УДК 577.4 : 517.9

О ШИРОКОМ ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛИ ЛЕСЛИ К ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Балакирева А. Г., к. ф.-м. н., Мелащенко О. П., аспирант

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Работа посвящена исследованию области применения модели Лесли к прогнозированию изменения состояния динамических систем. Рассматривались однородная и неоднородная модель Лесли, области ее применения. Проводился численный эксперимент, связанный с моделированием общей численности популяции с помощью рассматриваемых моделей.

Ключевые слова: однородная модель Лесли, неоднородная модель Лесли, коэффициенты выживания, коэффициенты плодородия, матрица Лесли.

Балакірєва О. Г., Мелащенко О. П. ПРО ШИРОКЕ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ ЛЕСЛІ ДО ВИВЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Робота присвячена дослідженню області застосування моделі Леслі до прогнозування зміни стану динамічних систем. Розглядалися однорідна і неоднорідна модель Леслі, області її застосування. Проводився чисельний експеримент, пов'язаний з моделюванням загальної чисельності популяції за допомогою розглянутих моделей.

Ключові слова: однорідна модель Леслі, неоднорідна модель Леслі, коефіцієнти виживання, коефіцієнти родючості, матриця Леслі.

Balakireva O. G., Melashchenko O. P. ON THE WIDESPREAD USE LESLIE MODELS FOR THE STUDY OF DYNAMIC SYSTEMS / Harkivskyy natsyonalnyy University of Radio Electronics, Ukraine

This paper investigates the application Leslie model to forecasting changes in the state of dynamical systems. The homogeneous and heterogeneous Leslie model and fields of its application were examined. There was a numerical experiment for modelling of total total number of snai'sl population using these models.

Key words: homogeneous model Leslie, Leslie heterogeneous model, survival rates, fertility rates, the matrix Leslie.

ВВЕДЕНИЕ

Биологические сообщества состоят из нескольких биологических видов, живущих в общей среде. Обычно особи этих сообществ оспаривают одну и ту же пищу или одни виды живут за счет других. Таким образом, под влиянием изменения компонента «окружающая среда» общая численность популяции имеет тенденцию к изменению [1].

В жизненном цикле любого организма можно выделить несколько стадий развития (у насекомых) или несколько возрастных стадий (млекопитающее), определяемых в некоторых единицах времени. Тогда, естественно, популяция разбивается на несколько n возрастных групп. Способ разбиения популяции на возрастные группы, как правило, определяется биологическими особенностями организмов, а также спецификой рассматриваемой задачи. Простейшие постулаты относительно взаимозависимости численностей возрастных групп приводят к так называемой однородной модели Лесли, где биологические параметры популяции не изменяются с течением времени [2].

Однако, на практике, данные параметры могут изменяться под влиянием климатических условий, ограниченности ресурсов питания и других факторов окружающей среды, что приводит к рассмотрению неоднородной модели Лесли.

ОДНОРОДНАЯ И НЕОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ ЛЕСЛИ

Рассмотрим классическую постановку задачи. Пусть ресурсы питания не ограничены. Размножение происходит в определенные моменты времени: $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Пусть популяция содержит n возрастных групп. Тогда в каждый фиксированный момент времени популяцию можно охарактеризовать вектор – столбцом

$$X(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)]^T, \tag{1}$$

где $x_i(t_j)$ – количество особей в i -ой возрастной группе.

Предположим, что биологические параметры популяции не изменяются с течением времени. Тогда прогнозировать изменения состояния популяции целесообразно с помощью однородной модели Лесли.

Однородная модель Лесли имеет следующий вид:

$$X(t_k) = LX(t_{k-1}) = L^k X(t_0), \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где $L=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & & \beta_{n-1} & 0\end{pmatrix}$ – матрица Лесли, α_i $\left(\alpha_i \geq 0, i=1, 2,\dots,n\right)$ – возрастные коэффициенты рождаемости, β_i $\left(0<\beta_i \geq 1,\ i=1, 2,\dots,n\right)$ – коэффициенты выживания.

В данной модели управляющая матрица L остается неизменной с течением времени, что мало соответствует действительности, т.к., например, не учитываются сезонные изменения в динамике популяции. Предположим, что коэффициенты выживаемости и рождаемости изменяются на каждом шаге, что соответствует изменению матрицы L. Тогда однородная модель Лесли модифицируется на неоднородный случай.

Неоднородная модель Лесли для прогнозирования развития популяции с течением времени имеет вид:

$$X(t_n)=L_{0,n}X(t_0),\quad L_{0,n}=L_1\cdot L_2\cdot\ldots\cdot L_n,\quad n=1,2,..,\tag{3}$$

где L_i – матрица Лесли на i -ом шаге ($i=\overline{1,n}$), а $L_{0,n}$ – произведение матриц Лесли [3].

