

УДК 534.231

**О.Р. Ластовенко, кандидат физ.-мат. наук, доцент,**

**Ж.В. Маленко, аспирант,**

**К.А. Рыбакова, кандидат физ.-мат. наук, доцент,**

**А.А. Ярошенко, доктор физ.-мат. наук, профессор**

*Севастопольский национальный технический университет,*

*Кафедра высшей математики,*

*ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053*

## **ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА И СИНГУЛЯРНЫЕ ТОЧКИ**

## **ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПОТОКА МОЩНОСТИ В ВОЛНОВОДЕ МЕЛКОГО МОРЯ**

*Рассматривается пространственная структура векторных полей в волноводе мелкого моря в случае одномодового и многомодового характера распространения звука, выясняется расположение, тип особых точек векторного поля и пространственный размер областей, охваченных вихрями.*

**Ключевые слова:** поле потока мощности, колебательная скорость, сингулярные точки.

**Введение.** В акустике океана скалярным полем называют поле акустического давления, а векторными – поля вектора колебательной скорости и вектора интенсивности плотности потока мощности (далее «поле вектора интенсивности») [1]. При многомодовом распространении звука в волноводе возникают особые точки, где горизонтальная и вертикальная составляющие вектора интенсивности равны нулю. Между особыми точками поля прямое направление тока энергии в волноводе изменяется на обратное [1-3].

В настоящее время, при экспериментальных исследованиях, кроме приемников акустического давления, применяются и приемники градиентов давления – датчики колебательной скорости. Интуитивное убеждение, что исследование кроме скалярного поля давления, так же «векторного» поля колебательной скорости и энергетических характеристик полей вызовет значительный прогресс в общем понимании структуры акустических полей в средах, способствовало успешному развитию техники и методов векторно-фазовых измерений.

К настоящему времени апробированы в натуральных условиях технические средства, методы и методики измерений скалярно-векторных характеристик естественных акустических полей, что в принципе дает возможность извлечения дополнительной информации о среде [3-5]. Ожидалось, что совместное использование датчиков давления и колебательной скорости приведет к решению ряда прикладных задач акустики мелкого моря, однако, вследствие опережающего развития техники измерений образовался разрыв между измерительным потенциалом и возможностями осмысления результатов измерений, основанных в конечном итоге на возможностях моделирования векторных компонент акустических полей.

Методы расчета полей давления в горизонтально-слоистых волноводах хорошо разработаны [6], однако задача моделирования поля вектора интенсивности потока мощности практически находится на начальной стадии развития. Связано это с тем, что для нахождения поля вектора интенсивности «по определению», помимо акустического давления, требуется знание поля колебательной скорости (КС).

**Постановка цели и задачи научного исследования.** Целью статьи является моделирование структуры поля вектора интенсивности в волноводах мелкого моря и выяснение «акустической» природы сингулярных точек при многомодовом характере распространения звука.

**Основные определения и описание метода моделирования.** Наиболее просто поле КС может быть вычислено в виде суммы нормальных волн (мод) горизонтальной и вертикальной компонент колебательной скорости. Поле компонент КС отдельной нормальной волны, можно получить, используя дифференциальную связь между компонентами КС и акустическим давлением. Такой подход особенно удобен, когда имеются аналитические выражения для поля давления в виде суммы нормальных волн.

Акустическое давление  $p(r,z)$  гармонического источника и компоненты вектора КС  $v$  в плоскостойком волноводе связаны друг с другом соотношением:

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p(r,z)}{\partial z}, \quad v_r = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p(r,z)}{\partial r}. \quad (1)$$

В зависимости от свойств соприкасающихся сред, при построении решения уравнения Гельмгольца для давления применяют известные типы граничных условий: равенства нулю давления на свободной границе жидкости; равенства нулю нормальной к абсолютно жесткой границе составляющей КС; условие непрерывности давления и нормальной составляющей КС на границе двух жидких сред.

