2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.8, 330.47

МИНИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ШТРАФОВ ЗА ВЫХОД В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ

Козин И.В., д.ф.-м.н., професор

Запорожский национальный университет

В статье рассматривается проблема определения штрафов за выход из кооперативного объединения. В основу построения системы штрафов положен принцип наличия ядра в соответствующей кооперативной игре распределения затрат. При наличии ядра распределение затрат выбирается из ядра игры и штрафы отсутствуют. При отсутствии ядра предлагается установить такую систему штрафов для индивидуальных участников объединения, которая в совокупности с существующими кооперативными затратами приводила бы к появлению непустого ядра кооперативной игры

Ключевые слова: распределение затрат, кооперативная игра, ядро игры, коалиции игроков, задача распределения затрат.

Козін І.В. МІНІМАЛЬНА СИСТЕМА ШТРАФІВ ЗА ВИХІД У ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ / Запорізький національний університет, Україна

У статті розглядається проблема визначення штрафів за вихід з кооперативного об'єднання. В основу побудови системи штрафів покладено принцип наявності ядра у відповідній кооперативній грі розподілу витрат. За наявності ядра розподіл витрат вибирається з ядра гри і штрафи відсутні. За відсутності ядра пропонується встановити таку систему штрафів для індивідуальних учасників об'єднання, яка в сукупності з існуючими кооперативними витратами призводила б до появи непорожнього ядра кооперативної гри.

Ключові слова: розподіл витрат , кооперативна гра , ядро гри , коаліції гравців , завдання розподілу витрат.

Kozin I.V. MINIMUM SYSTEM OF FINES FOR ESCAPE IN THE PROBLEM OF COST ALLOCATION / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The problem of determining the penalties for withdrawal from the co-operative association. The basis of the construction of the system of penalties on the principle of the nucleus in the presence of an appropriate cooperative cost allocation game. In the presence of the kernel distribution of costs is selected from the core of the game and there are no penalties. In the absence of the nucleus is proposed to establish a system of fines for individual union members, which together with the existing co-operative expenses would lead to the emergence of a non-empty core of a cooperative game.

Key words: cost sharing, cooperative game, the core of the game, the player's coalition, the problem of cost allocation.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Одной из важных проблем современной экономики и политологии является проблема устойчивости экономических объединений. При отсутствии механизмов, гарантирующих устойчивость коалиции экономических агентов, возникают силы, которые приводят либо к полному развалу коалиции, либо к выходу из нее отдельных участников. На практике подобные задачи можно встретить довольно часто. Представим, что необходимо газифицировать несколько близлежащих сел. Как распределить затраты на совместное строительство между общинами при условии реализации совместного проекта? Как определить, когда франчайзинговая структура в силу своих объективных свойств будет выгодной или невыгодной для франчайзера и (или) франчайзи?

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Математические модели кооперативной деятельности составляют задачу теории кооперативных игр. В моделях кооперативных игр вначале предполагается, что игроки объединяются в одну коалицию с целью максимизации индивидуальных выигрышей в том или ином смысле [1]. Основой объединения служит одно из «канонических» условий оптимальности – либо условие векторной оптимизации (принцип Парето), либо условие максимизации суммарного выигрыша коалиции (утилитаризм) [2-8].

В терминах кооперативных игр эти условия приводят к некоторым оптимизационным свойствам моделей коалиций, например, принцип непустоты С-ядра, вектор Шепли, NM-решение, вектор Банцафа и другие. Указанные свойства моделей являются «нормативными». Однако в практических задачах часто возникают случаи, когда объединение участников невозможно с точки зрения нормативных принципов. Задача состоит в таком изменении кооперативной игры, при котором коалиция участников становилась бы устойчивой по одному или нескольким из названных принципов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕЙ СТАТЬИ

Рассмотрим кооперативную игру дележа затрат, в которой игрокам (экономическим агентам) разрешается создавать любые коалиции. Обозначим через N множество всех игроков, $N=\{1,2,...,n\}$, а через K – произвольное его непустое подмножество. Пусть игроки из подмножества K договариваются между собой о совместных действиях и, следовательно, образуют единую коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, которые содержат r игроков, равно числу сочетаний из n по r, то есть C_n^r, а число всех таких коалиций есть

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1 \tag{1}$$

Из формулы (1) видно, что число коалиций значительно растет в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования таких игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудность задачи возрастает с ростом числа n. Создав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и затраты этой коалиции зависит от выбора стратегий каждым из n игроков.