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ ЛЕСЛИ

Однородная матричная модель Лесли П. широко используется для построения математических моделей самых различных популяций с учетом их структуры по возрастам, размерам или стадиям жизненного цикла [4]. Изучением свойств такой модели и ее усовершенствованием (модернизацией) занимались Ю. Свирежев, Д. Логофет, P. Hansen, L. Lefkovitch, Д. Эдиев, И. Белова, H. Caswell, А. Балакирева.

Являясь самостоятельным разделом теоретической популяционной биологии, данная модель имеет достаточно широкий спектр применения.

С помощью матричной модели Лесли был произведен анализ численности популяции исчезающих видов орхидей Cypripedium lentiginosum [5]. Наблюдение велось за 20 образцами в естественной среде обитания, расположенными на участке размером 5м на 5м. Рассматриваемая популяция была разбита на 3 основные возрастные группы: предрепродуктивную (1-5 возрастной класс), репродуктивную (6-15 возрастной класс), пострепродуктивную (16-20 возрастной класс). В процессе наблюдения фиксировалась численность популяции каждого возрастного класса. Коэффициенты плодородия интерпретировались как количество семян в зрелых коробочках, которые были собраны перед лопанием. На основании этих данных была определена естественная норма семенного прорастания. Высокие коэффициенты плодородия и выживаемости показывают, что большое количество молодых растений достигает репродуктивного возраста и генерируют достаточное количество потомком, что обеспечивает увеличение численности популяции. На основании матрицы Лесли спрогнозирована численность популяции на двадцатилетний период.

Л. Литвиненко в [6] рассмотрел популяцию артемий, существующую без хищников и пищевых конкурентов. На основе данных о численности разных возрастных стадий артемий (ювенальная, предзврослая, взрослая) была построена матрица Лесли для пяти возрастных групп. Для оценки чистой скорости воспроизводства используют показатель живорожденных потомков (науплиусов, яиц), приходящихся на одну родительскую особь. Коэффициенты плодородия определяли, подсчитывая количество науплиусов, эмбрионов или яиц, находящихся в яйцевой сумке половозрелых самок. Автором обнаружена отрицательная связь между численностью науплиусов и выживаемостью: чем больше науплиусов выклюнулось, тем меньше у них вероятность дожить до половозрелой стадии. Был сделан вывод о достаточной объективности полученных результатов путем сравнения расчетных и средне-популяционных данных.

Также с помощью модели Лесли описывалась динамика популяции амурского тигра [7]. Данные взяты за период с 1959 г. по 2005 г. Учитывая особенности популяции вида, популяция была разбита на две возрастные группы: предрепродуктивную (1-2 возрастной класс) и репродуктивную (3-15 возрастной класс). Коэффициенты α и β интерпретируются в данной популяции классическим образом. За единицу времени выбран год. Поскольку собственное число матрицы $\lambda=1{,}0387$ больше единицы, то общая численность популяции возрастает. Результаты, полученные с помощью построенной модели, хорошо согласуются с реальными данными на период 1959-1996 гг.

В работе [8] рассматривалось применение модели Лесли к исследованию связей и их хрупкости в социальных сетях. Рассматривается человеческая сеть, состоящая из n человек. Каждый человек называется элементом или узлом. Связи между людьми в социальной сети описываются матрицей смежности, элементы которой равны 1 или 0. Элемент (i, j) равен 1, если человек i испытывает симпатию к человеку j, и 0 – если человек i не испытывает симпатию к человеку j. Диагональные элементы (коэффициенты выживания) матрицы принимают равными 1 (т.е. каждый человек любит сам себя), что отличает рассматриваемую матрицу от матрицы Лесли, в которой диагональные элементы могут быть равны нулю. Вводится предположение, что если i дружит с j, j – с k, то со временем между i и k также возникнет дружба.

В. Кузнецов [9] рассматривал приложение модели Лесли к модели развития двувидового леса (базовая модель описывает лесной массив без учета возраста). Рассматривались три возрастные группы: предрепродуктивная (молодой лес), репродуктивная, пострепродуктивная (лес перестойный). Возраст отдельного дерева определяется с помощью годичных колец. Коэффициенты плодородия определяются как приток биомассы из младшей возрастной группы и сток в старшую группу (за счёт взросления деревьев). В результате исследования показано, что модель с учётом возраста на основе матриц Лесли реалистична.

