

УДК 531.396, 534.014.4, 534.015.1

**А.Н. Стадник, доцент,**

**А.В. Периг, канд. техн. наук,**

**А.И. Дериглазов, инженер**

*Донбасская государственная машиностроительная академия*

*ул. Шкадинова 72, г. Краматорск, Украина, 84313*

*E-mail: olexander.perig@gmail.com, alex\_victor\_perig@hotmail.com*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

*С применением теоремы Кориолиса получены нелинейные дифференциальные уравнения движения сферического маятника при произвольных угловых скоростях и ускорениях переносного движения стрелы крана. Для постоянной вертикальной угловой скорости осуществлена линеаризация, получено аналитическое решение, удовлетворительно согласующееся с экспериментальными результатами.*

**Ключевые слова:** *сферический маятник, стреловой кран, раскачивание груза, кориолисова сила инерции, дифференциальное уравнение относительного движения.*

### **Введение**

Сущностью проблемы исследования сложного движения сферического маятника с кинематически заданным движением точки подвеса является решение целого класса сопутствующих задач нелинейной механики, формализация и решение которых требует широкого применения методов численного анализа. При этом не менее важным аспектом рассматриваемой проблемы представляется рациональный выбор и введение обобщенных циклических координат, обеспечивающих получение приближенных аналитических решений хотя бы для некоторых частных случаев движения груза, что позволяет шире анализировать влияние рабочих характеристик механической системы на вид относительной траектории раскачивающегося груза. Одним из типичных случаев работы грузоподъемного устройства является решение задачи о переносе контейнера из начального в конечное положение, осуществляемый равномерным поворотом стрелы крана.

В настоящее время динамический анализ движений сферического маятника представляет значительный современный научный интерес в рамках развития теории колебаний сложных механических систем и находит отображение в работах Шамолина М.В. (2008) [1], Маркеева А.П. (2010) [2], Зельдовича Б.Я. и др. (2004) [3], Петрова А.Г. (2005) [4], Глухих Ю.Д. (2005) [5], Холостовой О.В. (2006) [6], Вишенковой Е.А. и др. (2006) [7].

В исследовании Зельдовича Б.Я. и др. (2004) [3] выполняется моделирование движения сферического маятника, закрепленного на вращающейся платформе. При этом задачи о динамике сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса решаются в работах Глухих Ю.Д. (2005) [5], Холостовой О.В. (2006) [6], Вишенковой Е.А. и др. (2012) [7]. В работе Петрова А.Г. (2005) [4] анализируется динамика колебаний сферического маятника с произвольной трехмерной периодической вибрацией точки подвеса. Существует необходимость определения собственных относительных колебаний, возникающих при относительном раскачивании груза при переносном вращательном движении стреловой системы крана. Ловейкин В.С. и др. (2011, 2009) [8-9] рассмотрели комплексный синтез оптимального управления грузоподъемным краном по схеме «тележка-груз» в процессе торможения тележки, уменьшающей колебания груза. В качестве условия минимума функционала использовалось уравнение Эйлера-Пуассона. Ловейкин В.С. и др. (2011) [10] исследовали динамический режим поворота стрелового крана с целью увеличения плавности приводного усилия численным интегрированием уравнения движения.

Расчетные подходы к учету влияния центробежных сил инерции на характер колебаний груза, подвешенного на гибком канате, при повороте стрелы крана представлены в работе Кузьмина А.Н. и др. (2011) [11]. В работе Макаревича Е.В. и др. (2011) [12] разработана математическая модель поворачивающегося крана в имитационной среде SimMechanics пакета Matlab, а также реализовано оптимальное управление предложенной моделью крана с помощью модуля Matlab Optimization Toolbox. В работе Герасимьяк Р.П. и др. (2007) [13] рассмотрены подходы к оптимальному электромеханическому управлению вылетом стрелы крана. Зарецким А.А. и др. (2007, 2008) в работах [14]-[15] приведена классификация раскачиваний груза, причем относительное раскачивание груза относится к динамическим погрешностям крановой системы. Задачи снижения раскачивания груза при повороте стрелы крана также проанализированы в работах Дремова В.И. и др. (2005) [16], Корытова М.С. (2009) [17], Голдобиной Л.А. и др. (2011) [18].

Учет влияния случайной ветровой нагрузки на динамические режимы работы стрелового крана, в том числе при экстремальных условиях эксплуатации, выполнен в работе Подобед В.А. (2006) [19]. Подобед Н.Е. и др. (2009) [20] составили расчётную схему нагрузок на порталный кран с учетом динамического воздействия ветровой нагрузки и собственных скоростей движения механизмов вылета стрелы, поворота и передвижения крана в функции соответствующих обобщённых координат. Периг А.В. и др. (2011–2012) [21–22] аналитически решили задачи об определении вида относительной траектории раскачивающегося груза с одновременным учетом как относительного поворота вертикальной плоскости колебаний груза, так и влияния кориолисова ускорения в случае малых колебаний. Abdel-Rahman Е.М. и др. (2002) [23] рассматривают движение груза, прикрепленного к концу стрелы крана, с применением двух- и трехмерных моделей сферического маятника с подвижной точкой закрепления. Vlaјer W. и др. (2008) [24] рассматривают модели вращающегося крана и крана с поступательно перемещающейся тележкой, каждая из которых характеризуется пятью степенями свободы с использованием угловых координат сферического маятника. Јегман В. (2006) [25] изучает основную и уточненную модели вращающегося крана с введением упруго-демпфирующих элементов, а также радиальных и касательных углов раскачивания груза. Митрев R. и др. (2008) [26] предложили модель сферического маятника с кинематически возбуждаемой точкой подвеса.

