УДК 517.95 : 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Полковниченко Е. Ю., студент, Сидоров М. В., канд. физ.-мат. наук, доцент,
*Шульгина С. С., старший преподаватель

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
просп. Ленина, 14, Харьков, 61166, Украина
**Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова,*
ул. Революции, 12, Харьков, 61002, Украина

eoxa77@gmail.com, mac_sim@list.ru, shelkunchik@gmail.com

Рассматривается задача математического моделирования и численного анализа течений вязкой несжимаемой жидкости в области, граница которой изменяется с течением времени. Математической моделью служит начально-краевая задача для функции тока в двусвязной области. Для её решения предлагается использовать принцип суперпозиции и структурный метод *R*-функций с аппроксимацией неопределенной компоненты структуры методом Галёркина. Вычислительный эксперимент проведен для случая единичного квадрата с расположенным в нем вращающимся с постоянной угловой скоростью пропеллером. Построены поля скоростей течения в различные моменты времени.
Ключевые слова: нестационарное течение вязкой жидкости, область с подвижной границей, функция тока, метод R-функций, метод Галёркина.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТЕЧІЙ В’ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ В ОБЛАСТЯХ З РУХОМОЮ МЕЖЕЮ

Полковниченко Є. Ю., студент, Сидоров М. В., канд. фіз.-мат. наук, доцент
*Шульгіна С. С., старший викладач

Харківський національний університет радіоелектроніки,
просп. Леніна, 14, Харків, 61166, Україна
**Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова,*
вул. Революції, 12, Харків, 61002, Україна

eoxa77@gmail.com, mac_sim@list.ru, shelkunchik@gmail.com

Розглянуто задачу математичного моделювання і чисельного аналізу течій в’язкої нестисливої рідини в області, межа якої змінює з часом свою форму. Математичною моделлю є початково-крайова задача для функції течії у двозв’язній області. Для її розв’язання запропоновано використати принцип суперпозиції і структурний метод *R*-функцій з апроксимацією невизначеної компоненти структури методом Гальоркіна. Обчислювальний експеримент проведено для випадку одиничного квадрата із розташованим у ньому пропелером, який обертається зі сталою кутовою швидкістю. Побудовано поля швидкостей течії в різні моменти часу.
Ключові слова: нестаціонарна течія в’язкої рідини, область з рухомою межею, функція течії, метод R-функцій, метод Гальоркіна.

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOWS IN DOMAINS WITH MOVABLE BOUNDARY

Polkovnychenko Ye. Yu., student, Sidorov M. V., Ph.D. in Physics and Maths, associate professor,
*Shulgina S. S., assistant professor

Kharkov National University of Radioelectronics,
Lenin boulevard, 14, Kharkiv, 61166, Ukraine
Kharkiv National University Municipal Economy named after A.M. Beketov,
Revolutions str., 12, Kharkiv, 61002, Ukraine

eoxa77@gmail.com, mac_sim@list.ru, shelkunchik@gmail.com

The problem of mathematical modeling and numerical analysis of viscous incompressible fluid flows often occurs when analyzing real flows in science and technology. Thus, there is a necessity to study the flows in which a nonstationarity manifests not only in depending on time of the flow characteristics but also in dependence on time of area, in which the flow is considered. An example of such flow may serve the interfusion of the mixture in a mixer with moving blades.