Фельдстейн и Ротшильд (1974) рассматривали экономическую интерпретацию модели Лесли. Вектор $x_i(t_j)$ представляет собой количество капитала каждого «класса» $i = 1, 2, \ldots, n$ за прошедшие n лет. Коэффициент α («коэффициент расширения») показывает отношение восстановительных инвестиций в год (за $n+1$ год) к основному капиталу (за n-ый год), β – износ, т.е. увеличение расхода материалов на единицу продукции, связанное со старением оборудования. При этом рассматриваются две формы износа: снижение эффективности выпуска, когда оборудование из-за старения может производить все меньше и меньше продукции, и снижение эффективности использования материалов, когда оборудование способно производить то же количество продукции, но для этого оно потребляет большее количество материалов [10].

Таким образом, с помощью модели Лесли возможно осуществлять прогноз изменения состояния не только популяционных, но и других динамических систем.

СРАВНЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕСЛИ

Для моделирования численности популяции необходимо вычислить параметры данной популяции: коэффициенты плодородия и выживаемости, используя данные из так называемой демографической таблицы. В таких таблицах содержатся фиксированные значения наблюдений различных параметров популяции за определенный период или в фиксированные моменты времени.

Рассмотрим популяцию виноградной улитки (Helix pomatia). Изучение возрастной структуры проводилось на отдельной, изолированной природной популяции данного вида, обитающей в центральной части Калининградской обл. (в окр. г. Гвардейского).

Отличительной особенностью данной популяции является то, что исследуемая часть популяции обитает на охраняемой территории (доступ людей туда ограничен, эксплуатация невозможна). Отбор материала проводился в конце августа 2000-2002 гг., так как к этому времени появление молоди виноградной улитки уже заканчивается и учету, таким образом, подвергаются все животные, появившиеся в год выполнения исследования.

Определение возраста пойманных животных велось по годичным полосам нарастания на раковине моллюсков. Исследовалось одномоментное (мгновенное) возрастное распределение особей в популяции – численность животных, принадлежащих к каждому возрастному классу в определенный момент времени. Демографическая таблица данных для данной популяции приведена для трёх лет [11].

Таблица 1

Возрастной класс	1991	1992	1993
0	165	149	136
1	102	96	89
2	88	81	78
3	79	74	72
4	63	60	58
5	52	45	47
6	38	39	32
Всего	587	544	512

На основании данных, взятых из таблицы 1, были вычислены коэффициенты выживая, представленные в таблице 2, по формуле $\beta_j(k) = x_j(k+1)/x_{j-1}(k)$. Коэффициенты выживания по данным из таблицы 1:

Таблица 2

Коэффициенты выживания	2000-2001	2001-2002	Среднее
β_1	0,58	0,6	0,59
β_2	0,79	0,81	0,803
β_3	0,84	0,89	0,865
β_4	0,76	0,78	0,772
β_5	0,71	0,78	0,749
β_6	0,75	0,71	0,731

Для особей первого возрастного класса примем $\alpha_1 = 0$, коэффициенты плодородия для всех остальных классов равны, для их вычисления была использована формула из [12]:

$$\alpha(2001) = \frac{149}{(587-165)} = 0,353 , \quad \alpha(2002) = \frac{136}{(544-149)} = 0,344 .$$

Усредняя значения коэффициентов плодородия, получим, что $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0{,}349$.

Матрица Лесли для однородной модели имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0,349 & 0,349 & 0,349 & 0,349 & 0,349 & 0,349 \\ 0,59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,803 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,865 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,772 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,749 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,731 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для неоднородной модели Лесли матрицы L_1 и L_2 имеют вид:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,32 & 0,35 & 0,35 \\ 0,58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,84 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,34 & 0,34 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,71 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прогноз возрастной структуры популяции произведен по схеме (3) для однородной модели Лесли и по схеме (4) для неоднородной модели Лесли. Начальное распределение:

$$X = [165 \quad 102 \quad 88 \quad 79 \quad 63 \quad 52 \quad 38]^T .$$

Для однородной модели стабилизация происходит на 9 шаге. После этого момента мы можем прогнозировать состояния популяции следующим образом:

$$X(k) = \mu^k X(0) , \tag{4}$$

где μ – главное собственное число матрицы Лесли, которое показывает, что численность популяции убывает (для однородной модели $\mu = 0{,}935$). Для неоднородной Лесли свойство слабой эргодичности, т.е. стабилизации распределения долей особей каждого возрастного класса по отношению к общей численности популяции, выполняется на 7 шаге. Для неоднородной модели Лесли рассматриваемой популяции $\mu_1 = 0{,}922$, $\mu_2 = 0{,}94$. Результаты моделирования изменения общей численности данной популяции с помощью однородной и неоднородной модели представлены на рис. 1.