В известных работах [1]–[26] решение нелинейных задач о раскачивании сферического маятника основано на применении численных методов анализа и неявном учете переносных сил инерции при различных переносных движениях точки подвеса, что и определяет актуальность настоящей работы.

*Целью работы* является явный учет даламберовых сил инерции при нелинейном моделировании задачи о раскачивании груза при повороте стрелы крана и введение относительных декартовых координат, позволяющих найти аналитическое решение линеаризованной задачи в случае равномерного вращения стрелы крана вокруг вертикальной оси вращения.

В рамках решения поставленной задачи авторами данной работы построена нелинейная математическая модель раскачивания груза с явным учетом сил инерции Кориолиса и Даламбера. За счет рационального выбора обобщенных координат проведена линеаризация нелинейной задачи с построением общего аналитического решения. Теоретическая абсолютная траектория раскачивающегося груза установлена на основании решения соответствующей задачи Коши. Экспериментальная абсолютная траектория груза зафиксирована с применением лазерной указки и цифровой фотографии с длительной выдержкой порядка 1 минуты. Удовлетворительное согласование теоретических и экспериментальных результатов подтверждает корректность исходных допущений и построенных математических моделей относительного раскачивания груза в случае равномерного поворота стрелы крана.

## 1. Построение нелинейной математической модели

Для составления уравнений относительного движения сферического маятника (рисунок 1) воспользуемся динамической теоремой Г.Г. Кориолиса. Пусть  $A_x x_1 y_1 z_1$  – оси подвижной системы координат, связанные со стрелой  $DB$  крана, а  $O_2 x_2 y_2 z_2$  – оси неподвижной системы координат, где т.  $O_2$  связана с подпятником, а т.  $A_x$  – проекция т.  $B$  подвеса сферического маятника на горизонтальную плоскость ( $O_2 x_2 y_2$ ). Между относительными координатами  $x_1, y_1, z_1$  и сферическими координатами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  устанавливается взаимно однозначное соответствие следующими уравнениями связи:

$$\begin{cases} x_1 = l \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2); \\ y_1 = l \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2); \\ z_1 = l \cdot (1 - \cos(\alpha_1)). \end{cases} \quad (1)$$

При этом полагаем, что вектор угловой скорости  $\Omega_e = (\omega_{ex}, \omega_{ey}, \omega_{ez})$  переносного вращения имеет три ненулевых проекции на неподвижные оси и относительная скорость  $V_r$  груза  $M$  является произвольным вектором  $V_r = (x'_1, y'_1, z'_1)$ . В первом приближении составим векторное дифференциальное уравнение относительного движения груза  $M$ :

$$m \vec{a}_r = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_e^\tau + \vec{\Phi}_e^{\text{cor}}, \quad (2)$$

где все входящие в (2) вектора схематически изображены на рисунке 1, причем

$$\vec{\Phi}_e^n = (-m) \vec{\Omega}_e \times \vec{\Omega}_e \times \vec{r}; \quad \vec{\Phi}_e^\tau = (-m) \vec{\epsilon}_e \times \vec{r}; \quad \vec{\Phi}_e^{\text{cor}} = (-2m) \vec{\Omega}_e \times \vec{V}_r, \quad (3)$$

где радиус-вектор груза  $r = O_2 M = (x_1, y_1 + R, z_1)$ , а вектор углового ускорения стрелы крана  $\epsilon_e = d\Omega_e/dt = (\epsilon_{ex}, \epsilon_{ey}, \epsilon_{ez})$ .

