

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Гибкина Н. В., к. т. н., доцент, Роговой Н. С., магистр, Сидоров М. В., к. ф.-м. н, доцент,  
Стаднікова А. В., ассистент

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

Рассматривается задача численного анализа перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей. Математической моделью служит начально-краевая задача для функции тока. Для её решения предлагается использовать структурный метод  $R$ -функций с аппроксимацией неопределенной компоненты структуры методом Галёркина. Анализ траекторий движения частиц жидкости проводится с помощью методов решения задачи Коши. Вычислительный эксперимент проведен для случая единичного квадрата с расположенными в нем двумя точечными вихрями при различных режимах их вращения. Построены линии уровня функции тока, поля скоростей жидкости и траектории движения отдельных частиц, изучены эволюции линейного и плоского элементов. Полученные результаты позволили найти эффективный режим перемешивания.

*Ключевые слова:* течение вязкой жидкости, задача перемешивания, функция тока, метод  $R$ -функций, метод Галёркина.

Гибкіна Н. В., Роговий Н. С., Сидоров М. В., Стаднікова Г. В. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ, ЯКЕ ВИКЛИКАНЕ СИСТЕМОЮ ТОЧКОВИХ ВИХОРІВ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Розглянуто задачу чисельного аналізу перемішування в'язкої рідини, яке викликане системою точкових вихорів. Математичною моделлю є початково-крайова задача для функції течії. Для її розв'язання запропоновано використати структурний метод  $R$ -функцій з апроксимацією невизначеної компоненти структури методом Гальоркіна. Аналіз траєкторій руху частинок рідини проводиться за допомогою методів розв'язання задачі Коші. Обчислювальний експеримент проведено для випадку одиничного квадрата із розташованими у ньому двома точковими вихорами для різних режимів їх обертання. Побудовано лінії рівня функції течії, поля швидкостей рідини і траєкторії руху окремих частинок, вивчені еволюції лінійного і плоского елементів. Отримані результати дозволили знайти ефективний режим перемішування.

*Ключові слова:* течія в'язкої рідини, задача перемішування, функція течії, метод  $R$ -функцій, метод Гальоркіна.

Gibkina N. V., Rogovyi N. S., Sidorov M. V., Stadnikova A. V. NUMERICAL ANALYSIS OF THE PROBLEM OF VISCOUS FLUID MIXING INDUCED BY THE POINT VORTICES SYSTEM / Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine

The paper considers the problem of numerical analysis of viscous incompressible fluid mixing caused by a system of point vortices. The solution of the mixing problem consists of two stages – the velocity field construction and the individual fluid particles trajectories study. Mathematical model of the first part of the mixing task is the initial-boundary value problem for the stream function. For its solution the  $R$ -functions structural method and the Galerkin method are proposed to use. A structure solution of the problem has been constructed and a system of ordinary differential equations for the coefficients of the uncertain component approximation has been derived. Mathematical model of the second part of the mixing task is the Cauchy problem for the trajectories of fluid particles motion. Its numerical analysis is carried out using one-step methods with automatic selection of the integration step. Using the methods of  $R$ -functions and Galerkin possible to obtain an approximate expression for the current (and hence the velocity field) in an explicit analytic form, so that the right side of the system describing the trajectory of motion of the particles is given analytically, rather than as an array. Using the  $R$ -functions method and Galerkin method allowed to obtain an approximate expression for the stream function (and hence the velocity field) in an explicit analytic form, so that the right side of the system describing the trajectory of the particles motion is given analytically, rather than as an array. Due to the proposed method the numerical analysis of viscous liquid mixing caused by a system of two vortices in the unit square has been conducted. Vortices were located at points with coordinates (0,23; 0,23) and (0,73; 0,73). Three modes of vortices rotational have been considered: vortices rotate in one direction with a constant intensity (first mode), the vortices rotate in different directions with a constant intensity (second mode) and vortices rotate with variable intensity and variable direction (third mode). For the case when the vortices rotate with variable intensity and variable direction, for each vortex the law of motion is given by as follows: for a vortex with coordinates (0,23; 0,23) the law is expressed in the form  $\sin t$  and for a vortex with coordinates (0,73; 0,73) the law is expressed in the form  $\cos t$ , where  $t$  is time. For each mode the streamlines, the vector velocity fields, the trajectories of particles motion, the evolution of linear (line segment) and plane (rhomb) elements are given. The results obtained allow to conclude about the efficiency of the mixing only in the third mode.

*Keywords:* viscous fluid flow, mixing flow, stream function, Galerkin's method, the  $R$ -function method.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема математического моделирования и численного анализа перемешивания вязких жидкостей часто встречается в химической, фармацевтической, пищевой промышленности и других прикладных областях [2, 11, 18]. Кроме того, проблема перемешивания жидкостей является фундаментальной научной проблемой, тесно связанной с современными концепциями хаотической и регулярной динамики [1, 17]. Известно [3, 9], что при некоторых условиях ламинарные течения могут приводить к интенсивному перемешиванию. Такие режимы получили название хаотических и стали предметом интенсивного изучения как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения. Однако большинство методов, используемых при моделировании таких процессов, не обладают свойством универсальности и их сложно применять для «непримитивных» областей. В работах Дж.М. Оттино, Х. Арефа, В.В. Мелешко, Т.А. Дунаевой, Т.С. Краснопольской и др. [3, 7, 9, 11, 18] решалась задача перемешивания для таких простых областей, как круг, полукруг, круговой сектор и т.д., однако для изучения процесса перемешивания в более сложных областях предложенный ими математический аппарат не работает. Точно учесть геометрию области можно, используя конструктивный аппарат теории  $R$ -функций, предложенный акад. НАН Украины В.Л. Рвачевым [12]. Поэтому разработка новых методов численного анализа задачи перемешивания, основанных на применении метода  $R$ -функций, является актуальной научной проблемой.