This paper considers the problem of mathematical modeling and numerical analysis of viscous incompressible fluid in a region, whose boundary changes over time. The mathematical model is the initial boundary value problem for the stream function in a doubly connected domain. The feature of the problem is in the fact that the boundary conditions contain an unknown beforehand function of a time – the value of the stream function at the inner boundary. To determine this function is proposed to use the integral relation, which provides the uniqueness of the pressure in the doubly connected domain. This condition consists in zeroing taken along the inner boundary curvilinear integral of the normal derivative of the velocity vorticity. To solve this problem, the principle of superposition and structural *R*-functions method with approximation of uncertain structural components by the Galerkin method is proposed to use. Using the principle of superposition the initial boundary value problem is reduced to the solution of two initial boundary value problems, in the statement of which the unknown quantities are not included. For each of these two initial-boundary value problems a complete solution structure – the functions bundle, which exactly satisfies all the boundary conditions and includes the undefined functions – was constructed by the *R*-functions method. The undefined components of the structure are proposed to approximate by the Galerkin method for time-dependent problems. In this case, the approximation is sought as a linear combination of the coordinate functions. The coefficients of this linear combination are the time-dependent functions, which are found from the condition of orthogonality to the first n coordinate functions of the residual, obtained by substituting the approximate solution to the equation and the initial condition. This yields the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. To solve the Cauchy problem are encouraged to use the Runge-Kutta-Merson method. The computational experiment has been conducted for the case of the unit square with disposed therein propeller, rotating with constant angular velocity. It is assumed that the boundaries of the region are impermeable solid walls, the outer boundary is immovable and the flow in the region develops from a state of rest and is caused by the rotation of the propeller with a constant angular velocity. For numerical integration the Gauss formula with 32 nodes for each variable was used, and coordinate functions were constructed using the Legendre polynomials. The flow velocity fields at different times were constructed. It is noticed that the reverse flow zones formed in the deepenings between the blades. By using the *R*-functions method the geometry of the area at any one time was able to take into account accurately. Moreover, the use of the Galerkin method for approximating the indefinite components of structural formulas led to the fact that the approximate solution was obtained in an analytical form, which facilitates its further use for finding the velocity field, pressure and other flow characteristics.

Key words: nonstationary viscous fluid flow, domain with movable boundary, stream function, Galerkin's method, the R-function method.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема математического моделирования и численного анализа течений вязкой несжимаемой жидкости часто возникает при анализе реальных течений в науке и технике. Исследования в этой области стимулируются потребностями авиации, кораблестроения, теплоэнергетики, геофизики, биологии и пр. За последние десятилетия сфера исследования и применения явлений, связанных с движением жидкости, постоянно расширяется и охватывает ведущие направления промышленности (химические технологии, нефте- и газоразработка, металлургия и т.д.) и ряд естественных наук (биология, физика атмосферы и океана и др.). При этом возникает необходимость исследовать течения, в которых нестационарность проявляется не только в зависимости от времени характеристик потока, но и в зависимости от времени области, в которой рассматривается течение. Примером такого течения может служить перемешивание смеси в миксере с движущимися лопастями.

Существует множество численных методов, применяемых при расчете вязких течений [1-3 и др.]. В основном эти численные методы используют метод конечных разностей и метод конечных элементов. Эти методы просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых.

Точно учесть геометрическую информацию, входящую в постановку задачи, можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории *R*-функций, предложенным акад. НАН Украины В.Л. Рвачевым [4] и разрабатываемым в настоящее время его учениками. Задачи гидродинамики рассматривались в работах С.В. Колосовой, К.В. Максименко-Шейко, И.Г. Суворовой, Т.И. Шейко, М.В. Сидорова, А.В. Артюха и др. [5-12]. Ими были рассмотрены течения идеальной жидкости, вязкой для случаев, когда можно построить решение за счет удачного выбора координат (осесимметрические течения, течения, обладающие винтовой симметрией, и т.п.), вязкой в областях, граница которой не изменяется с течением времени.

Однако вязкие течения в областях с подвижной (меняющей со временем форму) границей с помощью метода *R*-функций не изучались. Таким образом, разработка новых методов математического моделирования и численного анализа течений вязкой жидкости этого класса на основе метода *R*-функций является актуальной научной проблемой.

Целью настоящей работы является разработка новых методов математического моделирования и численного анализа нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в многосвязных областях с подвижной (меняющей со временем форму) границей методами *R*-функций и Галёркина.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [13] для стационарных задач. Предварительные результаты работы были доложены на трёх международных научных конференциях [14-16].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области $\Omega(t)$, форма которой меняется с течением времени t. Пусть область $\Omega(t)$ является двусвязной и ее граница $\partial\Omega(t)$ состоит из внешнего контура $\partial\Omega_0$, который будем считать неизменным во времени, и внутреннего контура $\partial\Omega_1(t)$, форма которого с течением времени может меняться. Для примера рассмотрим прямоугольную область с «пропеллером», вид которой в момент времени $t=0$ приведен на рис. 1. Будем считать, что границы области являются непроницаемыми твердыми стенками, внешняя граница неподвижна, а течение в $\Omega(t)$ развивается из состояния покоя и вызвано вращением «пропеллера» с постоянной угловой скоростью w. Требуется определить поле скоростей (v_x, v_y) течения в области $\Omega(t)$.