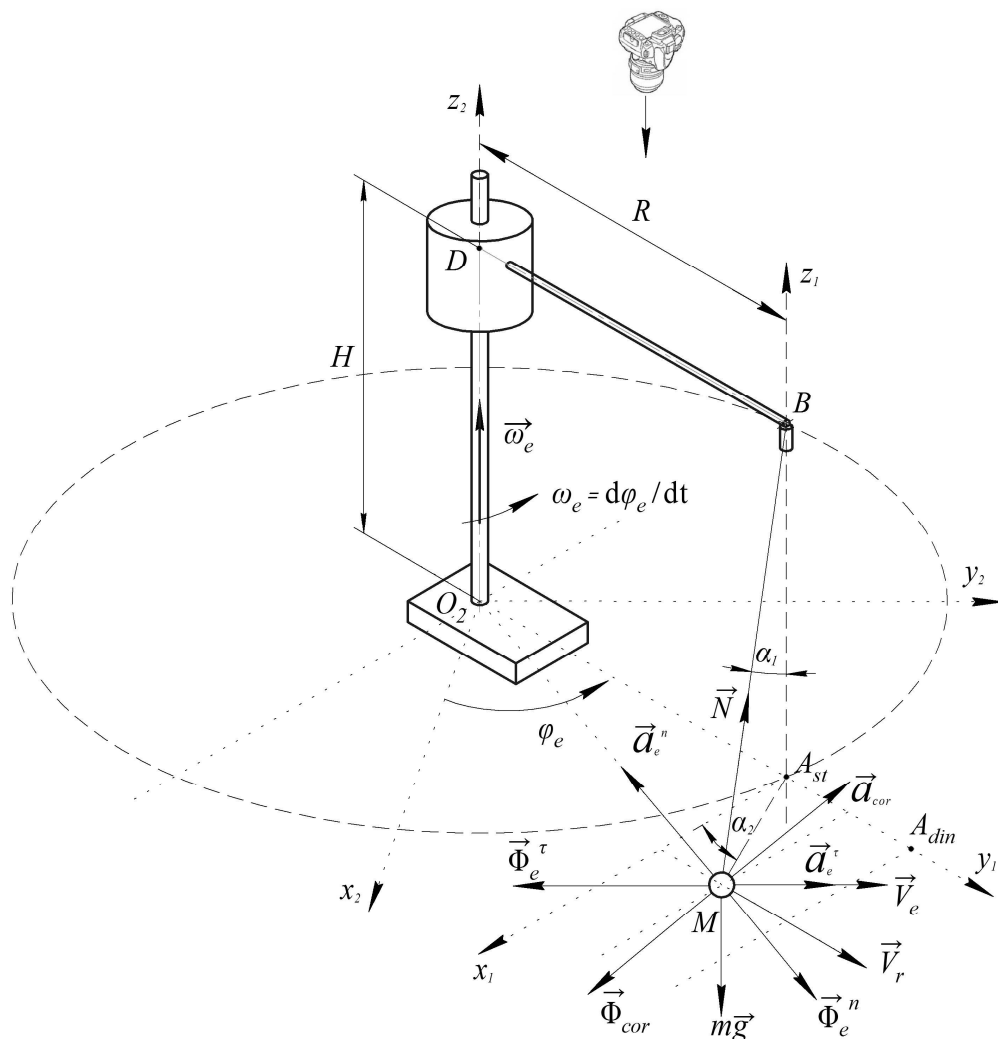


Рисунок 1 – Экспериментально-расчетная схема раскачивания сферического маятника при постоянной угловой скорости  $\omega_e$  переносного вращения стрелы  $BD$

При составлении уравнения (2) вязким сопротивлением  $\mathbf{R} = (-\mu) \cdot \mathbf{V}_{abs}$  и вынуждающими силами пренебрегаем. Проекция нормальной силы инерции  $\Phi_e^n$  на оси  $x_1 y_1 z_1$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi_{ex_1}^n &= m(\omega_{ez} \cdot (\omega_{ez} \cdot x_1 - \omega_{ex} \cdot z_1) - \omega_{ey} \cdot (\omega_{ex} \cdot y_1^* - \omega_{ey} \cdot x_1)); \\ \Phi_{ey_1}^n &= m(\omega_{ex} \cdot (\omega_{ex} \cdot y_1^* - \omega_{ey} \cdot x_1) - \omega_{ez} \cdot (\omega_{ey} \cdot z_1 - \omega_{ez} \cdot y_1^*)); \\ \Phi_{ez_1}^n &= m(\omega_{ey} \cdot (\omega_{ey} \cdot z_1 - \omega_{ez} \cdot y_1^*) - \omega_{ex} \cdot (\omega_{ez} \cdot x_1 - \omega_{ex} \cdot z_1)),\end{aligned}\quad (4)$$

где  $y_1^* = y_1 + R$ . Проекция касательной силы инерции  $\Phi_e^\tau$  на оси  $x_1 y_1 z_1$  запишем в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_{ex_1}^\tau &= m \cdot (\varepsilon_z \cdot y_1^* - \varepsilon_y \cdot z_1); \\ \Phi_{ey_1}^\tau &= m \cdot (\varepsilon_x \cdot z_1 - \varepsilon_z \cdot x_1); \\ \Phi_{ez_1}^\tau &= m \cdot (\varepsilon_y \cdot x_1 - \varepsilon_x \cdot y_1^*).\end{aligned}\quad (5)$$

Проекция Д'Аламберовой силы инерции от ускорения Кориолиса  $\Phi^{cor}$ :

$$\begin{aligned}\Phi_{x_1}^{cor} &= 2m \cdot (y_1' \cdot \omega_{ez} - z_1' \cdot \omega_{ey}); \\ \Phi_{y_1}^{cor} &= 2m \cdot (z_1' \cdot \omega_{ex} - x_1' \cdot \omega_{ez}); \\ \Phi_{z_1}^{cor} &= 2m \cdot (x_1' \cdot \omega_{ey} - y_1' \cdot \omega_{ex}).\end{aligned}\quad (6)$$