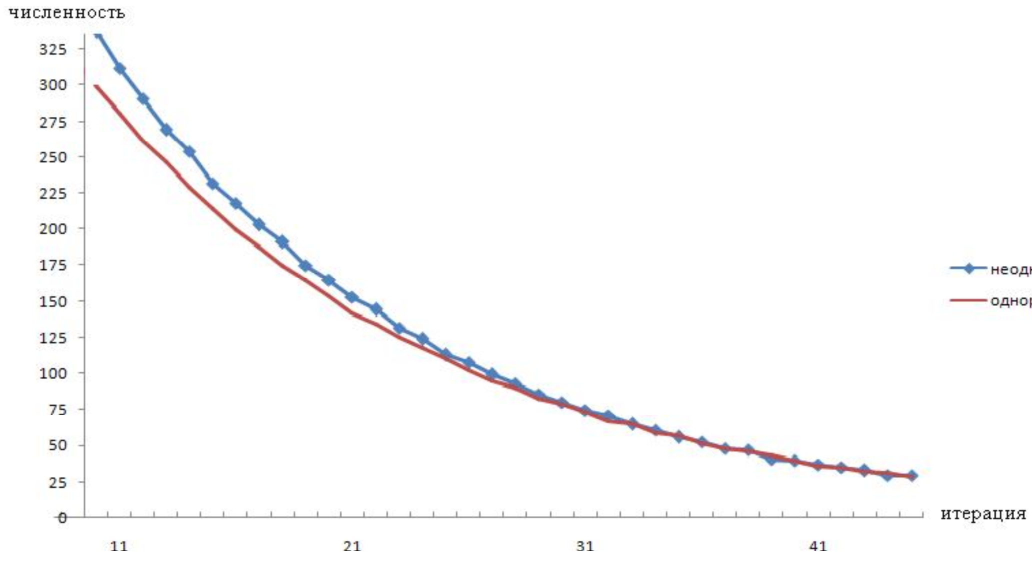

Рис. 1. Прогнозируемые данные численности популяции

После стабилизации в однородной модели Лесли доля особей первого возрастного класса – 27,2%, второго – 17,1%, третьего – 14,7%, четвертого –13,6%, пятого – 11,3%, шестого – 9,0%, седьмого – 7,1%. Для неоднородной модели соответствующие результаты равны 27,6%; 16,3%; 15,1%; 12,8%; 11,9%; 8,3%; 8%, что более адаптировано к реальности.

В данной работе была спрогнозирована численность популяции виноградной улитки (Helix pomatia) с помощью однородной и неоднородной медели Лесли. Из рис.1 видно, что неоднородная модель Лесли более реалистично описывает изменение численности популяции, чем однородная (с учетом реальных данных [11]), а также учитывает колебания общей численности популяции.

ВЫВОДЫ

Несмотря на простоту однородной модели Лесли, круг применения данной модели довольно широк. Введение неоднородности в модель Лесли позволяет расширить область применения данной модели и является целесообразным для учета изменения параметров популяции с течением времени, что достаточно хорошо согласуется с реальными данными для прогнозирования изменения состояния численности популяции динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берешко И. Н. Математические модели в экологии : учеб. пособие. Ч. 1 / И. Н. Берешко, А. В. Бетин. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. институт», 2006. – 68 с.
2. Свирженев Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирженев, Д. О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
3. Балакірєва О. Г. Стабілізація вікового складу популяції в рамках неоднорідної моделі Леслі : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат наук : спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / О. Г. Балакірєва. – Харків, 2012. – 20 с.
4. Ризниченко Г. Ю. Математические модели биологических продукционных процессов : учебное пособие / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 302 с.
5. Zhongjian Liu. Correlation between numerical dynamics and reproductive behavior in Cypripedium lentiginosum [Электронный ресурс] / Liu Zhongjian, Chen Lijun, Rao Wenhui, Li Liqiang, Zhang Yuting // Acta Ecologica Sinica, 2008, 28(1), 111-121. – Режим доступа : www.ecologica.cn/.../ch/.../create_pdf.aspx.
6. Литвиненко Л. И. Жаброногие рачки рода Artemia Leach, 1819 в гипергалинных водоемах Западной Сибири : география, биоразнообразие, экология, биология и практическое использование : автореф. дис.… доктора биологических наук : спец. : 03.00.16 Экология / Л. И. Литвиненко. – Пермь, 2009. – 48 с.