Целью данной работы является математическое моделирование и численный анализ процесса перемешивания вязкой несжимаемой жидкости, вызванного системой точечных вихрей, методами  $R$ -функций и Галёркина. Решение задачи перемешивания состоит из двух этапов:

- 1) определение поля скоростей течения жидкости (формализм Эйлера):
- 2) исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости (формализм Лагранжа).

Для решения первой части задачи перемешивания необходимо разработать приближенно-аналитический метод, основанный на методе  $R$ -функций (построить структуру решения соответствующей начально-краевой задачи, разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты структуры методом Галёркина). Для решения второй части задачи перемешивания необходимо составить и решить (используя численные методы решения задачи Коши) систему уравнений движения лагранжевой частицы. Далее, полученные траектории движения нужно исследовать на наличие и характер хаотического поведения с помощью методов нелинейной динамики (определить стационарные точки, построить фазовые портреты, исследовать эволюции линейного и плоского элементов).

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4, 5]. Предварительные результаты были изложены в работах [6, 13-15].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать плоскопараллельный случай. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет область  $\Omega$ . Движение жидкости в области  $\Omega$  вызвано  $N$  точечными вихрями с интенсивностями  $\Gamma_i(t)$ , расположенными в точках  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $t$  – время. Значениям  $\Gamma_i(t) > 0$  соответствует поток, закручивающийся по часовой стрелке,  $\Gamma_i(t) < 0$  – поток, закручивающийся против часовой стрелки.

Решение первой части задачи перемешивания заключается в получении поля скоростей  $(v_x, v_y)$  в области течения  $\Omega$ . Будем считать, что рассматриваемое течение относится к ползущим и нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь, т.е., можно ограничиться рассмотрением т.н. приближения Стокса [8].

Плоское стоксово течение будем описывать с помощью функции тока  $\psi(x, y, t)$ , вводимой соотношениями [8]

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Начальные и краевые условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор  $\mathbf{v}$ . Так, если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращается нормальная и тангенциальная составляющая скорости (условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки. Исходя из этого, на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  можно задать значение функции тока  $\psi$  и её

нормальной производной  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$ , где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ . Кроме того, для функции тока должно быть задано начальное условие  $\psi|_{t=0}$ .

Считаем, что граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  – непротекаемая и неподвижная. Тогда задача математического моделирования течения жидкости в области  $\Omega$  сводится к начально-краевой задаче для функции тока  $\psi(x, y, t)$ :

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi = F(x, y, t) \text{ в } \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\Delta^2$  – бигармонический оператор,  $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ,

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \cdot \delta(x - x_i, y - y_i), \quad \delta(x, y) \text{ – двумерная дельта-функция Дирака.}$$

Решение второй части задачи перемешивания заключается в решении уравнений движения лагранжевой частицы

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t), \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t), \quad (4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (5)$$

и в построении и анализе траекторий движения.

## МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для решения начально-краевой задачи (1)-(3) воспользуемся структурным методом акад. НАН Украины В.Л. Рвачёва [12].

Известно [16], что структура решения стационарной задачи Стокса

$$\Delta^2 \psi = F \text{ в } \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega,$$

имеет вид

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \quad (6)$$

где  $f = EC\tilde{f}$ ,  $g = EC\tilde{g}$  – продолжения функций  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  в  $\Omega$ , оператор  $D_1$  определяется равенством

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y},$$

$\Phi$  – неопределенная компонента структуры, а функция  $\omega(x, y)$  обладает свойствами

а)  $\omega = 0$  на  $\partial\Omega$ ;

б)  $\omega > 0$  в  $\Omega$ ;

в)  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = -1$  на  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Функция  $\omega(x, y)$  с указанными свойствами может быть построена с помощью  $R$ -функций для достаточно широкого класса областей [12].

Тогда в соответствии с (6) структура решения начально-краевой задачи (1)-(3), т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий крайвым условиям (2), имеет вид

$$\psi(x, y, t) = \omega^2(x, y)\Phi(x, y, t),$$

где  $\Phi = \Phi(x, y, t)$  – неопределенная компонента структуры.

Для аппроксимации неопределенной компоненты  $\Phi$  воспользуемся методом Галёркина для нестационарных задач [10]. Для этого представим  $\Phi$  в виде

$$\Phi(x, y, t) \approx \Phi_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)\tau_k(x, y), \quad (7)$$

где  $c_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ , – неизвестные пока функции,  $\{\tau_k\}$  – любая полная в пространстве  $L_2(\Omega)$  система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.д.).

Представление  $\Phi$  в виде (7) приводит к тому, что приближенное решение задачи (1)-(3) мы будем искать в виде

$$\Psi_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)\varphi_k(x, y), \quad (8)$$

где  $\varphi_k = \omega^2\tau_k$ ,  $k=1, \dots, n$ .

Заметим, что в сделанных предположениях  $\{\varphi_k\}$  – координатная последовательность:

- 1) для любого  $k$   $\varphi_k \in H_{\Delta^2}$ ;
- 2) для любого  $n$   $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно независимы;
- 3)  $\{\varphi_k\}$  полная в  $H_{\Delta^2}$ .

В соответствии с методом Галёркина, неизвестные функции  $c_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ , найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (8) в уравнение (1), первым  $n$  координатным функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных  $c_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ ,

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t)[\varphi_k, \varphi_j]_{-\Delta} + \nu \sum_{k=1}^n c_k(t)[\varphi_k, \varphi_j]_{\Delta^2} = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} [\varphi_k, \varphi_j]_{-\Delta} &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy, \\ [\varphi_k, \varphi_j]_{\Delta^2} &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) dx dy, \\ (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \cdot \iint_{\Omega} \delta(x-x_i, y-y_i) \varphi_j(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \cdot \varphi_j(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Систему (9) нужно дополнить начальными условиями, которые получаются из (3):

$$c_k(0) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что решение первой задачи перемешивания получается в явном аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование при решении второй части.