Вектор силы тяжести имеет вид:

$$\mathbf{mg} = (0, 0, (-mg)).\quad (7)$$

Вектор реакции связи характеризуется следующими компонентами:

$$\vec{N} = (N_{x1}, N_{y1}, N_{z1}). \quad (8)$$

С учетом соотношений (3)-(8) векторное уравнение (2) принимает вид:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + (-m)\vec{\Omega}_e \times \vec{\Omega}_e \times \vec{r} + (-m)\vec{\epsilon}_e \times \vec{r} + (-2m)\vec{\Omega}_e \times \vec{V}_r. \quad (9)$$

В проекциях на подвижные оси координат с учетом (4)-(8) векторное уравнение (9) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} mx_1'' = N_{x1} + m(\omega_{ez}(\omega_{ez}x_1 - \omega_{ex}z_1) - \omega_{ey}(\omega_{ex}y_1^* - \omega_{ey}x_1) + (\epsilon_z y_1^* - \epsilon_y z_1) + 2(y_1' \omega_{ez} - z_1' \omega_{ey})); \\ my_1'' = N_{y1} + m(\omega_{ex}(\omega_{ex}y_1^* - \omega_{ey}x_1) - \omega_{ez}(\omega_{ey}z_1 - \omega_{ez}y_1^*) + (\epsilon_x z_1 - \epsilon_z x_1) + 2(z_1' \omega_{ex} - x_1' \omega_{ez})); \\ mz_1'' = N_{z1} - mg + m(\omega_{ey}(\omega_{ey}z_1 - \omega_{ez}y_1^*) - \omega_{ex}(\omega_{ex}x_1 - \omega_{ex}z_1)) + (\epsilon_y x_1 - \epsilon_x y_1^*) + 2(x_1' \omega_{ey} - y_1' \omega_{ex}). \end{cases} \quad (10)$$

Получена система дифференциальных уравнений движения (10), правые части которых линейно зависят от относительных координат  $x_1, y_1, z_1$  и проекций относительных скоростей  $x_1', y_1', z_1'$ . При этом нелинейности системы (10) связаны с проекциями переменных угловых скоростей  $\omega_{ex}, \omega_{ey}, \omega_{ez}$  и ускорений  $\epsilon_{ex}, \epsilon_{ey}, \epsilon_{ez}$  переносного движения, а также с проекциями реакции нити  $N_{x1}, N_{y1}, N_{z1}$ .

## 2. Линеаризация нелинейной математической модели

Для построения линеаризованной модели в первом приближении будем рассматривать малые изменения угла  $\alpha_1$  и равномерное переносное вращение стрелы  $BD$  вокруг неподвижной оси  $O_2z_2$ , т.е. полагаем, что  $\omega_{ex} = \omega_{ey} = 0$ ;  $\omega_{ez} = \omega_e = const$ , а также  $\epsilon_{ex} = \epsilon_{ey} = \epsilon_{ez} = 0$ . В таком случае система уравнений (10) существенно упрощается и примет вид:

$$\begin{cases} mx_1'' = N_{x1} + m\omega_e^2 x_1 + 2my_1' \omega_e; \\ my_1'' = N_{y1} + m\omega_e^2 (y_1 + R) - 2m\omega_e x_1'; \\ mz_1'' = N_{z1} - mg. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая рисунок 1, находим проекции реакции нити на оси координат  $x_1, y_1, z_1$ :

$$\begin{cases} N_{x1} = N \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2); \\ N_{y1} = N \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2); \\ N_{z1} = N \cdot \cos(\alpha_1). \end{cases} \quad (12)$$

Принимая во внимание (1)  $z_1 = l(1 - \cos(\alpha_1))$  и учитывая малые значения угла  $\alpha_1$ , можно считать, что  $z_1' = 0$  и  $z_1'' = 0$ . Следовательно, из последнего уравнения системы (12) находим  $N = N_{z1} = mg$ . Из (12) проекции реакции нити на оси координат  $x_1, y_1, z_1$  примут вид:

$$\begin{cases} N_{x1} = -mg \cdot (x_1/l); \\ N_{y1} = -mg \cdot (y_1/l); \\ N_{z1} = mg. \end{cases} \quad (13)$$

С учетом (13) из трех уравнений системы (11) получим два дифференциальных уравнения относительно переменных  $x_1$  и  $y_1$  с учетом того, что  $z_1 = l(1 - \cos(\alpha_1)) = const$ :

$$\begin{cases} mx_1'' = -mg \cdot (x_1/l) + m\omega_e^2 x_1 + 2my_1' \omega_e; \\ my_1'' = -mg \cdot (y_1/l) + m\omega_e^2 (y_1 + R) - 2m\omega_e x_1'. \end{cases} \quad (14)$$