Функция v, которая ставит в соответствие каждой коалиции K ее затраты $v(K)$, называется *характеристической функцией игры*. Так, например, для бескоалиционной игры n игроков $v(K)$ рассматривается как сумма затрат игроков из множества K, когда эти игроки оптимально действуют как один игрок против оставшихся n-k игроков, которые образуют противоположную коалицию.

Обозначим через x_i затраты i-го игрока при условии объединения всех игроков в одну коалицию. Распределение затрат игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям:

во-первых, должно выполняться условие и*ндивидуальной рациональности*

$$x_i \le v(\{i\}), \quad i \in N, \tag{2}$$

то есть любой игрок несет затраты в рамках коалиции не более, чем он понес бы затрат, не принимая участия в объединении, а действуя индивидуально. Заметим, что $v(\{i\}),\ \ i \in N$ – затраты игрока с номером i при условии, что он действует автономно, то есть вне коалиций;

во-вторых, должно выполняться условие *коллективной рациональности*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \tag{3}$$

то есть сумма затрат игроков равняется затратам коалиции (если сумма затрат всех игроков больше, чем $v(N)$, то игрокам нет смысла вступать в коалицию; если же сумма затрат меньше, чем $v(N)$, то это означает, что игроки должны делить затраты меньшие чем они понесли).

Вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n),\ \ x_i \ge 0,\ \ i=1,2,...,n$, который удовлетворяет условиям индивидуальной и коллективной рациональности (2)-(3), называется распределением затрат, соответствующих характеристической функции v. Тройка, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством всех распределений, которые удовлетворяют условиям (2) и (3), называется классической кооперативной игрой дележа затрат [2, 7, 8].

Целью настоящей статьи является установить, при каких условиях коалиция, состоящая из всех экономических агентов, является устойчивой, то есть агентам не выгодно выходить из коалиции, так как это приводит к увеличению их индивидуальных затрат.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА ИССЛЕДОВАНИЯ

Естественно считать, что необходимым условием устойчивости коалиции всех игроков является условие:

$$v(K) \ge \sum_{i \in K} x_i \tag{4}$$

для всех непустых собственных подмножеств $K \subset N$, $K \neq \varnothing$ и $|K| \lhd |N|$, где N – множество игроков; x_i, $i \in N$ – затраты *i-го* игрока в составе объединения.

Действительно, условие (4) означает, что суммарные затраты любой коалиции игроков превысят сумму затрат этих же игроков в рамках максимальной коалиции. И таким образом, при распределении затрат по крайней мере один из игроков вынужден будет понести затраты большие, чем он понес бы в составе общего объединения всех игроков. Это делает неразумным (при строгом неравенстве) или по крайней мере бессмысленным (при равенстве затрат) создание и отделение коалиций. Разумеется, предполагается, что единственным критерием для каждого конкретного игрока является величина его собственных индивидуальных затрат. Таким образом, естественным условием устойчивости объединения является наличие такого распределения затрат между участниками, при котором выполняются неравенства (4).

Рассмотрим (4) как систему неравенств относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Множество всех значений переменных, при которых имеют место соотношения (2)-(3) и выполняются неравенства (4) называется ядром кооперативной игры распределения затрат.

Если ядро кооперативной игры пусто, то у некоторой коалиции, состоящей из одного или нескольких игроков, может возникнуть интерес выйти из объединения, сократив тем самым свои суммарные затраты. Такое развитие событий можно предупредить, если в условие объединения игроков ввести систему штрафных санкций за выход из объединения. Задача состоит в том, чтобы найти минимально возможную систему штрафов, необходимую для того, чтобы нивелировать интерес коалиций к выходу из объединения. Другими словами, такая система штрафов искусственно создает непустое ядро кооперативной игры.

Прежде всего, будем предполагать, что штрафы для игроков являются индивидуальными, а не коалиционными. То есть каждому игроку, входящему в объединение, сообщается его индивидуальный штраф за выход из объединения. Причем этот штраф не зависит от того, каким образом игрок покидает объединение: один или в составе некоторой коалиции. Штраф, накладываемый на любую коалицию при выходе, будет предполагаться аддитивным, то есть он равен сумме штрафов для игроков, составляющих эту коалицию. Кроме того, будем предполагать, что любой штраф является неотрицательным. То есть игрок не получает «премии за выход».

