точки для прямо-двойственного метода внутренней точки. Как показали численные эксперименты, решение, найденное методом внутренней точки, совпадает с точным решение исходной комбинаторной задачи. Возможна модификация полуопределенного симплекс-метода, позволяющая находить решение задачи полуопределенного программирования в виде матрицы ранга единица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vandenberghe L. Semidefinite programming / L. Vandenberghe, S. Boyd // SIAM Review. — 1996. — Vol. 38. — P. 49-95.
2. Todd M. J. Semidefinite optimization / M. J. Todd //Acta Numerica. — 2001. — № 10. — P. 515-560.
3. Helmberg C. Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization / C. Helmberg. — Berlin, 2000. – – 150 p.
4. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. — Springer, 2006. — 685 p.
5. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. — Днепропетровск : Наука и образование, 2013. — 318 с.
6. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир. — 1989. — 656 с.
7. Fortin C. Computing the local minimizers of a large and sparse trust region subproblem / C. Fortin. — Montreal : McGill University, 2004. — 149 p.
8. Nesterov Y. Interior point polynomial algorithms in convex programming / Y. Nesterov, A. S. Nemirovskii // SIAM Studies in Applied Mathematics. — 1994. — Vol. 13. — SIAM, Philadelphia, USA. — 405 p.
9. Martello S. Knapsack problems: algorithms and computer implementation / S. Martello, P. Toth. — Chichester : John Wiley & SONS, 1090. — 296 p.

УДК 517.982

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЧИСЛОВИМ РАДІУСОМ ТА НАПІВНОРМОЮ МОРЕ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА ПРОСТОРАХ L_p ПРИ $1 < p < \infty$

Красікова І. В., к. ф.-м. н.

Запорізький національний університет

У роботі досліджуються дві числові характеристики лінійних неперервних операторів, заданих на просторах L_p при $1 < p < \infty$ – напівнорма Море та числовий радіус оператора. Поняття числового образу та числового радіуса оператора виникло у 70-х роках минулого століття. Числовий образ лінійного неперервного оператора T, заданого на банаховому просторі X, визначається як $V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, де S_X – одинична сфера простору X. Згідно з теоремою Гана-Банаха, для кожного $x \in S_X$ існує лінійний неперервний функціонал $f \in S_{X^*}$, для якого $f(x) = 1$. Отже, числовий образ лінійного неперервного оператора є непорожньою множиною чисел. Зокрема, існує супремум модуля числового образа $v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_{X^*},\ x \in S_X, f(x) = 1\}$, який називається числовим радіусом оператора T. Числовий радіус лінійного неперервного оператора T задовольняє умову $0 \le v(T) \le \|T\|$. Поняття напівнорми Море було введене у роботі [1]. У цій роботі був описаний новий клас лінійних неперервних операторів на просторах $L_p = L_p([0;1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 < p < \infty$ (тут $\mathcal{B}$ – борелівська σ-алгебра, а λ – міра Лебега) – оператори Море, які можна розглядати як узагальнення компактних операторів на просторах L_p. Цей клас операторів виник при опрацюванні техніки доведення відомої теореми Енфло про примарність простору L_p при $1 \le p < \infty$, яке було запропоноване Б. Море. Для кожного лінійного неперервного оператора T на борелівській σ-алгебрі $\mathcal{B}$ задаються дві функції M_T, m_T, які є мірами множини і називаються верхньою та нижньою мірами Море оператора T, відповідно. Обидві ці міри мають похідні Радона-Нікодима F_T, $f_T \in L_\infty$, які носять назви верхньої та нижньої похідної Море оператора T. Верхня та нижня похідні Море задовольняють нерівність $\|F_T\|_\infty \le \|T\|$, $\|f_T\|_\infty \le \|T\|$. Напівнормою Море $\|T\|_M$ оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при цьому називається найбільша з величин $\|F_T\|_\infty$, $\|f_T\|_\infty$. Напівнорма Море оператора T дійсно є напівнормою на просторі $\mathcal{L}(L_p)$ і при цьому задовольняє нерівність $\|T\|_M \le \|T\|$. У роботі доводиться, що має місце краща оцінка $\|T\|_M \le v(T)$, де $v(T)$ – числовий радіус оператора T.

Ключові слова: лінійний неперервний оператор, простір L_p, верхня і нижня норми Море оператора, верхня і нижня похідні Море оператора, напівнорма Море оператора, числовий радіус оператора.