Введем новую систему осей координат, начало которой поместим в положение динамического равновесия. При этом  $x = x_1$ ;  $y = y_1 - y_{dyn}$ , где  $y_{dyn} = A_{st} A_{dyn} = (\omega_e^2 \cdot R \cdot l) / (g - \omega_e^2 \cdot l)$ . Сокращая систему (14) на массу  $m$  груза  $M$ , получим нормальную систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка для относительного движения груза:

$$\begin{cases} x'' + g \cdot (x/l) - \omega_e^2 x - 2\omega_e y' = 0; \\ y'' + g \cdot (y/l) - \omega_e^2 y + 2\omega_e x' = 0. \end{cases} \quad (15)$$

### 3. Аналитическое решение для линеаризованной задачи

В рамках анализа системы (15) получим следующую матрицу собственных частот:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + (g/l) - \omega_e^2 & -2 \cdot \omega_e \cdot \lambda \\ 2 \cdot \omega_e \cdot \lambda & \lambda^2 + (g/l) - \omega_e^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Павловским М.А. (2002) исследовалась устойчивость гироскопического маятника с матрицей подобной структуры. При этом в работе [27] не приведена методика построения общего решения, которое будем искать в следующем классическом виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{Re} \left[ \sum_{j=1}^4 (C_j U_j e^{\lambda_j t}) \right], \quad (17)$$

где векторы  $\mathbf{C}$ ;  $\mathbf{U}$  и  $\lambda$  – это комплексно-сопряженные величины. В данном случае вектор  $\mathbf{C} = (C_1; C_2; C_3; C_4)$  является вектором-строкой констант интегрирования для (15), которые определяются из начальных условий раскачивания груза. Вектор  $\mathbf{U} = (U_1; U_2; U_3; U_4)^T$  является вектором-столбцом, который определяет формы колебаний при раскачивании груза.

Запишем характеристическое биквадратное уравнение IV порядка системы (15) в виде

$$\lambda^4 + 2((g/l) + \omega_e^2) \cdot \lambda^2 + ((g/l) - \omega_e^2)^2 = 0. \quad (18)$$

Корни (18) запишем как

$$\lambda_{1,2} = \pm v_1 \cdot i; \quad \lambda_{3,4} = \pm v_2 \cdot i; \quad v_1 = k + \omega_e; \quad v_2 = k - \omega_e; \quad k = \sqrt{g/l}; \quad \omega_e \neq k, \quad (19)$$

где  $k = (g/l)^{0.5}$  – это собственная частота колебаний груза на тросе длиной  $l$ , [с<sup>-1</sup>].

Так как корни (19) комплексно-сопряженные, то и собственные вектора, которые соответствуют корням (19), тоже получаются величинами комплексно-сопряженными и имеющими вид:

$$U_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}; \quad U_{3,4} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Подставляя величины (18)-(20) в (17) после несложных преобразований находим, что

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \sin(v_1 \cdot t) + C_2 \cos(v_1 \cdot t) + C_3 \sin(v_2 \cdot t) + C_4 \cos(v_2 \cdot t); \\ y(t) = C_1 \cos(v_1 \cdot t) - C_2 \sin(v_1 \cdot t) - C_3 \cos(v_2 \cdot t) + C_4 \sin(v_2 \cdot t). \end{cases} \quad (21)$$

С учётом начальных условий задачи:

$$x_0 = 0; \quad dx_0/dt = -V_B = -\omega_e R; \quad y_0 = -y_{dyn}; \quad dy_0/dt = 0. \quad (22)$$

константы интегрирования в (21) имеют следующий вид:  $C_2 = C_4 = 0$ ;

$$C_1 = (y_{dyn} \cdot (\omega_e - k) - V_B) / (2k); \quad C_3 = (y_{dyn} \cdot (\omega_e + k) - V_B) / (2k). \quad (23)$$

С учетом (21) и (23) определим абсолютные координаты  $x_2, y_2$  груза  $M$ :

$$\begin{cases} x_2 = (R + y + y_{dyn}) \cdot \cos(\omega_e t) + x \cdot \sin(\omega_e t); \\ y_2 = (R + y + y_{dyn}) \cdot \sin(\omega_e t) - x \cdot \cos(\omega_e t). \end{cases} \quad (24)$$

На основании (24) была построена теоретическая абсолютная траектория груза  $M$  (кривая 1) на рисунке 2 для следующих значений параметров системы:  $R = 0,492$  м;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $l = 0,825$  м;  $k = (g/l)^{0.5} \approx 3,448$  рад/с;  $T = 30$  с;  $\omega_e = 2\pi/T \approx 0,209$  рад/с;  $\alpha_{1dyn} = 0,0022$  рад;  $V_B = 0,103$  м/с;  $y_{dyn} = 0,0018$  м;  $v_1 = k + \omega_e = 3,658$  рад/с;  $v_2 = k - \omega_e = 3,239$  рад/с.