Для исследования процесса перемешивания в физическом эксперименте обычно в окрашенную вязкую жидкость (например, глицерин) помещают каплю жидкости, окрашенной в другой цвет (так называемый точечный маркер), и наблюдают за его движением в области. При компьютерном моделировании такому эксперименту будет соответствовать решение задачи Коши (4), (5), для решения которой можно использовать явные одношаговые методы с автоматическим контролем точности [19].

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Вычислительный эксперимент был проведен для прямоугольной области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Рассматривалось три разных режима вращения вихрей: вихри вращаются в одном направлении с

постоянной интенсивностью (первый режим), вихри вращаются в разных направлениях с постоянной интенсивностью (второй режим) и вихри вращаются с переменной интенсивностью и переменным направлением (третий режим).

В рассматриваемую область помещено два вихря. Вихри были расположены в точках с координатами  $(0,23;0,23)$  и  $(0,73;0,73)$ . Для случая, когда вихри вращаются с переменной интенсивностью и переменным направлением, для каждого вихря задается закон движения следующим образом: для вихря с координатами  $(0,23;0,23)$  закон выражается в виде  $\sin t$ , а для вихря с координатами  $(0,73;0,73)$  закон выражается в виде  $\cos t$ , где  $t$  – время.

Задача перемешивания была решена для каждого из трех режимов. На рис. 1 – 6 приведены полученные линии уровня функции тока и поля скоростей в различные моменты времени.

Для разных режимов вращения вихрей были найдены стационарные точки. Для каждого из режимов существует по две стационарные точки, координаты которых совпадают с координатами вихрей. Обе стационарные точки – точки типа «центр». Таким образом, при постоянной интенсивности вихрей перемешивание не будет эффективным, т.к. траектории движения частиц в окрестности точек типа «центр» имеют замкнутую структуру. Эффективного перемешивания можно достичь, изменяя интенсивности вихрей во времени, т.е., при третьем режиме.

На сетке с шагом 0,25 были построены фазовые траектории маркеров (рис. 8). Из рис. 8 б) видно, что для второго режима перемешивания траектории движения частиц стягиваются к окрестностям вихря и остаются там до конца перемешивания, что свидетельствует о неэффективном перемешивании в этом режиме. Из рис. 8 а) видно, что для первого режима перемешивания, несмотря на то, что частицы перемещаются по всей области, они всё же движутся по замкнутым траекториям, что свидетельствует о том, что перемешивание в этом случае лучше, чем в предыдущем, однако всё равно неэффективно. При третьем же режиме перемешивания (рис. 8 в)) частицы не стягиваются к окрестностям вихревых точек, а перемещаются по незамкнутым траекториям внутри области, что свидетельствует об эффективном перемешивании.

Также были исследованы эволюции линейного элемента (отрезка), расположенного в окрестности вихревой точки и в области, где влияние вихрей примерно одинаково. Расчеты проводились в рамках полного периода  $2\pi$ . Результаты перемешивания (т.е. траектории частиц, образующих этот отрезок) приведены на рис. 9-11. Из анализа результатов видно, что перемешивание эффективно только в третьем режиме, так как в первых двух изначально близкие точки с течением времени незначительно расходятся, даже когда отрезок помещён в область с одинаковым влиянием двух вихрей.

Далее исследовались эволюции плоского элемента – небольшой области, состоящей из большого числа находящихся рядом точек. Эта область была расположена в окрестности вихревой точки и в области, где влияние вихрей примерно одинаково. Расчеты проводились также в рамках полного периода  $2\pi$ . Результаты перемешивания (т.е. траектории частиц, образующих эту область) приведены на рис. 12-14. Из анализа результатов видно, что перемешивание эффективно только в третьем режиме, так как в первых двух изначально близкие точки с течением времени незначительно расходятся и остаются в окрестностях вихревых точек.

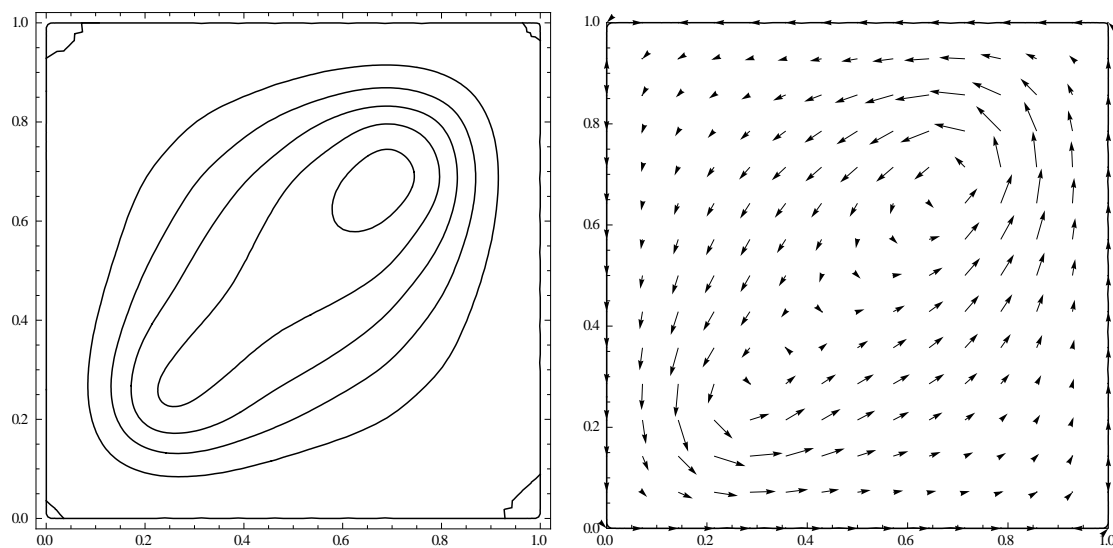


Рис. 1. Линии уровня функции тока и поле скоростей для первого режима перемешивания