Красикова И. В. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМ РАДИУСОМ И ПОЛУНОРМОЙ МОРЕ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА ПРОСТРАНСТВАХ L_p ПРИ $1 < p < \infty$ / Запорожский национальный университет, Украина

В статье изучаются две числовые характеристики линейных непрерывных операторов, заданных на пространствах L_p при $1 < p < \infty$ – полунорма Море и числовой радиус оператора. Понятие числового образа и числового радиуса оператора возникло в 70-х годах прошлого века. Числовой образ линейного непрерывного оператора T, заданного на банаховом пространстве X, определяется как $V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*},\ x \in S_X, f(x) = 1\}$, где S_X – единичная сфера пространства X. Согласно теоремы Хана-Банаха, для каждого $x \in S_X$ существует функционал $f \in S_{X^*}$, для которого $f(x) = 1$. Значит, числовой образ линейного непрерывного оператора является непустым множеством чисел. В частности, существует супремум модуля числового образа $v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_{X^*},\ x \in S_X,$ $f(x) = 1\}$, который называется числовым радиусом оператора T. Числовой радиус линейного непрерывного оператора T удовлетворяет условию $0 \le v(T) \le \|T\|$. Понятие полунормы Море было введено в работе [1]. В этой работе был описан новый класс линейных непрерывных операторов на пространствах $L_p = L_p([0;1],\ \mathcal{B},\ \lambda)$ при $1 < p < \infty$ (тут $\mathcal{B}$ – борелевская -алгебра, а λ – мера Лебега) – операторы Море, которые можно рассматривать как обобщение компактных операторов на пространствах L_p. Этот класс операторов возник при изучении техники доказательства известной теоремы Энфло о призрачности пространства L_p при $1 \le p < \infty$, которое было предложено Б. Море. Для каждого линейного непрерывного оператора T на борелевской -алгебре $\mathcal{B}$ задаются две функции $M_T,\ m_T$, которые представляют собой меры множеств и называются верхней и нижней мерами Море оператора T, соответственно. Обе эти меры имеют производные Радона-Никодима $F_T,\ f_T \in L_\infty$, называющиеся верхней и нижней производными Море оператора T. Верхняя и нижняя производные Море удовлетворяют неравенствам $\|F_T\|_\infty \le \|T\|,\ \|f_T\|_\infty \le \|T\|$. Полунормой Море $\|T\|_M$ оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при этом называется наибольшая из величин $\|F_T\|_\infty,\ \|f_T\|_\infty$. Полунорма Море оператора T действительно является полунормой на пространстве $\mathcal{L}(L_p)$ и при этом удовлетворяет неравенству $\|T\|_M \le \|T\|$. В настоящей работе показывается, что имеет место лучшая оценка $\|T\|_M \le v(T)$, где $v(T)$ – числовой радиус оператора T.

Ключевые слова: линейный непрерывный оператор, пространство L_p, верхняя и нижняя нормы Море оператора, верхняя и нижняя производные Море оператора, полунорма Море оператора, числовой радиус оператора.

Krasikova I. V. A RELATION BETWEEN THE NUMERICAL RADIUS AND THE MAUREY SEMINORM OF OPERATORS ON L_p-SPACES FOR $1 < p < \infty$ / Zaporizhzhye National University, Ukraine