Пусть рассматриваемое течение относится к ползущим, так что нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье-Стокса гидродинамики вязкой жидкости можно пренебречь (это т.н. приближение Стокса) [17]. Математическое моделирование плоских течений удобно проводить с помощью функции тока $\psi(x, y, t)$, вводимой соотношениями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

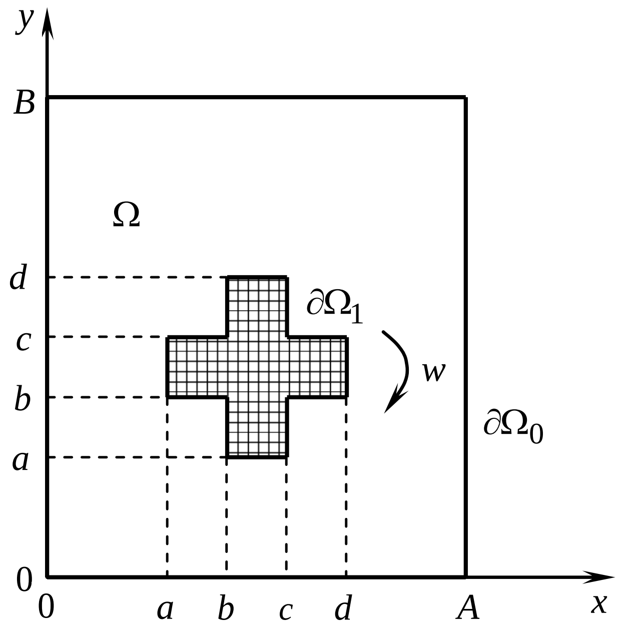

Рис. 1. Вид области $\Omega(t)\big|_{t=0}$

Для функции тока $\psi(x,y,t)$ можно поставить следующую начально-краевую задачу:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi=0 \quad \forall (x,y)\in\Omega(t), \quad t>0, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{t=0}=0, \tag{2}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_1(t)}=c(t), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)}=-w, \tag{4}$$

где $\mathbf{Re}$ – число Рейнольдса, $c(t)$ – некоторая неизвестная функция от t, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе области $\Omega(t)$, Δ^2 – бигармонический оператор, $\Delta^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Функцию $c(t)$ нужно найти из условия однозначности давления в многосвязной области, которое имеет вид [13]

$$\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\mathbf{n}}ds=0, \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Обозначим $\partial\Omega(t)=\partial\Omega_0\bigcup\partial\Omega_1(t)$.

2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для решения задачи (1)-(5) воспользуемся методом *R*-функций [2].

В соответствии с принципом суперпозиции [13] решение задачи (1)-(5) представим в виде суммы

$$\psi(x,y,t)=\psi_0(x,y,t)+c(t)\cdot\psi_1(x,y,t), \tag{6}$$

где $\psi_0(x,y,t)$ – решение задачи

$$-\frac{\partial \Delta\psi_0}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi_0=0 \quad \forall (x,y)\in\Omega(t), \ t>0, \tag{7}$$

$$\psi_0\big|_{t=0}=0, \tag{8}$$

$$\psi_0\big|_{\partial\Omega(t)}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1(t)}=-w, \tag{9}$$

а $\psi_1(x,y,t)$ – решение задачи

$$-\frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\psi_1=0 \quad \forall (x,y)\in\Omega(t), \quad t>0, \tag{10}$$

$$\psi_1\big|_{t=0}=0, \tag{11}$$

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_0}=0, \quad \psi_1\big|_{\partial\Omega_1(t)}=1, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega(t)}=0. \tag{12}$$

Тогда, подставив (6) в (5), получим, что

$$c(t) = -\frac{\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi_0}{\partial \mathbf{n}} ds}{\oint\limits_{\partial\Omega_1(t)} \frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial \mathbf{n}} ds}.$$

Известно [18], что для задачи Стокса

$$\Delta^2\psi = F \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \tag{13}$$

структура решения (пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям (13)) имеет вид

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi, \tag{14}$$

где $f = \mathrm{EC}\,\tilde{f}$, $g = \mathrm{EC}\,\tilde{g}$ – продолжения функций $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ в Ω, оператор D_1 определяется равенством

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y},$$

Φ – неопределенная компонента структуры, а функция $\omega(x, y)$ обладает свойствами

а) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$;

б) $\omega > 0$ в Ω;

в) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Функция $\omega(x, y)$ с указанными свойствами может быть построена с помощью *R*-функций для достаточно широкого класса областей [4].