Выведем необходимое для решения задачи моделирования поля вектора интенсивности дополнительное граничное условие для касательной составляющей вектора КС [7]. Представим два жидких слоя «1» и «2», обозначив касательные к границе раздела компоненты КС как  $v_{1r}$  и  $v_{2r}$ . Поскольку давление непрерывно в каждой точке поверхности, производные акустического давления по направлениям, касательным к поверхности, также непрерывны на границе раздела, т.е.  $\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}$ . Тогда,

записав уравнение Эйлера  $-\rho_1 \frac{\partial v_{1r}}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial r}$ ,  $-\rho_2 \frac{\partial v_{2r}}{\partial t} = \frac{\partial p_2}{\partial r}$  и приравняв левые части, получим:

$$\rho_1 v_{1r} = \rho_2 v_{2r}.$$

Непрерывность нормальной и разрывность тангенциальной компоненты вектора КС на границе раздела жидких сред известна, однако условие, устанавливающее их пропорциональную связь, представляется довольно новым результатом [7].

Обычно энергетические характеристики волны характеризуют средним за период значением плотности потока мощности, называемом вектором интенсивности плотности потока мощности (или вектором Умова), проекция которого на некоторое направление  $\mathbf{n}$  определяется как [8]

$$I_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^* v_n) = \frac{1}{2} |pv_n| \cos(\arg(p) - \arg(v_n)) = \frac{1}{2} (\operatorname{Re}(p) \operatorname{Re}(v_n) + \operatorname{Im}(p) \operatorname{Im}(v_n)), \quad (2)$$

где  $*$  – символ комплексного сопряжения;  $p$ ,  $v_n$  – комплексные амплитуды;  $\arg(p)$ ,  $\arg(v_n)$  – фазы давления и соответствующей компоненты КС.

Из (2) видно, что амплитудные и разностно-фазовые соотношения между давлением и колебательной скоростью отражают особенности формируемого поля вектора интенсивности. В случае синфазности  $p$  и  $v_n$ , например, в поле плоской бегущей в безграничном пространстве волны, вектор Умова направлен вдоль направления распространения волны перпендикулярно волновому (фазовому) фронту. Графически поле вектора интенсивности изображают линиями тока энергии (streamlines). Вектор интенсивности потока в каждой точке направлен по касательной к линии тока.

Комплексная амплитуда поля акустического давления в водном слое в виде суммы мод может быть записана в виде

$$p(r, z) = \sum_{l=1}^{l_m} p_l(r, z) = \sum_{l=1}^{l_m} Q_l p_l(z) H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (3)$$

где  $l_m$  – максимальный номер моды, возбуждающейся на данной частоте;  $p_l(z)$  – нормированные вертикальные профили мод;  $\xi_l$  – горизонтальное волновое число;  $Q_l$  – коэффициенты возбуждения мод. На основе (1) комплексные амплитуды составляющих колебательной скорости могут быть представлены в виде

$$v_r(r, z) = \frac{-i}{\omega \rho^2 c} \sum_{l=1}^{l_m} v_{rl}(r, z) = \frac{-i}{\omega \rho^2 c} \sum_{l=1}^{l_m} Q_l p_l(z) \xi_l H_1^{(1)}(\xi_l r), \quad (4)$$

$$v_z(r, z) = \frac{-i}{\omega \rho^2 c} \sum_{l=1}^{l_m} v_{zl}(r, z) = \frac{-i}{\omega \rho^2 c} \sum_{l=1}^{l_m} Q_l \frac{\partial p_l(z)}{\partial z} H_0^{(1)}(\xi_l r). \quad (5)$$

Классификации особых точек посвящена работа [8]. Очевидно из (2), что критические точки поля вектора интенсивности  $\mathbf{I}(r, z)$  в  $(r_0, z_0)$  могут быть в любой из следующих ситуаций:

- 1)  $\operatorname{Re}(p(r_0, z_0)) = \operatorname{Im}(p(r_0, z_0)) = 0$ ;
- 2)  $\operatorname{Re}(v_r(r_0, z_0)) = \operatorname{Im}(v_r(r_0, z_0)) = 0$ ,  $\operatorname{Re}(v_z(r_0, z_0)) = \operatorname{Im}(v_z(r_0, z_0)) = 0$ ;
- 3) фаза давления и колебательной скорости в точке  $(r_0, z_0)$  отличаются на нечетное число  $\pi/2$ ;
- 4) комбинация двух предыдущих случаев.