### 4. Экспериментальная верификация аналитического решения

Для подтверждения теоретических результатов сконструирована экспериментальная установка (рисунке 1), состоящая из неподвижного вертикального вала  $O_2D$ , стрелы  $BD$ , закрепленной на валу  $O_2D$  с помощью шарнира  $D$ . К концу стрелы  $BD$  в точке  $B$  прикреплена нить  $BM$  с грузом  $M$ . На неподвижной горизонтальной плоскости  $O_2x_2y_2$  нанесена градуированная сетка с квадратными ячейками со сторонами 2 см. Для записи абсолютной экспериментальной траектории (кривая 2) на рисунке 2 к грузу  $M$  прикреплялся светодиод с батарейкой (траектория светодиода и является кривой 2 на рисунке 2), а в точке  $B$  была установлена лазерная указка. Результаты эксперимента фиксировались с применением цифрового фотоаппарата с большой выдержкой и представлены на рисунке 2 (кривая 2).

### 5. Обсуждение результатов

В момент остановки стрелы крана  $\varphi_e = 180^\circ$ , угловая скорость переносного вращения стрелы  $\omega_e = 0$ , угловое ускорение  $\epsilon_e = 0$  и точка  $B$  неподвижна. В этом случае в каждом из уравнений системы (15) третьи и четвертые слагаемые равны нулю. Это означает, что Даламберовы силы инерции от переносного движения и Кориолисова ускорения отсутствуют.

Из решения системы (15) следует, что дальнейшее движение груза  $M$  осуществляется по эллипсу с частотой  $k$  и с центром в положении статического равновесия груза. Конечные условия для движения груза на участке  $0^\circ < \varphi_e < 180^\circ$  являются начальными условиями для движения груза  $M$  по эллиптической траектории, что и определяет полуоси эллипса. Экспериментально наблюдаемое движение груза  $M$  после остановки стрелы на рисунке 2 подтверждает корректность системы (15) как на участке  $0^\circ < \varphi_e < 180^\circ$ , так и в случае наложения дополнительной связи, обусловленной остановкой стрелы, что уменьшает число степеней свободы системы на единицу за счет  $\omega_e = 0$ .

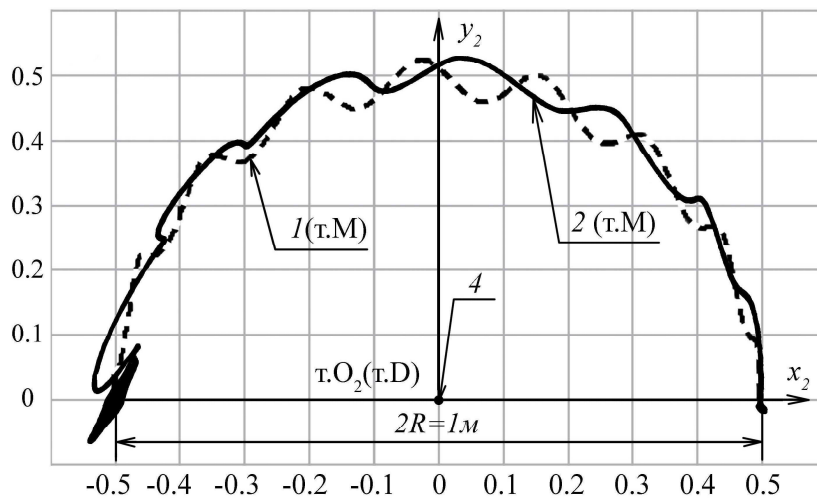


Рисунок 2 – Теоретическая (1) и экспериментальная (2) абсолютные траектории груза

Объединение движений груза  $M$  на участках  $0^\circ < \varphi_e < 180^\circ$  ( $\omega_e \neq 0$ ) и  $\varphi_e = 180^\circ$  ( $\omega_e = 0$ ) можно осуществить дальнейшим обобщением системы (15) в случае наложения дополнительной связи в удобном для численного интегрирования виде:

$$\begin{cases} x'' + g \cdot (x/l) - (\omega_e^2 x + 2|\omega_e|y') \cdot \text{sign}(\omega_e) = 0; \\ y'' + g \cdot (y/l) - (\omega_e^2 y - 2|\omega_e|x') \cdot \text{sign}(\omega_e) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Одно из направлений последующих исследований связано с анализом и применением системы (25) для переменной угловой скорости вращения стрелы, что позволит корректно учитывать знак и степень угловой скорости  $\omega_e$ . Для получения замкнутой системы к уравнениям (25) необходимо добавить дифференциальное уравнение вращательного движения системы вокруг оси  $O_2z_2$ .

Нелинейные дифференциальные уравнения (10) позволяют дополнительно анализировать влияние бортовой качки корабля на динамику переноса груза, полагая закон изменения угловой скорости переносного вращения в виде  $\omega_{ex} = A \cdot \sin(k^* \cdot t)$  и  $\omega_{ez} \neq 0$ .

Направление дальнейших исследований требует учета переменности длины троса  $BM = l$  с учетом скорости и ускорения изменения её длины, а также добавлением нового дифференциального уравнения Лагранжа второго рода, соответствующего данной обобщённой координате  $BM = l$ . По найденным законам движения груза можно исследовать натяжение троса решая первую задачу динамики.

