

## СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ ОРТОТРОПНЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ СЕКТОР И В ПОЛУПОЛОСУ

Щербина И. В., к. ф.-м. н., доцент, Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент

*Национальная металлургическая академия Украины*

Сформулирована и решена новая задача о контактном взаимодействии ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией и жесткого штампа. Получено распределение напряжений под штампом, а также напряжений в пластине. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с найденным ранее решением подобной задачи для ортотропной полуполосы.

*Ключевые слова: метод возмущения, малый параметр, ортотропная пластина, криволинейная анизотропия, передача нагрузки, контактное усилие взаимодействия.*

Щербина І. В., Білова О. В. ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВТИСКУВАННЯ ЖОРСТКОГО ШТАМПА В НАПІВБЕСКІНЧЕННИЙ ОРТОТРОПНИЙ КІЛЬЦЕВИЙ СЕКТОР І В НАПІВСМУГУ / Національна металургійна академія України

Сформульована і розв'язана нова задача про контактну взаємодію ортотропної пластини з циліндричною анізотропією і жорсткого штампу. Отримано розподіл напружень під штампом, а також напруження у пластині. Проведений порівняльний аналіз отриманих результатів зі знайденим раніше розв'язком подібної задачі для ортотропної напівсмуги.

*Ключові слова: метод збурення, малий параметр, ортотропна пластина, криволінійна анізотропія, передача навантаження, контактне зусилля взаємодії.*

Scherbina I., Belova O. COMPARISON OF RESULTS OF DECISION OF TASKS ABOUT PRESSING OF HARD STAMP IN SEMI-INFINITE ORTHOTROPIC CIRCULAR SECTOR AND IN A SEMISTRIP/ the National metallurgical academy of Ukraine

Now special interest is called with constructions from modern composite materials. Problems of contact of bodies of such materials define processes of durability and longevity of buildings. Anisotropy of a material of constructions leads to serious difficulties of mathematical character. However for a wide class of constructions of performance of anisotropy of the elastic environment can be used as parameters of asymptotic integration.

In the given article solved the problem about impression of a hard stamp in orthotropic a plate with cylindrical anisotropy. Distribution of efforts in a plate and under a stamp is received.

For the decision of a problem the perturbation method offered in operations by L.I. Manevich and A.V. Pavlenko is used. According to such approach the asymptotic analysis of the equations of the theory of elasticity for orthotropic bodies is executed with use of the parameters describing anisotropy. At such approach the intense-deformed condition (VAT) is split on two components, and each of them is at the sequential decision of boundary value problems of a potential theory. The decision of an initial problem is defined as superposition of the specified components.

In an environ of an angular point of a stamp character of a tension same, as well as for a half-plane, therefore for this case in operation is brought result of comparison of the known decision received by an asymptotic method for a half-plane with L.A. Galin's decision. Results of comparison of direct stresses under a stamp for ring semi-infinite sector and orthotropic semi stripe are reduced. For such problem every possible passage to the limit are lead. In zero approximation the decision of a problem Galin turns out. Influence of abrasion on pressure under a stamp and on character of feature is considered from the third approximation. It is established, that suitable near to angular points of a stamp the asymptotic decision coincides with the exact decision of L.A. Galin spread decomposed in series. The account of first two approximations gives good approximation of the exact decision and specifies character of feature near to an angular point of a stamp.

*Key words: perturbation method, small parameter, orthotropic plate, curvilinear anisotropy, transmission of loading, contact effort of cooperation.*

### ВВЕДЕНИЕ

На протяжении длительного времени поиск подходов к решению контактных задач для тел с криволинейной анизотропией является актуальным, так как подобные задачи имеют обширную область применения. Анизотропия упругой среды обычно приводит к существенным трудностям при решении краевых задач [1]. Однако для широкого класса конструкций характеристики анизотропии упругой среды могут быть использованы в качестве параметров асимптотического интегрирования [2]. Одним из наиболее важных и хорошо разработанных к настоящему времени разделов теории упругости, где достижения науки особенно велики, является плоская задача теории упругости. Успех в разработке плоских задач, в частности, контактных, объясняется привлечением к их рассмотрению теории аналитических функций комплексного переменного. основополагающие результаты в этом направлении представлены в работе [3].

Метод малого параметра нашел широкое применение в различных разделах механики, физики, математики, а именно таких, как небесная механика, теория колебаний, устойчивость движения.

Относительно недавно этот метод стал использоваться для решения краевых задач деформируемых тел со сложными физико-механическими свойствами [4].