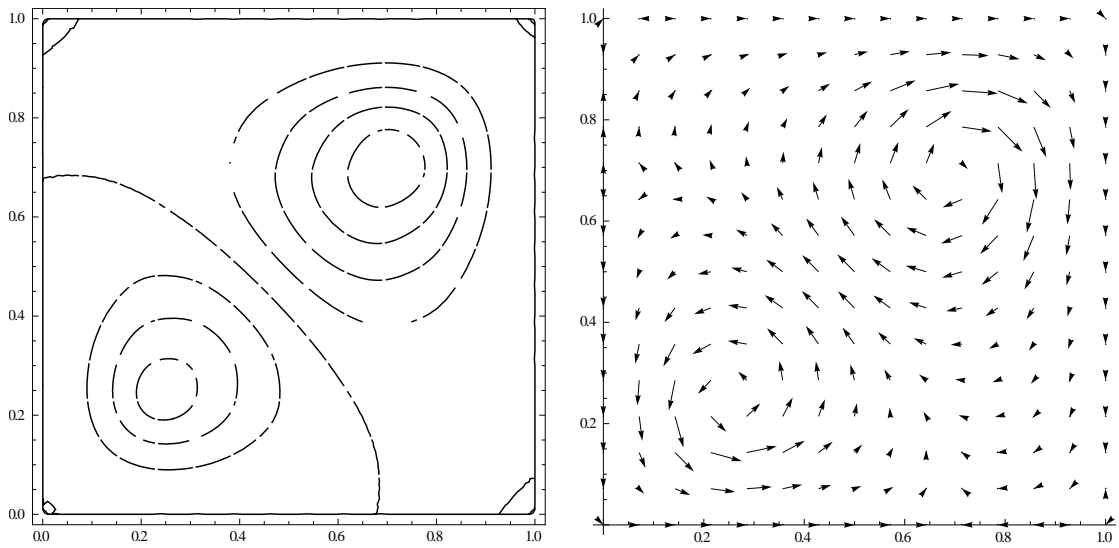


Рис. 2. Линии уровня функции тока и поле скоростей для второго режима перемешивания

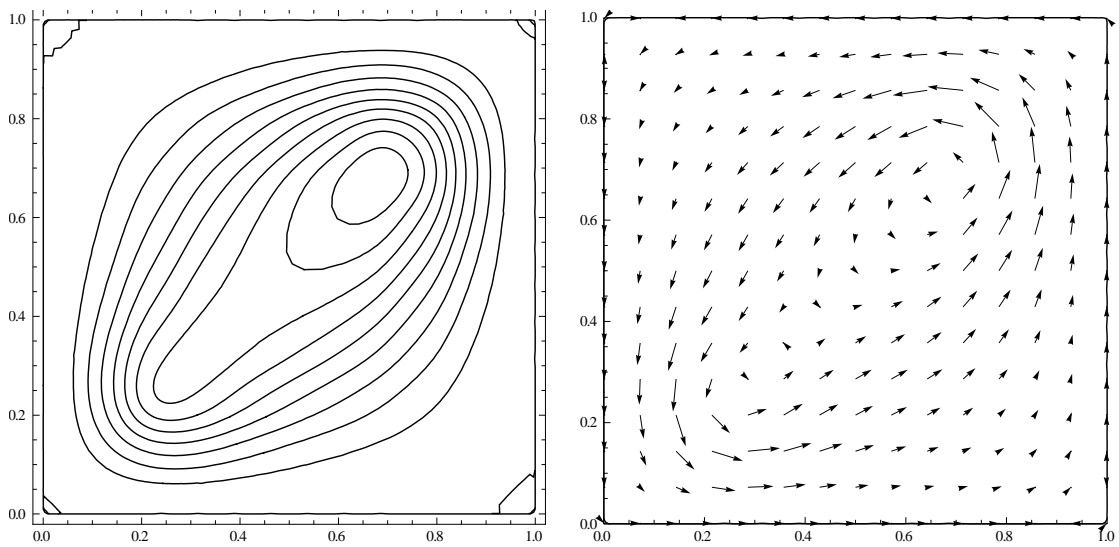


Рис. 3. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при  $t = \frac{\pi}{4}$

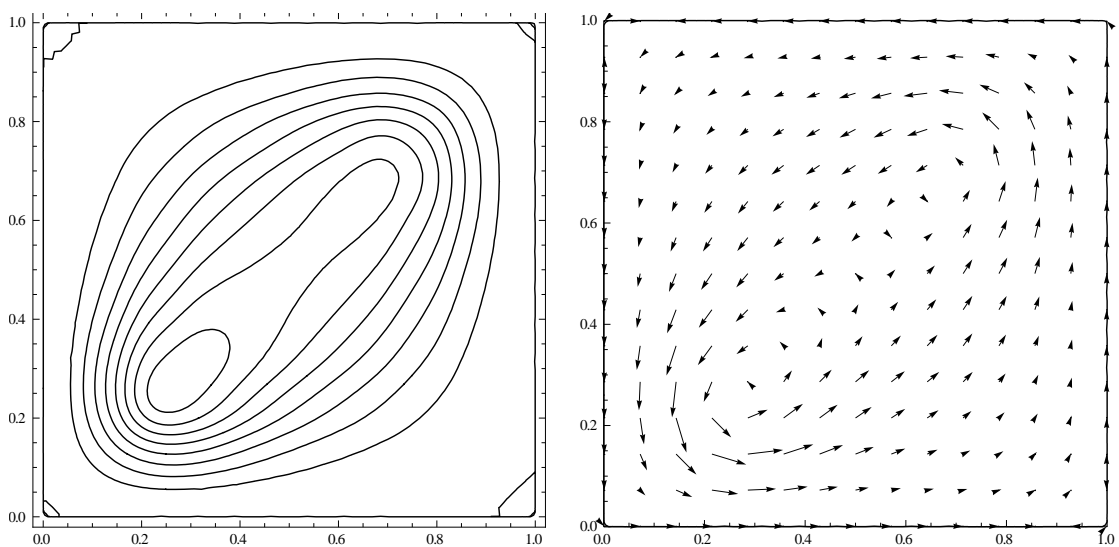


Рис. 4. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при  $t = \frac{\pi}{3}$