Таким образом, любая система штрафов может быть задана неотрицательным вектором $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, $s_i \geq 0$ $\forall i = 1, 2, ..., n$. При этом штраф на коалицию $K \subset N, K \neq \varnothing$ будет равен величине

$$s(K) = \sum_{i \in K} s_i .$$

Допустимой будем называть такую систему штрафов $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, для которой имеет решение следующая система уравнений и неравенств

$$\begin{aligned} &\forall K \subset N, K \neq \varnothing, K \neq N \quad \sum_{i \in K} x_i \leq v(K) + \sum_{i \in K} s_i \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \\ &x_i \geq 0, s_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n \end{aligned} \qquad (5)$$

Решение $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы неравенств и уравнений (5) определяет допустимое распределение затрат при заданной системе штрафов.

Очевидно, что для того, чтобы дележ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежал ядру кооперативной игры, необходимо и достаточно, чтобы тривиальная система штрафов $s = (0, 0, ..., 0)$ была допустимой.

Определим теперь оптимальную систему штрафов, как решение следующей задачи линейного программирования при заданном распределении затрат $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{aligned} &F(s) = s_1 + s_2 + ... + s_n \to \min \\ &v(K) \geq \sum_{i \in K} (x_i - s_i), \quad \forall K \subset N, K \neq \varnothing, K \neq N \\ &s_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь переменными являются величины $s_i, \quad i=1,2,...,n$.

Имеет место следующая

Теорема. Для любого фиксированного распределения $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ существует оптимальная система штрафов, s^*, которая является оптимальным решением задачи (6) при фиксированных $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Доказательство. Обозначим множество допустимых систем штрафов через S. Очевидно, что множество непустое. Например, легко убедиться в том, что система штрафов $s^{\sim}$, в которой все штрафы $s_i^{\sim}$ одинаковы и равны величине $\max\limits_{K\subset N, K\neq\emptyset}\frac{1}{|K|}\sum\limits_{i\in K}x_i$, является допустимой. Рассмотрим множество $S'=\{s=(s_1,s_2,...,s_n): s\in S, \quad 0\le s_i\le s_i^{\sim}, \ i=1,2,...,n\}$. Это множество ограничено и замкнуто в R^n и, следовательно, функция $F(s)=s_1+s_2+...+s_n$ достигает своего минимума на множестве S'. Так как $\forall s=(s_1,s_2,...,s_n)\in S'$ и $p=(p_1,p_2,...,p_n)\in S\setminus S'$ справедливы неравенства $s_i\le p_i, i=1,2,...,n$, то $\forall s\in S', p\in S\setminus S' \quad F(s)\le F(p)$. Таким образом, точка минимума на множестве S' будет оптимальным решением задачи линейного программирования (6).

При заданной допустимой системе штрафов s будем называть s-ядром кооперативной игры множество всех распределений, удовлетворяющих принципам индивидуальной и коллективной рациональности, для которых имеют место соотношения (5).

Сформулируем теперь задачу об оптимальном распределении затрат в кооперативной игре следующим образом:

$$\begin{aligned}
&F(s)=s_1+s_2+....+s_n\to\min\\
&v(K)\ge\sum_{i\in K}(x_i-s_i), \quad \forall K\subset N, K\neq\emptyset, K\neq N\\
&\sum_{i\in N}x_i=v(N)\\
&x_i\ge 0, s_i\ge 0, \quad i=1,2,...,n
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь переменными являются величины $x_i, s_i, \quad i=1,2,...,n$.

Оптимальным решением задачи (7) будет пара векторов (x^*, s^*). Причем, если ядро кооперативной игры непустое, то вектор x^* обязательно принадлежит ядру и $s^*=0$. Для пустого ядра оптимальное решение определяет распределение затрат из s^* – ядра для участников игры и допустимую систему штрафов, которая делает коалицию всех игроков с характеристической функцией $v(S)$ устойчивой.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Результатом исследования является предложенный новый принцип распределения затрат в объединении экономических агентов. Предложенный принцип предполагает, что при заданном правиле распределения затрат, для каждого агента назначаются индивидуальные минимально возможные штрафы за выход из коалиции. Предложенный принцип применим независимо от того, существует ли непустое ядро кооперативной игры или нет. При непустом ядре данный принцип приводит к распределению затрат из ядра кооперативной игры, а при отсутствии ядра дает минимальную по сумме систему индивидуальных штрафов за выход из объединения для агентов, участвующих в объединении.