К недостаткам традиционных численных методов расчета, используемых многими авторами, можно отнести в большинстве случаев отсутствие универсального подхода при решении конкретных задач (например, при использовании метода конформных отображений), большой объем вычислительных операций (решение с помощью уточненных теорий изгиба), большую размерность разрешающей системы уравнений (метод конечных элементов, метод конечных разностей) [5]. Попытки построения более общих алгоритмов решения такого рода задач приводят, как правило, к наложению друг на друга ряда итерационных процедур. В этом случае вычислительная схема задачи становится чрезвычайно громоздкой, что отражается на сходимости процесса решения и затратах машинного времени.

Поэтому поиск простых и эффективных методов решения контактных задач с учетом сложной геометрии, физических свойств современных материалов, условий нагружения и характера деформирования по-прежнему остается актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Цель данного исследования – решение новой плоской контактной задачи теории упругости аналитическим методом и сравнение полученных результатов с аналогичными задачами. Остановимся более подробно на результатах решения задачи о вдавливании жесткого штампа в ортотропную пластину с цилиндрической анизотропией.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть упругая пластина ( $R_0 \leq r \leq \infty$ ;  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ ) закреплена по кромкам  $\theta = \pm\gamma$  (рис. 1). На границу  $r = R_0$  действует жесткий штамп на участке  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  с основанием, совпадающим с границей  $r = R_0$ . Штамп нагружен нормальным усилием  $P_0$  и касательным  $Q_0$ . При этом между штампом и пластиной учитывается трение, подчиняющееся закону Кулона (рассматривается состояние предельного равновесия штампа). На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) перемещения и деформации равны нулю. Пластина толщины  $t$  работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Материал пластины является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами  $r, \theta$ . Требуется найти распределение напряжений под штампом и в пластине.

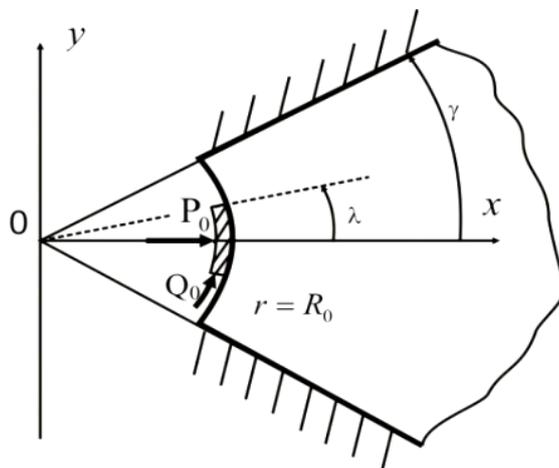


Рис. 1

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения был применен асимптотический метод, позволяющий сводить краевую задачу теории упругости к последовательности краевых задач теории потенциала [1].

Если вместо полярных координат  $r, \theta$  ввести безразмерные координаты  $\xi, \eta$  соотношениями  $r = R_0 e^\xi, \theta = \eta$ , то поставленная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия пластины в перемещениях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \vartheta_2 (v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda \leq |\eta| \leq \gamma), \\ u &= v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma), \\ u &= C_0, \quad \tau = \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda).\end{aligned}$$

На бесконечности перемещения и напряжения равны нулю. Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0, \eta) d\eta + Q_0 = 0.$$

Здесь  $u = u_r$ ,  $v = u_\theta$  – компоненты вектора перемещений пластины;  $B_1 = \frac{E_1 t}{1 - \vartheta_1 \vartheta_2}$ ,  $B_2 = \frac{E_2 t}{1 - \vartheta_1 \vartheta_2}$  – жесткости пластины на растяжение-сжатие;  $E_1, E_2$  – модули упругости вдоль главных направлений;  $G = G_* t$  – жесткость пластины на сдвиг;  $G_*$  – модуль сдвига;  $\sigma_1, \tau$  – нормальное (в направлении координаты  $\xi$ ) и касательное усилия в пластине;  $m = 1 + \vartheta_2 B_1 / G = 1 + \vartheta_1 B_2 / G$ ;  $\vartheta_1, \vartheta_2$  – коэффициенты Пуассона материала пластины ( $\vartheta_1 B_2 = \vartheta_2 B_1$ ),  $\rho$  – коэффициент трения ( $\rho < 1$ ); индексы  $\xi, \eta$  обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Определение напряженного состояния первого типа (медленно изменяющегося в направлении координаты  $\xi$ ) в первом приближении [6] сводится к интегрированию уравнения

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}u_\xi^{1,0} &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ u^{1,0} &= C_0 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda), \\ u^{1,0} &= 0 \quad (\eta = \pm\gamma).\end{aligned} \quad (2)$$