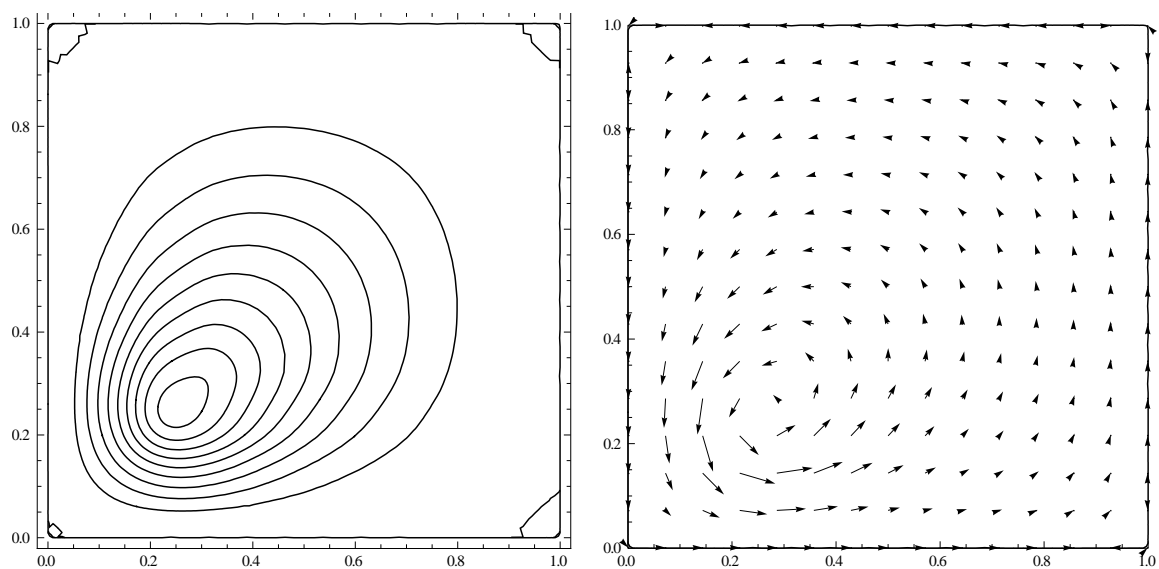


Рис. 5. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при  $t = \frac{\pi}{2}$

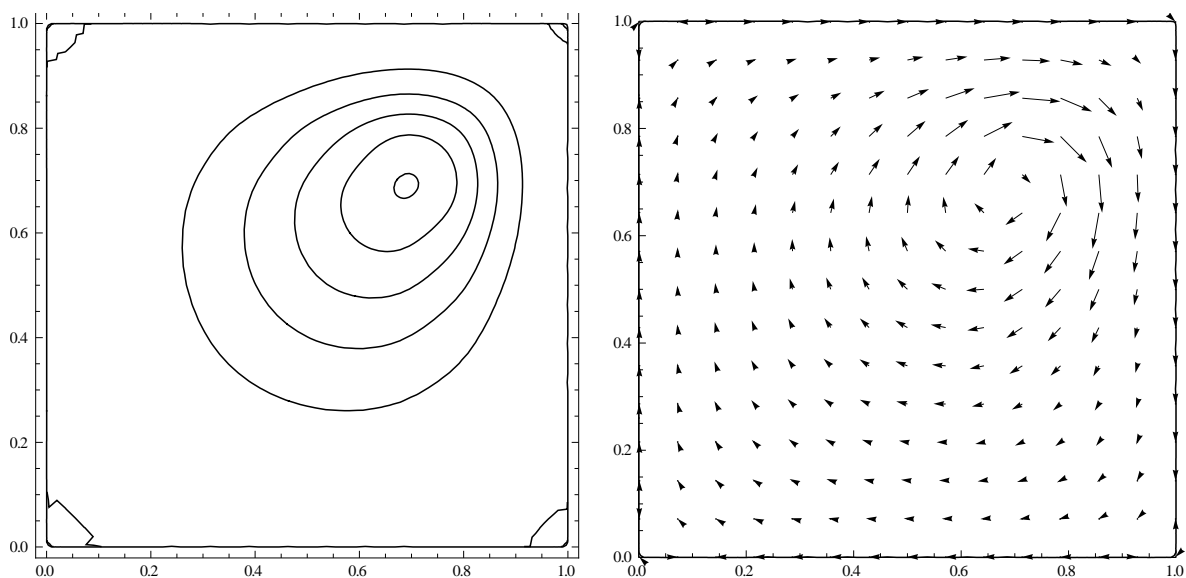


Рис. 6. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при  $t = \pi$

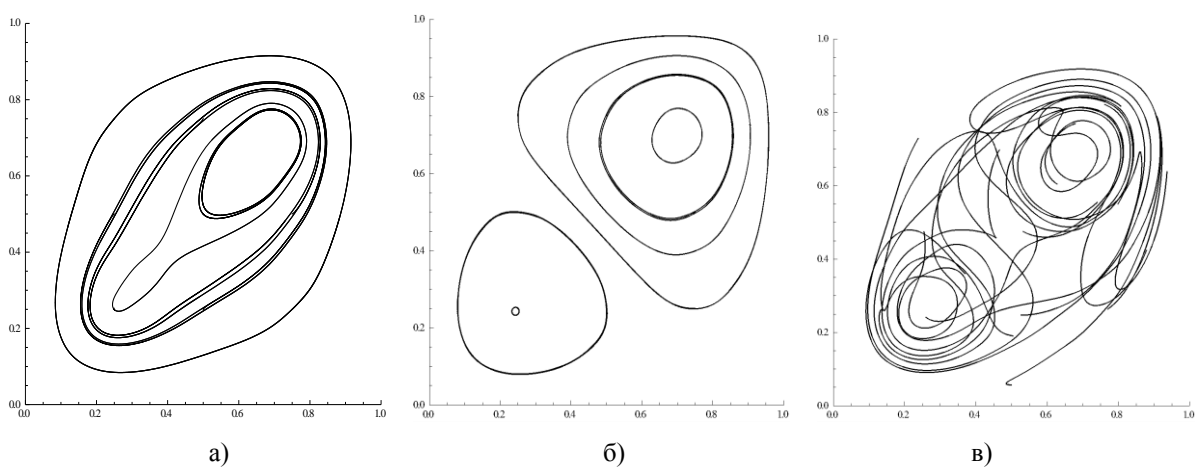


Рис. 8. Фазовые траектории при первом (а), втором (б) и третьем (в) режимах перемешивания