In the paper we investigate two numerical characteristics of continuous linear operators acting on L_p-spaces for $1 < p < \infty$ – the Maurey seminorm and the numerical radius of operators. Notions of a numerical image and a numerical radius of operators were introduced in the 70th of the past century. A numerical range of the continuous linear operator T on a Banach space X, is defined as $V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*},\ x \in S_X,\ f(x) = 1\}$, where S_X is the unit sphere of X. According to the Hahn-Banach theorem, for each $x \in S_X$ there is a continuous linear functional $f \in S_{X^*}$, for which $f(x) = 1$. Hence, the numerical image of a continuous linear operator is a non-empty set of numbers. In particular, there is a supremum of the modulus numerical image $v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_{X^*},\ x \in S_X,\ f(x) = 1\}$, which is called the numerical radius of the operator T. The numerical range of a continuous linear operator T satisfies the condition $0 \le v(T) \le \|T\|$. The notion of the Maurey seminorm was introduced in [1]. In this paper we described a new class of continuous linear operators on$L_p = L_p([0;1], \mathcal{B}, \lambda)$ for $1 < p < \infty$ (here $\mathcal{B}$ is the Borel σ-algebra, and λ is the Lebesgue measure) – Maurey operators which can be considered as a generalization of the notion of compact operators on L_p-spaces. Using a techinque of B. Marey which he had proposed for the proof of the famous Enflo theorem on primarity of the space $L_p 1 \le p < \infty$, we introduced this class of operators. For an arbitrary continuous linear operator T on the Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ we defined two functions $M_T,\ m_T$ which are measures of a set. They are called the upper and lower Maurey measures of the operator T, respectively. Both these measures have the Radon-Nikodym derivatives $F_T,\ f_T \in L_\infty$, which are called the upper and lower Maurey derivatives of the operator T. The upper and lower Maurey derivatives satisfy the inequalities $\|F_T\|_\infty \le \|T\|,\ \|f_T\|_\infty \le \|T\|$. Then the greatest of the values $\|F_T\|_\infty,\ \|f_T\|_\infty$ is called the Maurey seminorm $\|T\|_M$ of an operator $T \in \mathcal{L}(L_p)$. It is indeed a seminorm on the space $\mathcal{L}(L_p)$ and it satisfies the inequality $\|T\|_M \le \|T\|$. In this paper we prove that there is a better estimate $\|T\|_M \le v(T)$, where $v(T)$ is the numerical radius of the operator T.

Keywords: continuous linear operator, L_p-space, the upper and lower Maurey measures of the operator, the upper and lower Maurey derivatives of the operator, Maurey's seminorm of the operator, the numerical radius of the operator.

У 70-х роках минулого століття з'явилися поняття числового образу та числового радіуса оператора, які активно вивчаються до сьогодні (огляд сучасних результатів див. у [2]).

Нехай X – банахів простір і $T \in \mathcal{L}(X)$ – лінійний неперервний оператор на X. Згідно з [3], *числовий образ* оператора T визначається так:

$$V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\},$$

де S_X – одинична сфера простору X. Згідно з теоремою Гана-Банаха, для кожного $x \in S_X$ існує функціонал $f \in S_{X^*}$, для якого $f(x) = 1$. Отже, числовий образ лінійного неперервного оператора є непорожньою числовою множиною. Зокрема, існує супремум модуля числового образу

$$v(T) = \sup\{|f(Tx)| : f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\},$$

який називається *числовим радіусом* оператора T.

Очевидно, що числовий радіус оператора задовольняє нерівність $0 \leq v(T) \leq \|T\|$. Крім того, відображення $v: X \to [0; +\infty)$ є напівнормою на X.

Нарешті, *числовий індекс* банахового простору X уводиться таким чином:

$$n(X) = \inf\{v(T): T \in \mathcal{L}(X), \|T\| = 1\}.$$

Наведемо деякі відомості про числовий індекс банахового простору. Зауважимо, що нерівність $n(X) > 0$ означає, що напівнорма $v(\cdot)$ на просторі $\mathcal{L}(X)$ є еквівалентною до операторної норми $\|\cdot\|$. Теорія числового індексу різна для дійсних і комплексних просторів. У дійсному випадку числовий індекс знаходиться на відрізку $[0; 1]$, причому приймає усі значення з цього відрізка. У комплексному випадку відповідний відрізок значень – це $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$, де e – число Ейлера. Числовий індекс деяких класичних банахових просторі обчислено точно. Наприклад, $n(L_1(\mu)) = 1$ для довільної σ-скінченної міри μ. Крім того, $n(\mathrm{C}(K)) = 1$ для довільного компакта K. Якщо H – гільбертів простір, розмірність якого більша за одиницю, тоді $n(H) = 0$ у дійсному випадку і $n(H) = \frac{1}{2}$ у комплексному випадку. Точне значення числового індексу банахового простору $L_p(\mu)$ поки що не знайдене при $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, проте відомо [4], що всі нескінченновимірні простори $L_p(\mu)$ мають один і той самий числовий індекс, який збігається з інфімумом числових індексів скінченновимірних просторів l_p^m за всіма $m \geq 2$ [5]. Нещодавно було доведено [6], що кожний дійсний простір $L_p(\mu)$ має додатний числовий індекс при $p \neq 2$.

Ми досліджуємо числовий радіус лінійних неперервних операторів, заданих на дійсних банахових просторах $L_p = L_p([0; 1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 < p < \infty$. Тут $\mathcal{B}$ – борелівська σ-алгебра, а λ – міра Лебега. Основний результат пов'язує між собою числовий радіус та напівнорму Море таких операторів.