На бесконечности выполняются нулевые условия по производным искомой функции. Так как при  $\eta = \pm\gamma$  компонента вектора перемещений  $u$  равна нулю, то и  $u_\xi^{1,0}$  при  $\eta = \pm\gamma$  также будет равна нулю. Перемещение  $v^{1,0}$ , соответствующее данному напряженному состоянию, находится из соотношения:

$$v_\eta^{1,0} + u^{1,0} = 0. \quad (3)$$

Введем новые независимые переменные  $x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi$ ,  $y_1 = \eta$ . Тогда краевая задача (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned}u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} &= 0, \\ u_{x_1}^{1,0} &= 0 \quad (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma), \\ u^{1,0} &= C_0 \quad (x_1 = 0, |y_1| < \lambda), \\ u_{x_1}^{1,0} &= 0 \quad (y_1 = \pm\gamma),\end{aligned} \quad (4)$$

на бесконечности производные обращаются в нуль.

Таким образом, требуется найти аналитическую в полуполосе  $0 \leq x_1 < \infty$ ,  $|y_1| \leq \gamma$  функцию  $u^{1,0}$  по заданным граничным условиям (5). Эта задача решается отображением полуполосы из плоскости  $z_1$  ( $z_1 = y_1 + ix_1$ ) в верхнюю полуплоскость изображений  $\zeta_1$  ( $\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1$ ) [7]. Указанное отображение можно выполнять при помощи преобразования Шварца-Кристоффеля. Задача об определении аналитической в полуплоскости функции, когда на некоторых интервалах границы известна

действительная, а на других мнимая часть искомой функции, решается при помощи формулы Келдыша-Седова. Так как из условий (5) следует, что на границе полуплоскости  $\zeta_1$  в интервале  $|\eta_1| < l_1$  действительная часть функции  $\varphi_1^0$  равна нулю, а на остальной части границы мнимая ее часть равна нулю, то решение для функции  $\varphi_1^0$  во всей полуплоскости имеет вид

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - l_1^2}}, \quad (6)$$

где  $A$  – действительная постоянная; выбирается та ветвь корня, которая положительна при положительных значениях аргумента.

$$A = -\frac{P_0 R_0 \pi}{4\gamma \sqrt{GB_1} K(l_1)},$$

где  $l_1 = \sin \frac{\pi \lambda}{2\gamma}$ ,  $K(l_1)$  – полный эллиптический интеграл первого рода.

Давление под штампом в первом приближении выражается следующим образом [8]:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4\gamma K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (7)$$

а функция  $u_{y_1}^{1,0}$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $|\eta_1| > l_1$  находится по формуле

$$u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - l_1^2)^{-1/2}.$$

Составляющая  $v^{1,0}$  компоненты вектора перемещений  $v^0$ , соответствующая данному напряженному состоянию, в этом приближении определяется из уравнения (3), причем функция  $u^{1,0}$  находится из соотношений для  $u_{x_1}^{1,0}$  и  $u_{y_1}^{1,0}$  соответственно при  $|\zeta_1| < l_1$  и  $|\zeta_1| > l_1$  с учетом, что при  $y_1 = \eta = \pm \gamma$   $u^{1,0} = 0$ .

В частности, при  $x_1 = 0$  ( $\xi = 0$ ),  $|y_1| = |\eta| \leq \lambda$   $u^{1,0} = C_0 = (2\gamma/\pi) A \ln(l_1) [\cos(\pi\lambda/2\gamma)]^{-1}$ . Эта величина определяет осадку штампа. При  $x_1 = 0$  и, достаточно близких к угловой точке штампа на свободной границе ( $\lambda \leq |y_1| \leq \gamma$ ), перемещение  $u^{1,0}$  находится по формуле

$$u^{1,0} = \frac{2\gamma}{\pi} A \frac{\ln\left(\sin(\pi y_1/2\gamma) + \sqrt{(\sin(\pi y_1/2\gamma))^2 - l_1^2}\right)}{\cos(\pi y_1/2\gamma)}. \quad (8)$$

Давление под штампом определяется формулой (7), а касательное напряжение  $\tau$  под ним имеет вид  $\tau^0 = \rho \sigma_1^0$ . При  $\rho = 0$  получим решение для гладкого штампа. Так как  $u_{\xi}^{2,0} = 0$ , то граничные условия для определения функций  $u^{1,1}$  и  $v^{2,1}$  во втором приближении оказываются нулевыми. Соответственно, нулевыми являются функции  $v^{1,1}$  и  $u^{2,1}$ . Поэтому и решения являются нулевыми, то есть второе приближение не вносит поправки в первое приближение (разложение решений ведется по целым степеням параметра  $\varepsilon$ ) [1,2].