Показано [8], что для интенсивности потока мощности сингулярная точка – центр при поле давления. Ротор интенсивности потока отличен от нуля. Сингулярная точка седловая, если это – изолированный ноль колебательной скорости, либо точка в которой фазы скорости и давления отличаются на нечетное число  $\pi/2$  или комбинация предыдущих двух ситуаций. Ротор интенсивности потока равен нулю.

**Результаты расчетов.** Простейшей моделью является волновод с абсолютно отражающими границами. Поле давления в виде суммы мод в идеальном волноводе выражается аналитическими формулами и является точным. Если известно поле давления (3), то с помощью (4) и (5) нетрудно получить и поле компонент КС. Рассмотрим на рисунке 1 поле вектора интенсивности. Яркость пропорциональна абсолютной величине поля, стрелками указано направление вектора потока. Частота

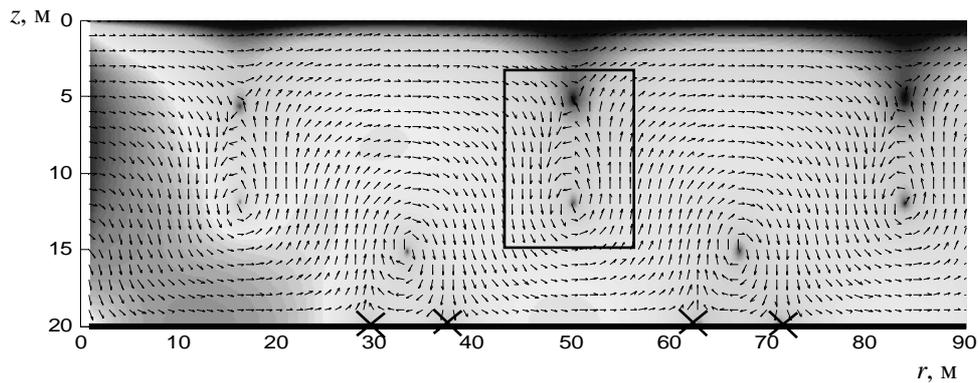


Рисунок 1 – Поле и особые точки вектора интенсивности потока мощности

57 Гц, 2 моды. Отчетливо видны особые точки – центры и седла. Пространственная периодичность особых точек определяется разностью горизонтальных волновых чисел  $(\xi_1 - \xi_2)r = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , откуда при  $\xi_1 \approx 0.225 \text{ м}^{-1}$ ,  $\xi_2 \approx 0.039 \text{ м}^{-1}$  можно получить  $r_1 \approx 17 \text{ м}$ ,  $r_2 \approx 34 \text{ м}$ ,  $r_3 \approx 51 \text{ м}$ , что совпадает с картиной на рисунке 1, причем если  $\cos((\xi_1 - \xi_2)r) = -1$ , вихрь вращается против часовой стрелки, если  $+1$ , то по часовой стрелке.

Для детального выяснения «акустической» природы особых точек рассмотрим на рисунке 2 «типичную» пару, отмеченную на рисунке 1 рамкой. На рисунке 2 в центре – увеличенный фрагмент, на котором видны два нуля абсолютной величины интенсивности (в яркостном виде). Снизу – центр, вокруг которого образуется вихрь потока, сверху – седло, где отмечены линии кроссирования потока. Между центром и седлом направление потока – обратное. На разрезе поля по линии А-А (линии: сплошная –  $|p|$ , пунктирная –  $|v_r|$ , точечная –  $|v_z|$ ), видно, что центр – это точка, где  $|p|=0$ . Из вертикального разреза слева видно, что в седловой точке  $|v_r| \neq 0$  и  $|v_z| \neq 0$ . На вертикальном разрезе справа – разности фаз между давлением и составляющими КС. В седловой точке и  $\arg(p) - \arg(v_r) = 90^\circ$  и  $\arg(p) - \arg(v_z) = 90^\circ$ , вследствие чего и образуется нуль интенсивности. Кроме того, от седловой точки и до поверхности  $I_z = 0$ . Нижняя группа особых точек с двумя седлами характерна только для идеального волновода, поскольку равенство нулю  $|v_z|$  прямо следует из граничных условий.