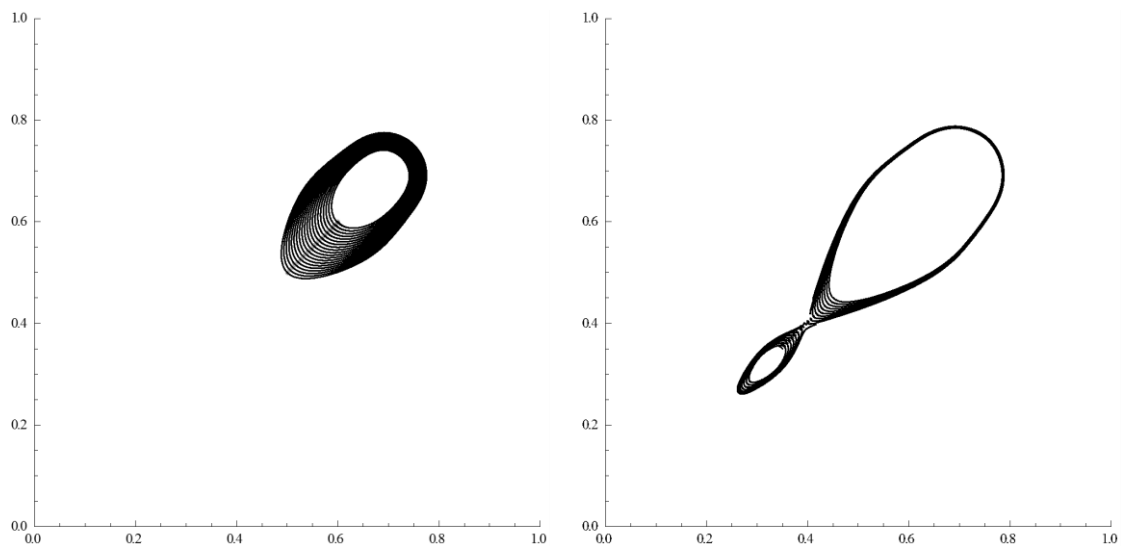


Рис. 9. Эволюция линейного элемента при первом режиме перемешивания

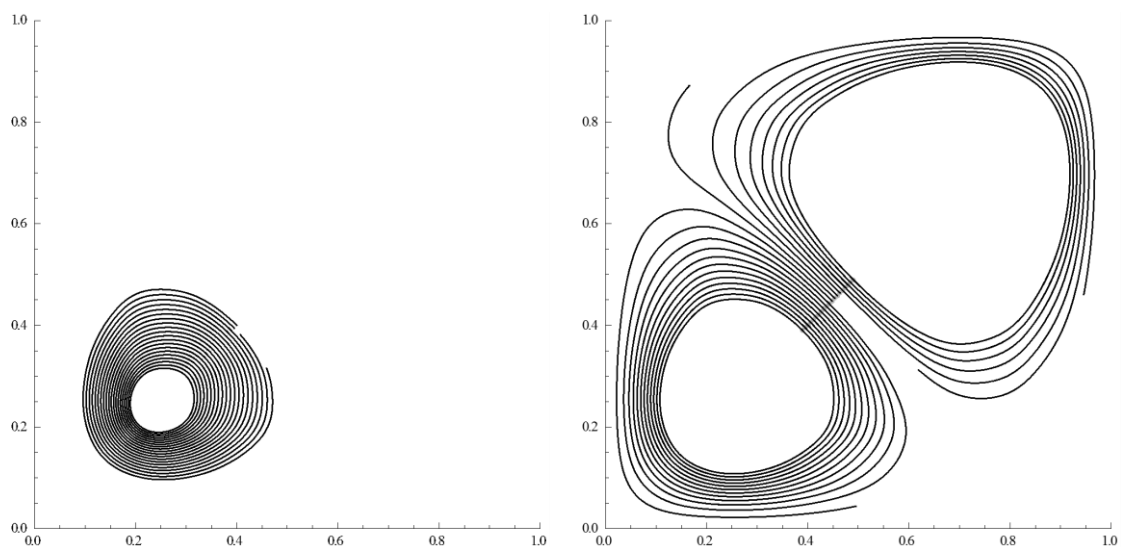
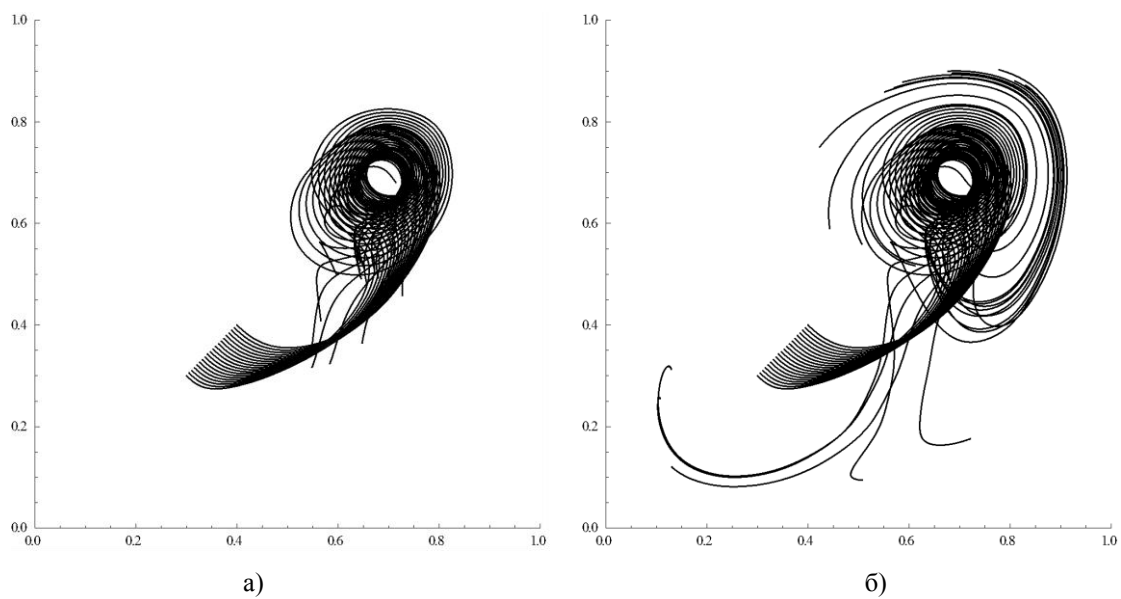