Учёт поступательного переносного движения может быть осуществлен введением только одной дополнительной переносной силы инерции, так как кориолисова сила инерции в этом случае отсутствует. Учет периодических возмущений приведет к анализу соответствующих дифференциальных уравнений вынужденных колебаний в случаях наличия и отсутствия резонанса.

Демпфирование механической системы несколько уменьшит собственные частоты, незначительно увеличит период собственных колебаний и приведет к затухающим движениям груза.

Введение ветровой случайной нагрузки можно проанализировать с помощью построения соответствующей передаточной функции и получения требуемых спектральных характеристик на входе

и на выходе механической системы. Учет ударного нагружения рассматриваемого сферического маятника можно проводить с применением методов операционного исчисления.

### **Выводы**

В рамках постановки нелинейной задачи о движении сферического маятника с подвижной точкой закрепления, получены уравнения движения груза (10), позволяющие дать явную интерпретацию физических причин сложного движения маятника. В системе (10) в явном виде представлены слагаемые, связанные с нормальными и касательными составляющими сил инерции от переносного движения и от кориолисовой силы инерции.

В частном случае движения при постоянном переносном вращении стрелы крана нелинейная система (10) после упрощений и линеаризации записана в виде системы (15) двух уравнений второго порядка, которая допускает аналитическое решение задачи в виде (21).

Подробно изложена методика (17) построения общего решения (21) с применением комплексных переменных, которая рекомендуется для построения общего решения дифференциальных уравнений колебательного движения для механических систем с числом степеней свободы большим двух.

Система (15) содержит слагаемые с относительной скоростью груза, но относится к консервативным системам, в которых относительная скорость груза не уменьшается, а только изменяет свое направление в горизонтальной плоскости.

### **Библиографический список использованной литературы**

1. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения / М.В. Шамолин // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 2008. — Т. 14. — Вып. 3. — С. 3–237.
2. Маркеев А.П. О невырожденности функции Гамильтона сферического маятника / А.П. Маркеев // *Доклады Академии наук*. — 2010. — Т. 430. — N 2, январь. — С. 189–194.
3. Зельдович Б.Я. Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений / Б.Я. Зельдович, М.Дж. Суало // *Успехи физических наук*. — 2004. — Т. 174. — № 12. — С. 1337–1354.
4. Петров А.Г. Асимптотическое интегрирование гамильтоновых систем / А.Г. Петров // *Механика твердого тела: межвед. сб. науч. тр.* — 2005. — Вып. 35. — С. 84–91.
5. Глухих Ю.Д. Колебания сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса / Ю.Д. Глухих // *Механика твердого тела: межвед. сб. науч. тр.* — 2005. — Вып. 35. — С. 109–114.
6. Холостова О.В. О бифуркациях и устойчивости резонансных периодических движений гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана / О.В. Холостова // *Нелинейная динамика*. — 2006. — Т. 2. — № 1. — С. 89–110.
7. Вишенкова Е. А. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса / Е.А. Вишенкова, О.В. Холостова // *Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки*. — 2012. — № 2. — С. 114–129.
8. Ловейкін В.С. Комплексний синтез оптимального керування рухом вантажопідйомного крана / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: український міжвідомчий науково-технічний збірник / НУ «Львівська політехніка», відп. ред. З.А. Стоцько*. — Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2011. — Вип. 45. — С. 385–399.
9. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху кранового візка за комплексним критерієм, що враховує швидкості та прискорення / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич // *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України: зб. наук. пр.* — 2009. — Вип. 134. — Ч. 2. — С. 218–229.
10. Ловейкін В.С. Дослідження коливань вантажу на гнучкому підвісі при роботі механізму повороту стрілового крану / В.С. Ловейкін, В.М. Рибалко, В.В. Мельніченко // *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України: зб. наук. пр.* — 2011. — Вип. 166. — Ч. 2. — С. 115–121.
11. Кузьмин А.Н. Исследование колебаний груза на гибком подвесе при повороте крана / А.Н. Кузьмин, В.В. Суглобов, В.И. Федун // *Захист металургійних машин від поломок: зб. наук. пр.* — Маріуполь: ПДТУ, 2011. — Вип. 13. — С. 141–147.
12. Разработка оптимального управления движениями башенного крана / Е.В. Макаревич, В.Н. Шамардина, Ф. Палис, С. Палис / *Электротехнические и компьютерные системы: научно-технический журнал*. — Одеса: ОНПУ, 2011. — № 3. — С. 170–171.
13. Герасимьяк Р.П. Особливості керування електроприводом механізму вильоту стріли під час обертання крана з підвищеним вантажем / Р.П. Герасимьяк, О.В. Найденко // *Электротехнические и компьютерные системы: научно-технический журнал*. — Одеса: ОНПУ. — 2007. — Вип. 68. — С. 11–15.

