колебаний, логарифмический декремент

**Strutinsky S.V., Rybak L.O. Mathematical modeling of transient dynamic characteristics of the drive system based on the planar partial dynamical system**

The multi-axis spatial drive systems being a part of the technological complex were considered. An original mathematical model of the spatial system, which is based on the introduction of planar (flat) partial dynamic subsystems, which are determined by the movement in spatial drives, was developed. The specific radial dynamic subsystems, which are written by mathematical models in planar systems, were identified. Based on the mathematical models the transient dynamics of the spatial characteristics of the drive system was done. The simulation results are compared with the experimental data. The adequacy of the developed mathematical models and simulation results was confirmed.

**Keywords:** technological complex, drive system, 6-dof table, dynamics, planar system, mathematical model, transitional process, experiment, oscillation frequency, logarithmic decrement.