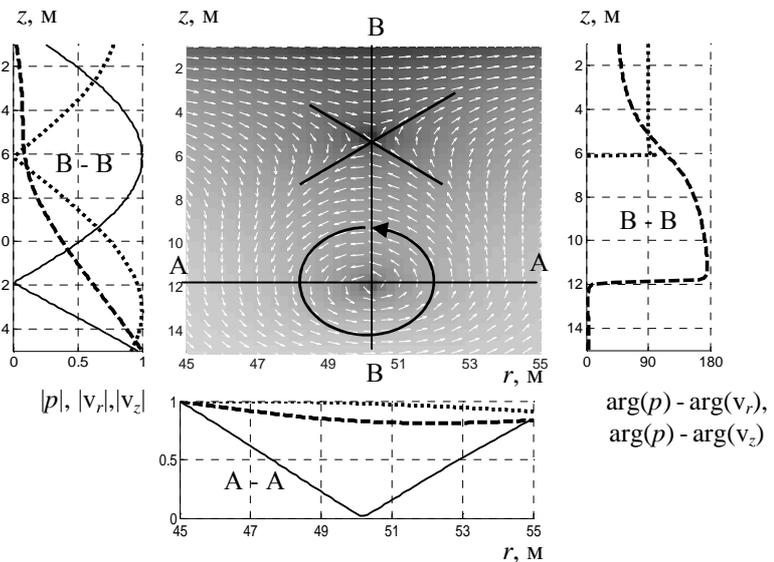


Рисунок 2 – Пара особых точек поля интенсивности

Рассмотрим на рисунке 3 структуру поля интенсивности в изоскоростном «трехслойном» волноводе Пекериса. Толщина водного слоя 20 м, промежуточного 25 м, источник – посередине водного слоя. Частота 90 Гц, две моды. В зависимости от глубины источника, возникают две системы вихрей, «верхняя», ближе к поверхности и «нижняя», ближе ко дну. Аналогичная система вихрей возникает также и в промежуточном слое. Вблизи поверхности направление тока энергии почти прямолинейно. Основной ток энергии осуществляется в «обход» системы верхних и нижних вихрей, причем линии тока проникают в промежуточный слой и затем возвращаются обратно в водный. Расстояние между центром и седловой точкой составляет примерно  $0.1 \lambda$ . С увеличением расстояния верхние вихри водного слоя приближаются к поверхности, нижние – заглубляются в промежуточный слой и сливаются с ближними к границе раздела вихрями промежуточного слоя. По мере «высвечивания» 2-й моды, начиная с дистанций  $\approx 1 \text{ км}$  особые точки вырождаются, и генеральное направление тока энергии соответствует току 1-й моды.

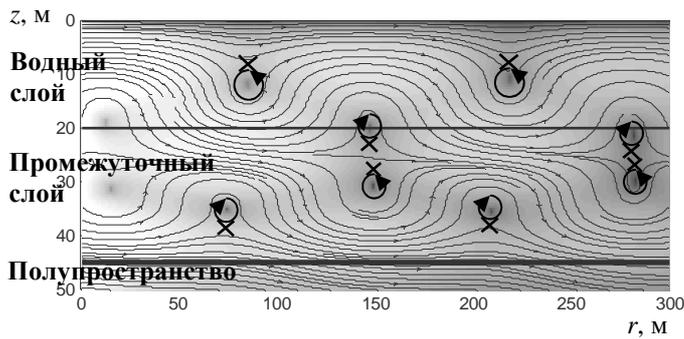


Рисунок 3 – Поле вектора интенсивности и линии тока энергии в 3-слойном волноводе