Применение такого подхода в практике формирования всякого рода экономических и политических объединений картельного типа на этапе подписания объединительных документов позволит сохранять устойчивость объединений и блокировать выход из него отдельных агентов и небольших коалиций.

Одним из направлений перспективного развития тематики, затронутой в статье, является исследование различных селекторов ядра и решение вопроса о применении того или иного селектора независимо от того, входит или не входит этот селектор в ядро кооперативной игры.

Результаты работы тесно связаны с теорией адаптивного управления и могут быть применены при поиске оптимальных принципов управления в условиях отсутствия директивного подхода на основе данных, накопленных в прошлых периодах управления (то есть на основе накопления опыта).

ЛИТЕРАТУРА

1. Печерский С. Л. Кооперативные игры: решения и аксиомы / С. Л. Печерский, Е. Б. Яновская. — СПб. : Изд-во Европейского ун-та в С.-Петербурге, 2004. — 459 с.
2. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели / Э. Мулен ; пер. с англ. — М. : Мир, 1991. — 464 с.
3. Харшаньи Д. Общая теория выбора равновесия в играх / Д. Харшаньи, Р. Зельтен. — СПб. : Економ. шк., 2001. — 217 с.
4. Abalo K. Y. Some existence theorems of Nash and Berge equilibria / K. Y. Abalo, M. M. Kostreva // Appl. Math. Letters. — 2004. — № 17. — Pp. 569—573.
5. Nessah R. A note on Berge equilibrium / R. Nessah, M. Larbani, T. Tazdait // Appl. Math. Letters. — 2007. — № 20. — Pp. 926—932.
6. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен ; пер. с франц. — М. : Мир, 1985. — 200 с.
7. Петросян Л. А. Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость / Л. А. Петросян, Л. В. Кузютин. — СПб. : СпбГУ, 2000. — 292 с.
8. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. — М. : Наука, 1985. — 272 с.

УДК 331.5.024.5 : [330.46 : 519.866]

ОБҐРУНТУВАННЯ СТРАТЕГІЇ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПОВНОЇ ЕФЕКТИВНОЇ ЗАЙНЯТОСТІ В РЕҐІОНІ НА БАЗІ КОГНІТИВНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Макаренко О.І., к.е.н., доцент

Запорізький національний університет

У роботі побудовано когнітивну модель оцінки впливу механізмів регулювання зайнятості на рівень безробіття в реґіоні. Застосування методу когнітивного моделювання дозволило вирішити два типи завдань: перший – визначити як окремі механізми регулювання зайнятості впливають на рівень безробіття, другий – що необхідно зробити для зниження рівня безробіття на бажану кількість одиниць.

Ключові слова: зайнятість, імпульс, когнітивне моделювання, механізм регулювання зайнятості, рівень безробіття, стратегія, фактор.

Макаренко Е.И. ОБОСНОВАНИЕ СТРАТЕГИИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПОЛНОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ ЗАНЯТОСТИ В РЕГИОНЕ НА БАЗЕ КОГНИТИВНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ / Запорожский национальный университет, Украина

В работе построена когнитивная модель оценки влияния механизмов регулирования занятости на уровень безработицы в регионе. Применение метода когнитивного моделирования позволило решить два типа задач: первый – определить как отдельные механизмы регулирования занятости влияют на уровень безработицы, второй – что необходимо сделать для снижения уровня безработицы на желаемое количество единиц.

Ключевые слова: занятость, импульс, когнитивное моделирование, механизм регулирования занятости, уровень безработицы, стратегия, фактор.

Makarenko O. GROUND OF STRATEGY OF PROVIDING OF FULL EFFECTIVE EMPLOYMENT IN REGION ON BASE OF COGNITIVE MODELLING / Zaporizhzhya National University, Ukraine

The article is devoted the ground of strategy of providing of full effective employment in a region on the base of cognitive modelling. The cognitive model of estimation of influence of mechanisms of adjusting of employment is in-process built on an unemployment rate in a region. Application of method of cognitive modelling allowed deciding two types of tasks: first – as separate mechanisms of adjusting of employment influence on unemployment rate, second, – that it is necessary to do for the decline of unemployment rate on the desired amount of units.

Key words: employment, impulse, modelling of cognitive, mechanism of adjusting of employment, unemployment rate, strategy, factor.