Нагадаємо, що поняття «оператора Море» було уведено в роботі [1] у результаті опрацювання статті Море [7]. Оператори Море узагальнюють поняття компактних операторів на цих просторах і відіграють роль «малих» операторів.

Нехай Z – одинична куля простору L_∞ зі слабкою* топологією $\sigma(L_\infty, L_1)$. Для кожної борелівської множини A на $[0; 1]$ покладемо

$$Z(A) = \left\{ h \in Z: h^2 = \mathbf{1}_A, \int\limits_{[0;1]} h \, d\lambda = 0 \right\},$$

де $\mathbf{1}_A$ – характеристична функція множини $A \subseteq [0; 1]$. Будемо розглядати $Z(A)$ з топологією, індукованою Z.

У роботі [7] для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ послідовно визначаються дві числові характеристики:

$$\widetilde{M}_T(A) = \lim_{Z(A) \ni h \to 0} \sup \int\limits_{[0;1]} hTh \, d\lambda,$$

$$M_T(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_T(A_k) : n \in \mathbb{N}, A = \coprod_{k=1}^{n} A_k \, A_k \in \mathcal{B} \right\}.$$

Визначена таким чином функція множини M_T є зліченно-адитивною мірою на $\mathcal{B}$ та має похідну Радона-Нікодима $F_T \in L_\infty$ з умовою $\|F_T\|_\infty \leq \|T\|$, тобто для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ виконується рівність

$$M_T(A) = \int\limits_A F_T \, d\lambda.$$

Лема 1. [7] Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$, кожної множини $A \in \mathcal{B}$ та кожного околу нуля U в Z існує така функція $h \in Z(A) \cap U$, що

$$\left| M_T(A) - \int_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Визначену вище міру M_T на борелівській σ-алгебрі $\mathcal{B}$ будемо називати *верхньою мірою Море* оператора T, а функцію $F_T \in L_\infty$ – *верхньою похідною Море* оператора T.

Аналогічно визначається нижня міра Море оператора T та нижня похідна Море. Для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ визначаються дві характеристики:

$$\widetilde{m}_T(A) = \lim_{Z(A) \ni h \to 0} \inf \int_{[0;1]} hTh\, d\lambda,$$

$$m_T(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \widetilde{m}_T(A_k) : n \in \mathbb{N}, A = \coprod_{k=1}^{n} A_k, A_k \in \mathcal{B} \right\}.$$

Визначена таким чином функція m_T є зліченно-адитивною мірою на $\mathcal{B}$ та називається *нижньою мірою Море* оператора T. Вона також має похідну Радона-Нікодима $f_T \in L_\infty$ з умовою $\|f_T\|_\infty \le \|T\|$, яку ми називаємо *нижньою похідною Море* оператора T, тобто для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ виконується рівність

$$m_T(A) = \int_A f_T\, d\lambda.$$

Для нижньої міри Море має місце результат, аналогічний лемі 1:

Лема 2. [7] Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$, кожної множини $A \in \mathcal{B}$ та кожного околу нуля U в Z існує така функція $h \in Z(A) \cap U$, що

$$\left| m_T(A) - \int_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

У роботі [1, с. 40] встановлений зв'язок між верхніми та нижніми похідними Море:

Лема 3. Для довільних операторів $T, S \in \mathcal{L}(L_p)$ виконується нерівність:

$$f_S + f_T \le f_{S+T} \le F_{S+T} \le F_S + F_T.$$

Для оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при $1 \le p < \infty$ число

$$\|T\|_M = \max\{\|F_T\|, \|f_T\|\}$$

назвемо *напівнормою Море* оператора T.