14. Управление и защита грузоподъемного крана с гашением раскачивания груза. Ч. 1 / А.А. Зарецкий, Л.С. Каминский, Д.М. Маш, И.А. Пятницкий, И.Г. Фёдоров // Журнал «Все Краны». — Санкт-Петербург: ООО «Издательский дом «Кран-Сервис», 2007. — № 16/16. — С. 10–13.
15. Управление и защита грузоподъемного крана с гашением раскачивания груза. Ч. 2 / А.А. Зарецкий, Л.С. Каминский, Д.М. Маш, И.А. Пятницкий, И.Г. Фёдоров // Журнал «Все Краны». — Санкт-Петербург: ООО «Издательский дом «Кран-Сервис», 2008. — № 01/17. — С. 8–12.
16. Дремов В.И. К вопросу о создании энергоэффективных отечественных мощных грузоподъемных средств для условий природно-техногенных катаклизмов / В.И. Дремов, В.Г. Ивахник, А.В. Ляхомский // Горный информационно-аналитический бюллетень. — М.: МГГУ, 2005. — № 6. — С. 274–278. — ISSN 0236-1493.
17. Корятов М.С. О перемещении груза автокраном вдоль заданной траектории при ограничении количества одновременно управляемых координат / М.С. Корятов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Технические науки. — Самара: СамГТУ, 2009. — № 2 (24). — С. 105-112.
18. Голдобина Л.А. Теоретическое обоснование снижения раскачивания груза на канате строительного крана / Л.А. Голдобина, А.В. Власов, А.Л. Бочков // Техничко-технологические проблемы сервиса. — Санкт-Петербург: СПбГУСЭ, 2011. — Т. 2. — № 16. — С. 52–60. — ISSN 2074-1146.
19. Подобед В.А. Теоретические исследования основных показателей работы порталного крана "Альбрехт" при динамическом воздействии ветра / В.А. Подобед // Вестник Мурманского государственного технического университета. — Мурманск: МГТУ, 2006. — Т. 9. — № 3. — С. 522–530.
20. Подобед Н.Е. Математическое моделирование ветровых нагрузок на механизмы передвижения порталных кранов прямой стрелой / Н.Е. Подобед, В.А. Подобед, В.И. Меньшиков // Вестник Мурманского государственного технического университета. — Мурманск: МГТУ, 2009. — Т. 12. — № 1. — С. 27–33. — ISSN 1560-9278.
21. Периг А.В. О динамических режимах работы стрелового крана при постоянном угле вылета стрелы / А.В. Периг, А.Н. Стадник, И.А. Матвеев // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії: зб. наук. праць. — Краматорськ: ДДМА, 2011. — № 4 (25). — С. 234–239.
22. Періг О.В. Горизонтальні коливання вантажу на тросі при рівномірному повороті стріли крану / О.В. Періг, О.М. Стадник, О.І. Дериглазов // Механіка та машинобудування: наук.-техн. журнал. — Харків: НТУ "ХПІ", 2012. — № 1. — С. 33–40.
23. Abdel-Rahman E.M. Pendulation reduction in boom cranes using cable length manipulation / E.M. Abdel-Rahman, A.H. Nayfeh // Nonlinear Dynamics. — 2002. — Vol. 27. — N 3. — P. 255–269.
24. Blajer W. Modeling of underactuated mechanical systems in partly specified motion / W. Blajer, K. Kołodziejczyk // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. — 2008. — Vol. 46. — N 2. — P. 383–394.
25. Jerman B. An enhanced mathematical model for investigating the dynamic loading of a slewing crane / B. Jerman // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. — 2006. — N 220. — P. 421–433. Doi:10.1243/09544062C08205.
26. Mitrev R. Dynamic behaviour of a spherical pendulum with spatially moving pivot / R. Mitrev, B. Grigorov // Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. — 2008. — N. 9. — P. 81–91.
27. Павловський М. А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. — Київ: Техніка, 2002. — 512 с.

*Поступила в редакцію 4.04.2013 г.*

#### **Стадник О.М., Періг О.В., Дериглазов О.І. Застосування відносних декартових координат для складного руху сферичного маятника**

Із застосуванням динамічної теореми Коріоліса одержані нелінійні диференціальні рівняння руху сферичного маятника при довільних кутових швидкостях і прискореннях переносного руху стріли крану. Для сталої вертикальної кутової швидкості здійснено лінеаризацію та одержано аналітичний розв'язок. Теоретичні результати математичного моделювання задовільно узгоджуються із експериментальними.

**Ключові слова:** сферичний маятник, стріловий кран, розгойдування вантажу, Коріолісова сила інерції, диференціальне рівняння відносного руху.

#### **Stadnik A.N., Perig A.V., Deriglazov A.I. Introduction of Relative Cartesian Coordinates for the Compound Motion of Spherical Pendulum**

The non-linear differential equations of spherical pendulum motion at arbitrary angular velocities and angular accelerations of transport crane boom motion have been derived with the introduction of Coriolis dynamic theorem. Obtained system was linearized and solved analytically for the constant vertical angular velocity of crane boom rotation. The satisfactory agreement with experimental data has been outlined.

**Keywords:** spherical pendulum, jib type crane, swaying load, Coriolis inertia force, relative motion differential equation.