Рис. 10. Эволюция линейного элемента при втором режиме перемешивания

Рис. 11. Эволюция линейного элемента при третьем режиме перемешивания для  $t = \frac{3\pi}{2}$  (а) и  $t = 2\pi$  (б)



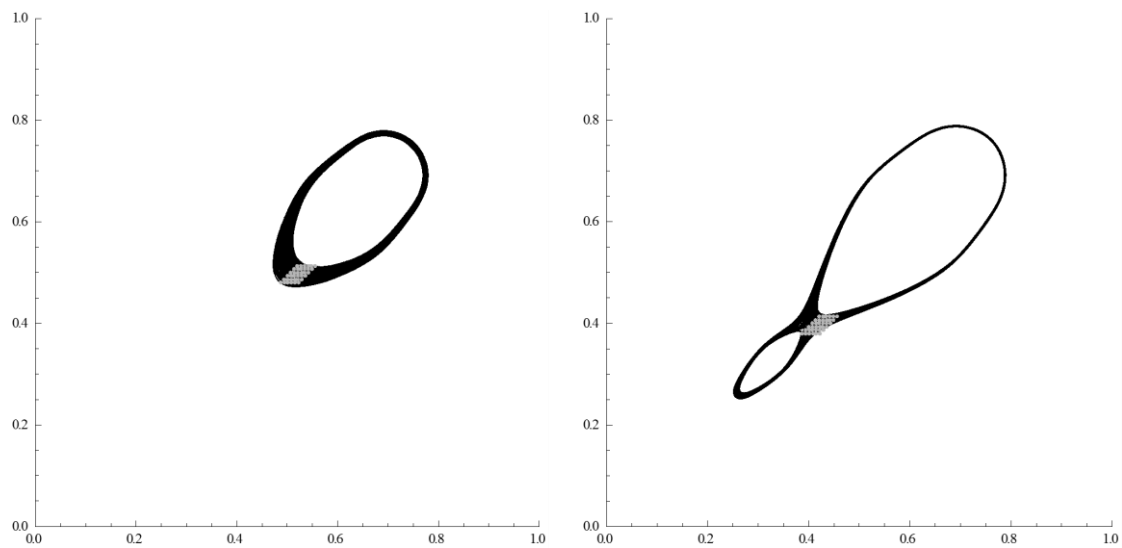


Рис. 12. Эволюция плоского элемента при первом режиме перемешивания

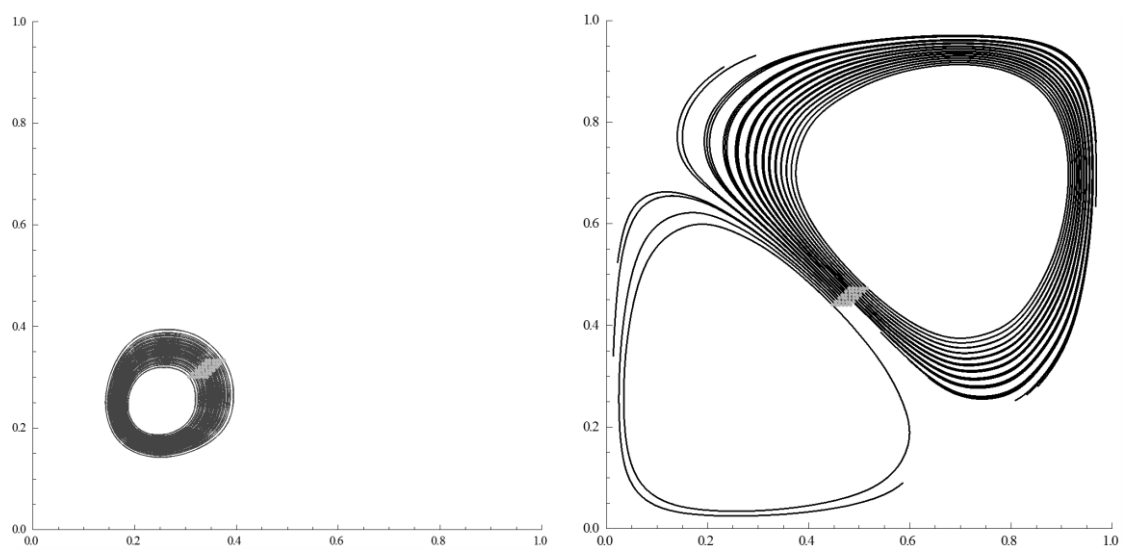
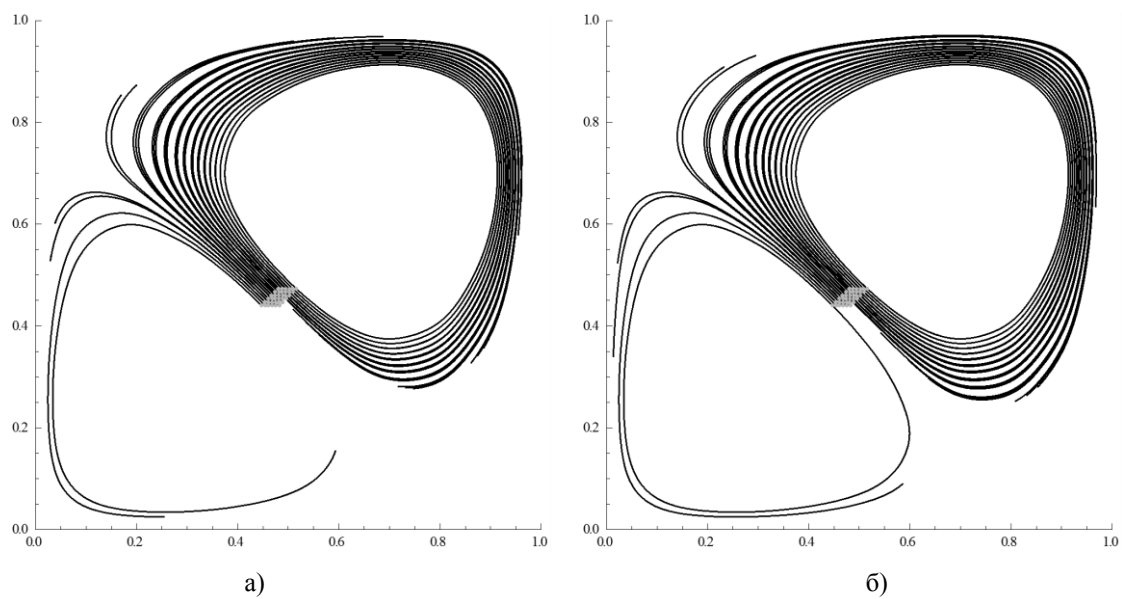