Зауважимо, що напівнорма Море дійсно є напівнормою на $\mathcal{L}(L_p)$, причому $\|T\|_M \le \|T\|$ для кожного $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Дійсно, з леми 3 випливає, що майже скрізь на $[0; 1]$ виконується нерівність

$$-\|S\|_M - \|T\|_M \le f_S + f_T \le f_{S+T} \le F_{S+T} \le F_S + F_T \le \|S\|_M + \|T\|_M.$$

Отже, для майже всіх $t \in [0; 1]$

$$|f_{S+T}(t)| \le \|S\|_M + \|T\|_M, |F_{S+T}(t)| \le \|S\|_M + \|T\|_M.$$

Таким чином, $\|S + T\|_M \le \|S\|_M + \|T\|_M$. Нерівність $\|\alpha T\|_M \le |\alpha| \|T\|_M$ для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ та нерівність $\|T\|_M \le \|T\|$ є очевидними. Однак, останню оцінку можна поліпшити. А саме, має місце наступний результат:

Теорема. Для довільного оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ має місце оцінка

$$v(T) \ge \|T\|_M.$$

Доведення. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо множину $A \in \mathcal{B}$ додатної міри таким чином, щоб

$$\frac{1}{\lambda(A)} \left| \int_A F_T\, d\lambda \right| \ge \|F_T\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

та за лемою 1 виберемо функцію $h \in Z(A)$, щоб

$$\left| M_T(A) - \int\limits_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| < \frac{\varepsilon\, \lambda(A)}{2}.$$

Тоді для функцій $x = h/\sqrt[p]{\lambda(A)}$, $x^* = h/\sqrt[q]{\lambda(A)}$ одержуємо

$$v(T) \geq \left| \int\limits_{[0;1]} x^* Tx\, d\lambda \right| = \frac{1}{\lambda(A)} \left| \int\limits_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| \geq \frac{1}{\lambda(A)} \left| \int\limits_{A} F_T\, d\lambda \right| - \frac{1}{\lambda(A)} \left| M_T(A) - \int\limits_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| \geq$$

$$\geq \|F_T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|F_T\| - \varepsilon.$$

Це означає, що $v(T) \geq \|F_T\|$.

Аналогічно, виберемо тепер множину $C \in \mathcal{B}$ додатної міри так, щоб

$$\frac{1}{\lambda(C)} \left| \int\limits_{C} f_T\, d\lambda \right| \geq \|f_T\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

та за лемою 2 виберемо функцію $h \in Z(C)$, щоб

$$\left| m_T(C) - \int\limits_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| < \frac{\varepsilon\, \lambda(C)}{2}.$$

Як і у попередньому випадку, для функцій $x = h/\sqrt[p]{\lambda(C)}$, $x^* = h/\sqrt[q]{\lambda(C)}$ одержуємо оцінку

$$v(T) \geq \left| \int\limits_{[0;1]} x^* Tx\, d\lambda \right| = \frac{1}{\lambda(C)} \left| \int\limits_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| \geq \frac{1}{\lambda(C)} \left| \int\limits_{C} F_T\, d\lambda \right| - \frac{1}{\lambda(C)} \left| m_T(C) - \int\limits_{[0;1]} hTh\, d\lambda \right| \geq$$

$$\geq \|f_T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f_T\| - \varepsilon,$$

тобто $v(T) \geq \|f_T\|$.

Об’єднуючи дві одержані умови, отримаємо, що

$$v(T) \geq \max\{\|F_T\|, \|f_T\|\} = \|T\|_M.$$

Отже, основним результатом дослідження є встановлення зв’язку між числовим радіусом та напівнормою Море лінійних неперервних операторів, заданих на просторах L_p при $1 < p < \infty$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красікова І. В. Про одне узагальнення поняття компактного оператора на просторах L_p / І. В. Красікова, М. М. Попов // Науковий вісник Чернівецького університету : Вип. 501. Математика. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. — С. 38-42.

2. Kadets V. Recent progress and open questions on the numerical index of Banach spaces / V. Kadets, M. Martín, R. Payá // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. — 2006. — 100. — P. 155-182.

3. Duncan J. The numerical index of a normed spaces / J. Duncan, C. Mc-Gregor, J. Pryce, A. White // J. London Math. Soc. — 1970. — 2. — P. 81-488.

4. Ed-dari E. On the numerical index of Banach spaces / E. Ed-dari // Linear Algebra Appl. — 2005. — 403. — P.86-96.

5. Ed-dari E. On the numerical index of vector-valued function spaces / E. Ed-dari, M. Khamsi, A. Aksoy // Linear Algebra Appl. — 2007. — 55. — P.507-513.

6. Martín M. On the numerical index of real $L_p(\mu)$-spaces / M. Martín, J. Merí, M. Popov // Israel J. Math. — 2010 (to appear).

7. Maurey B. Sous-espaces compléméntes de L^p d’apres P.Enflo / B. Maurey // Semin. Maurey – Schwartz. – – 1975. — 1974-75, Exp. No.III. — P.1-14.