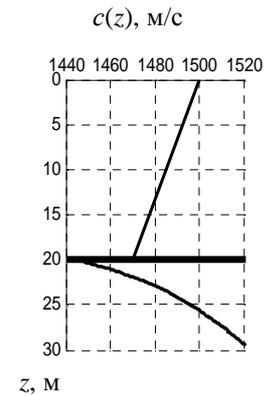


Рисунок 4 – Профиль скорости звука

Более реалистичной моделью волновода является волновод с непостоянным профилем скорости звука (ПСЗ) и дном с вертикальным градиентом фазовой скорости звука и тангенса потерь. Для примера выбран «летний» ПСЗ, показанный на рисунке 4. Наиболее интересный случай, когда промежуточный слой состоит из илистых осадков. Тогда скорость звука в слое вблизи границы раздела с водным слоем оказывается меньше чем в воде. Такой ПСЗ создает условия для формирования звукового канала, часть которого расположена в промежуточном слое. Толщина промежуточного слоя 25 м (как и в трехслойной модели, на рисунках ограничено до  $z=30$  м).

Рассмотрим вертикальные профили давления  $|p(z)|$  (сплошная),  $|v_z(z)|$  (точечная),  $|v_r(z)|$  (пунктирная) 1-й моды, показанные на рисунке 5. Профили мод нормированы на максимум. Частота 200 Гц, распространяется 8 мод, источник – посередине водного слоя. На этой частоте профиль давления 1-й моды уже начинает «втягиваться» в область минимума ПСЗ, имея максимум на границе раздела водный – промежуточный слой. Профиль  $|v_r(z)|$  (касательная компонента КС) повторяет профиль давления, однако на границе раздела двух сред с различными плотностями имеет разрыв. Профиль  $|v_z(z)|$  неразрывен, максимум нормальной компоненты КС на данной частоте примерно на середине водного слоя.

Рассмотрим расположение особых точек и эпюры линий тока вектора интенсивности, показанные на рисунке 5. Яркостная картина пропорциональна величине (сумме квадратов двух компонент) вектора интенсивности. Вблизи источника особых точек не возникает, значительную «подсветку» создают поля высших мод. Следует отметить, что вблизи источника ощутимое влияние на суммарное поле будет оказывать компонента поля со сплошным спектром горизонтально-волновых чисел, эта компонента в методе нормальных волн не учитывается. На некотором расстоянии от источника формируется плотная группа из трех «срединных» вихрей, возникновение которых обусловлено взаимодействием мод с незначительно различающейся разностью волновых чисел.

По сравнению с ситуацией на рисунке 3 можно говорить о «разделении» срединного вихря. Ближайшая к поверхности система вихрей возникает за счет взаимодействия высших мод. Эта система, как и «срединные» вихри, вследствие «высвечивания» высших мод из волновода с ростом дистанции исчезает. Последний, видимый на рисунке 5, вихрь возникает на счет взаимодействия 1-й и 2-й моды. С

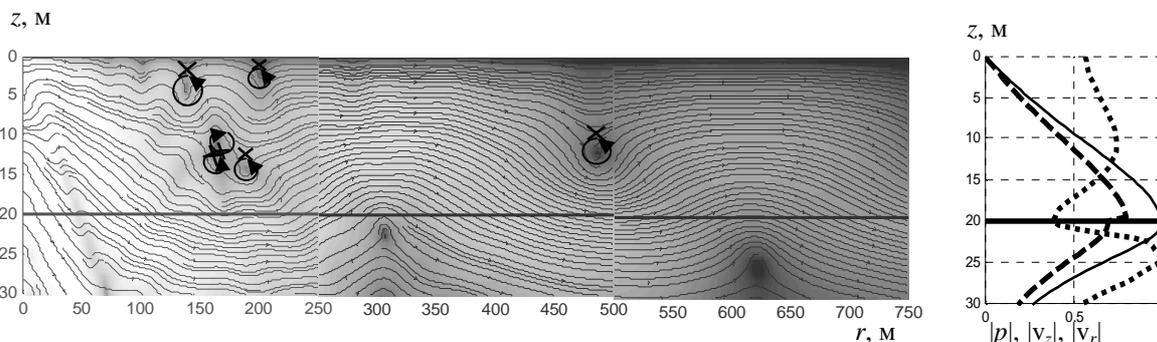


Рисунок 5 – Линии тока энергии, особые точки поля интенсивности и вертикальные профили давления и компонент колебательной скорости 1-й моды