Рис. 13. Эволюция плоского элемента при втором режиме перемешивания

Рис. 14. Эволюция плоского элемента при третьем режиме перемешивания для  $t = \frac{3\pi}{2}$  (а) и  $t = 2\pi$  (б)

## ВЫВОДЫ

В работе предложен метод численного анализа перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей. Метод основан на использовании структурного метода  $R$ -функций с аппроксимацией неопределенной компоненты структуры методом Галёркина. Благодаря использованию метода  $R$ -функций, приближенное выражение для функции тока получается в аналитическом виде, что выделяет предложенный метод среди остальных методов решения начально-краевых задач. Ещё одним преимуществом предложенного метода является то, что решение может быть получено для достаточно сложной области, что делает его универсальным. Решение второй части задачи перемешивания позволяет моделировать процесс перемешивания, анализировать его эффективность, основываясь на изучении поведения отдельных частиц. Также были рассмотрены три режима перемешивания, проведен их численный анализ и сделан вывод об эффективности каждого из них. Этим и определяется научная новизна и практическая значимость работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Б. Р. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 5. — С. 3-45.
2. Андриевский Б. Р. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 4. — С. 3-34.
3. Арэф Х. Развитие хаотической адвекции / Х. Арэф // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2. — № 1. — С. 111-133.
4. Артюх А. В. Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода  $R$ -функций / А. В. Артюх, Н. В. Гибкина, М. В. Сидоров // АСУ и приборы автоматики. — 2008. — Вып. 143. — С. 67-73.
5. Гибкина Н. В. Численный анализ процессов перемешивания методом  $R$ -функций / Н. В. Гибкина, Н. С. Роговой, М. В. Сидоров, А. В. Стадникова // Радиоэлектроника и информатика. — 2012. — № 3 (58). — С. 28-34.
6. Гибкина Н. В. Численный анализ перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей, методами  $R$ -функций и Галёркина / Н. В. Гибкина, Н. С. Роговой, А. В. Стадникова // Материалы XI международной научной студенческой конференции «Математические методы в механике, экономике, экологии» (Севастополь, СевНТУ, 15-19 апреля 2013). — С. 10-13.
7. Дунаева Т. А. Перемешивание вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса / Т. А. Дунаева, А. А. Гуржий, В. В. Мелешко // Прикладна гідромеханіка. — 2001. — Т. 3 (75). — № 2. — С. 15-24.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Дрофа, 2003. — 840 с.
9. Мелешко В. В. Смешивание вязких жидкостей / В. В. Мелешко, Т. С. Краснопольская // Нелинейная динамика. — 2005. — Т. 1. — № 1. — С. 69-109.
10. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1966. — 432 с.
11. Оттино Дж. М. Перемешивание жидкостей / Дж. М. Оттино // В мире науки. — 1989. — № 3. — С. 34-44.
12. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. — К. : Наук. думка, 1982. — 552 с.
13. Роговой Н. С. Математическое моделирование перемешивания, вызванного системой точечных вихрей / Н. С. Роговой, А. В. Стадникова // Научные труды Международной молодежной научной конференции «XXXIX Гагаринские чтения» в 9 томах (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 9-13 апреля 2013). — Т. 5. — С. 98-99.
14. Роговий Н. С. Застосування методів  $R$ -функцій та Гальоркіна до чисельного аналізу перемішування в'язкої рідини, викликаного системою точкових вихорів / Н. С. Роговий, Г. В. Стаднікова // Тези доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської (Одинадцятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2013» (Львів, ЛНУ ім. І.Франка, 11-12 квітня 2013). — С. 96-97.
15. Роговой Н. С. Численный анализ стационарного перемешивания, вызванного системой точечных вихрей / Н. С. Роговой // Материалы XVII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 22-24 апреля 2013). — Т. 7. — С. 158-159.