Влияние трения на давление под штампом сказывается лишь с третьего приближения. В этом случае возникает невязка по деформации  $u_{\xi}$  при  $\xi = 0$ ,  $l_1 < |\eta_1| < 1$ , которая снимается при решении уравнения (1) для функции  $u^{1,2}$ . Граничные условия для определения  $u^{1,2}$  при  $\xi = 0$  будут  $u_{\xi}^{1,2} = u_{\xi}^{1,0} - \mu v_{\eta}^{1,0}$  ( $l_1 < |\eta_1| < 1$ )  $u_{\eta}^{1,2} = 0$  ( $|\eta| < l_1$ ). На бесконечности все функции обращаются в нуль. Так как  $u_{\xi}^{1,0} = 0$  при  $|\eta| > l_1$ , то  $u_{\xi}^{1,2} = -\mu v_{\eta}^{1,0} = \mu u^{1,0}$  ( $\xi = 0$ ,  $l_1 < |\eta_1| < 1$ ). Здесь  $\mu = \mathfrak{A} B_2 / G = \mathfrak{B} B_1 / G$  и учтена связь между  $v_{\eta}^{1,0}$  и  $u^{1,0}$ , обусловленная равенством (3).

Таким образом, невязка по нормальным напряжениям  $\sigma_1$  при  $\xi = 0$ ,  $l_1 < |\eta_1| < 1$  вызвана лишь учетом коэффициента Пуассона.

Поскольку в окрестности угловой точки штампа характер напряженного состояния такой же, как и для полуплоскости, то в этом случае имеется возможность сравнить известное решение для полуплоскости с решением Л.А. Галина [9] непосредственно или, например, сравнить с решением похожей задачи для

полуполосы, для которой уже были проведены всевозможные предельные переходы, при которых в нулевом приближении получалось решение задачи Галина.

Итак, в таблице 1 приведены численные расчеты нормального напряжения под штампом в первом приближении при  $l_1 = 0,5$ .

Таблица 1 – Сравнение распределения нормальных напряжений под штампом для кольцевого полубесконечного сектора и полуполосы

$t$		0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,99
$\sigma^*$	1)	1,09	1,11	1,21	1,33	1,43	2,03	23,26
	2)	1,186	1,203	1,258	1,369	1,59	2,141	26,536

- 1) асимптотическое решение для ортотропной полуполосы;
- 2) асимптотическое решение для ортотропного полубесконечного кольцевого сектора с криволинейной анизотропией.

## ВЫВОДЫ

Из таблицы видно, что влияние трения на давление под штампом и на характер особенности учитывается с третьего приближения. Установлено, что пригодное вблизи угловых точек штампа асимптотическое решение совпадает с разложенным в ряд точным решением Л.А. Галина [9]. Учет первых двух приближений дает хорошую аппроксимацию точного решения и указывает на характер особенности вблизи угловой точки штампа ( $\eta_1 = l_1$ ). Эта особенность имеет вид:

$$\sigma = -B \left( 1 - \frac{\eta_1}{l_1} \right)^{-\frac{1}{2} + \theta}.$$

Для гладкого штампа особенность совпадает с точной. Полученное в исходной задаче решение [10] может быть «подправлено» вблизи особых точек при помощи «срачивания» с указанным особым решением. Известно, что с уменьшением значения угла  $\gamma$  точка «срачивания» приближается к границе области контакта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. — К. : Вища школа, 1982. — 152 с.
2. Павленко А. В. Передача нагрузки стрингером ортотропному круговому сектору с криволинейной анизотропией / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Вісник Донецького Національного Університету, серія А. — 2010. — № 1. — С. 51-55.
3. Острик В. И. Метод Виннера–Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. — К. : Наук. думка, 2006. — 328 с.
4. Якуба Дау. Классификация аналитических решений задач теории упругости, выявляющих особенности в напряженном состоянии деформируемых тел // Неделя науки 2002 : 62-я научно-техн. конф. студ. аспирантов и молодых ученых, 28-29 окт. 2002 г. — СПб : ПГУПС. — 2002. — Ч.1. — С. 85-86.
5. Кузьменко В. И. Компьютерное моделирование поведения упругопластических оснований сложной структуры / В. И. Кузьменко, Ю. Е. Власенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2008. — №12. — С. 113-123.
6. Павленко А. В. Применение асимптотического метода к решению плоских задач теории упругости / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // «Theoretical foundation of civil engineering – XX» Polish–Ukrainian Transaction, September, 2012. — Warsaw. — P. 251-256.
7. Bilova O. V. Asymptotic method for composite theory problems // Теорія і практика металургії. — № 4(87). — июль-август 2012. — С. 138-140.
8. Павленко А. В. Вдавливание жесткого штампа в ортотропную пластину с криволинейной анизотропией / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, Дніпропетровський національний університет. — 2012. — Вип. 13. — С. 320-327.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. — М. : Наука, 1980. — 303 с.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. — М. : Наука, 1977. — 463с.