ростом дистанции высшие моды быстро «высвечиваются», вихри исчезают, структура линий тока энергии постепенно упрощается и сводится к генеральному направлению тока вдоль волновода и вниз, через слой в полупространство.

**Выводы.** Структура линий тока вектора интенсивности в многомодовых волноводах сложна и сильно зависит от частоты и профиля скорости звука. При распространении только двух мод пространственное расположение вихрей вполне упорядочено. В случае многомодового характера распространения «засветка» волновода полем со сплошным спектром препятствует образованию вихрей на малых расстояниях от источника. С ростом дистанции до источника вихри вырождаются, и направление тока энергии все более упорядочивается.

#### **Библиографический список использованной литературы**

1. Щуров В.А. Векторная акустика океана / В.А. Щуров. — Владивосток: Дальнаука, 2003. — 307 с.
2. Щуров В.А. Вихри акустической интенсивности в мелком море / В.А. Щуров, В.П. Кулешов, Е.С. Ткаченко // Электронный журнал «Техническая акустика». — Режим доступа: <http://ejta.org>, 2010, 12.
3. Щуров В.А. Вихревой перенос акустической энергии в мелком море / В.А. Щуров, В.П. Кулешов, Е.С. Ткаченко, А.В. Черкасов // Сб. трудов XIII школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XXIII сессией РАО. — М.: ГЕОС, 2011. — С. 94–97.
4. Векторно-фазовые методы в акустической томографии океана / В.А. Акуличев [и др.] // ДАН. — 2006. — Т. 406, № 2. — С. 61–64.
5. Буренин А.В. Экспериментальные исследования особенностей применения векторных приемников в задачах томографии океана / А.В. Буренин, Ю.Н. Моргунов, Д.С. Стробыкин // Акуст. журн. — 2007. — Т. 53, № 6. — С. 786–791.
6. Computational Ocean Acoustics/ F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, H. Schmidt. — N-Y.: AIP Press, 1994. — 578 p.
7. Godin O.A. Wave refraction at an interface: Snell's law vs. Chapman's law / O.A. Godin // J. Acoust. Soc. Am. — 2009. — V. 125. — P. EL117 – EL122 (2009).
8. Chien C.F. Singular points of intensity in two-dimensional sound fields / C.F. Chien, R.V. Waterhouse // J. Acoust. Soc. Am. — 1997. — V. 101, N 2. — P. 705–712.

*Поступила в редакцию 16.01.2014 г.*

#### **Ластовенко О.Р., Маленко Ж.В., Рыбакова К.О., Ярошенко О.О. Просторова структура і сингулярні точки векторного поля потоку потужності в хвилеводі мілкого моря**

Розглядається просторова структура векторних полів в хвилеводі мілкого моря у випадку одномодового і багатомодового характеру поширення звуку. З'ясовується розташування, тип особливих точок векторного поля і просторовий розмір областей, охоплених вихорями.

**Ключові слова:** поле потоку потужності, коливальна швидкість, сингулярні точки.

#### **Lastovenko O.R., Malenko Zh.V., Ribakova K.A., Yaroshenko A.A. Spatial structure and singular points of vector field of power stream is in waveguide of the shallow sea**

The spatial structure of the vector fields is observed in the waveguide of the shallow sea in cases of single-modal and multimodal sound propagation character. A location, type of the singular points of the vector field and spatial size of areas, overcame by vortices are determined.

**Keywords:** field of power stream, particle velocity, singular points.