7. Тарасова Е. В. Моделирование динамики популяции амурского тигра с помощью матрицы Лесли / Е. В. Тарасова // Вестник развития науки и образования. – 2012. – №1. – С. 9-25.

8. Fujimoto T. Indecomposability and Primitivity of Nonnegative Matrices [Электронный ресурс] / Takao Fujimoto, Fumiko Ekuni // Política y Cultura, primavera 2004, núm. 21, pp. 163-176. – Режим доступа : http://scielo.unam.mx/pdf/polcul/n21/n21a11.pdf.

9. Кузнецов В. И. Математическая модель эволюции леса : автореф. диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук : спец. 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы, комплексы программ» / В. И. Кузнецов. – М., 2000. – 14 с. Библиогр. : с. 14 (12 назв.).

10. Seneta E. Non-negative Matrices and Markov Chains [Электронный ресурс] / E. Seneta, Second edn., Springer, New York, 1981, 2006 (revised printing). Режим доступа : http://www.leg.ufpr.br/~eder/Markov/Non%20Negative%20Matrices%20and%20Markov%20Chains.pdf.

11. Румянцева Е. Г. Возрастная структура популяции виноградной улитки Helix pomatia L. (Mollusca, Gastropoda) и влияние на нее эксплуатации / Е. Г. Румянцева // Вісник Дніпропетровського університету. Біологія. Екологія. – Дніпропетровськ : Вид-во ДНУ, 2003. – Вип. 11. – Т. 1. – С. 120-124.

12. Zitek A. Introduction to the basic principles of population modelling [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://www.boku.ac.at/hfa/lehre/Multiscale%20modelling%20Vorlesung/VU_AHM3_Population_modelling.pdf.

УДК 535.375.54 : 517.988

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОВНОЇ СМУГИ ПІДСИЛЕННЯ СВІТЛА В ОДНОМОДОВОМУ ВОЛОКНІ TRUEWAVERS™

Дирів М. Я., аспірант, Коротков П. А., д. ф.-м. н., професор, Фелінський Г. С., д. ф.-м. н., асистент

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Запропоновано нову методику моделювання повної смуги підсилення світлового сигналу на основі чисельного інтегрування системи зв'язаних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію потужностей багатохвильового оптичного випромінювання при ВКР взаємодії в одномодовому волокні. Зокрема, визначено набір потужностей накачування для моделювання оптимальної смуги підсилення сигналу в межах частот, що опиняються у діапазоні сумарного вікна прозорості C+L. Для цього використано шість прямих накачок у кварцовому волокні TrueWaveRS™. Показано, що за загальної потужності накачування до 28 дБм повне підсилення інформаційного сигналу з початковою потужністю −10 дБм становить в середньому 5,7 дБ в області довжин хвиль 1520-1620 нм вікна C+L, а нерівномірність підсилення при цьому не перевищує 0,7 дБ. Розроблений алгоритм моделювання дозволяє здійснити розрахунок вхідних потужностей накачування для підсилення будь-якого рівня слабкого сигналу і може бути корисним для аналізу експериментальних смуг підсилення в сучасних надширокосмугових волоконних ВКР підсилювачах.

Ключові слова: вимушене комбінаційне розсіювання, повна смуга підсилення, одномодове оптичне волокно.

Дырив М. Я., Коротков П. А., Фелинский Г. С. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛНОЙ ПОЛОСЫ УСИЛЕНИЯ СВЕТА В ОДНОМОДОВОМ ВОЛОКНЕ TRUEWAVERS™ / Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, Украина

Предложена новая методика моделирования полной полосы усиления светового сигнала на основе численного интегрирования системы связанных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию мощностей многоволнового оптического излучения при ВКР взаимодействии в одномодовом волокне. В частности, определен набор мощностей накачки для моделирования оптимальной полосы усиления сигнала в пределах частот, попадающих в диапазон суммарного окна прозрачности C+L. Для этой цели использовано шесть прямых накачек в кварцевом волокне TrueWaveRS™. Показано, что при общей мощности накачки до 28 дБм полное усиления информационного сигнала с исходной мощностью в −10 дБм составляет в среднем 5,7 дБ в области длин волн 1520-1620 нм окна C+L, при этом неравномерность усиления не превышает 0,7 дБ. Разработанный алгоритм моделирования позволяет осуществить расчет входных мощностей накачки для усиления любого уровня слабого сигнала и может быть полезным для анализа экспериментальных полос усиления в современных сверхширокополосных волоконных ВКР усилителях.

Ключевые слова: вынужденное комбинационное рассеивание, полная полоса усиления, одномодовое оптическое волокно.