Пусть функции $\omega = \omega(x, y, t)$, $\omega_0 = \omega_0(x, y)$, $\omega_1 = \omega_1(x, y, t)$, построенные с помощью метода *R*-функций [4], таковы, что удовлетворяют условиям

$$\text{при любом } t \ge 0 \quad \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega(t); \quad \omega > 0 \text{ в } \Omega(t); \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega(t),$$

$$\omega_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_0; \quad \omega_0 > 0 \text{ в } \Omega(t) \cup \partial\Omega_1(t); \quad \frac{\partial\omega_0}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_0,$$

$$\text{при любом } t \ge 0 \quad \omega_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1(t); \quad \omega_1 > 0 \text{ в } \Omega(t) \cup \partial\Omega_0; \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} = -1 \text{ на } \partial\Omega_1(t).$$

Для рассматриваемой области $\Omega(t)$ (рис. 1) функции ω, ω_0, ω_1 имеют вид:

$$\omega(x, y, t) = [\omega_0(x, y)] \wedge_0 [-\omega_1(x, y, t)],$$

$$\omega_0(x, y) = \left[\frac{1}{A}x(A - x)\right] \wedge_0 \left[\frac{1}{B}y(B - y)\right],$$

$$\omega_1(x, y, t) = [\sigma_1(x', y')] \vee_0 [\sigma_2(x', y')],$$

где

$$\sigma_1(x',y') = \left[\frac{1}{c-b}(c-x')(x'-b)\right] \wedge_0 \left[\frac{1}{d-a}(d-y')(y'-a)\right],$$

$$\sigma_2(x',y') = \left[\frac{1}{d-a}(d-x')(x'-a)\right] \wedge_0 \left[\frac{1}{c-b}(c-y')(y'-b)\right],$$

$$x' = \left(x - \frac{b+c}{2}\right)\cos wt - \left(y - \frac{b+c}{2}\right)\sin wt + \frac{b+c}{2},$$

$$y' = \left(x - \frac{b+c}{2}\right)\sin wt + \left(y - \frac{b+c}{2}\right)\cos wt + \frac{b+c}{2},$$

$\wedge_0$ – знак R-конъюнкции, $u \wedge_0 v = u + v - \sqrt{u^2+v^2}$,

$\vee_0$ – знак R-дизъюнкции, $u \vee_0 v = u + v + \sqrt{u^2+v^2}$.

Используя формулу «склейки» [4], для задач (7)-(9) и (10)-(12) получим

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}, \quad g_0 = \frac{-w\omega_0}{\omega_0+\omega_1}, \quad g_1 = 0.$$

Значит, по формуле (14) получим следующие структуры решения начально-краевых задач (7)-(9) и (10)-(12):

$$\psi_0 = \frac{w\omega\omega_0}{\omega_0+\omega_1} + \omega^2\Phi_0, \qquad (15)$$

$$\psi_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1} - \omega D_1\left(\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}\right) + \omega^2\Phi_1, \qquad (16)$$

где Φ_0, Φ_1 – неопределенные компоненты структур.

Итак, функция ψ_0 вида (15) при любом выборе неопределенной компоненты Φ_0 точно удовлетворяет краевым условиям (9), а функция ψ_1 вида (16) при любом выборе неопределенной компоненты Φ_1 точно удовлетворяет краевым условиям (12).

Для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах (15), (16) воспользуемся методом Галёркина для нестационарных задач [19].

В задачах (7)-(9) и (10)-(12) сделаем соответственно замены

$$\psi_0 = \varphi_0 + u_0, \quad \psi_1 = \varphi_1 + u_1,$$

где $\varphi_0 = \dfrac{w\omega\omega_0}{\omega_0+\omega_1}$, $\varphi_1 = \dfrac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1} - \omega D_1\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}\right)$, u_0, u_1 – новые неизвестные функции.

Тогда для функций $u_i(x,y,t)$, $i = 0,1$ получим начально-краевые задачи с однородными краевыми условиями

$$-\frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2 u_i = F_i \quad \forall (x,y) \in \Omega(t),\ t > 0, \qquad (17)$$

$$u_i\big|_{t=0} = -\varphi_i\big|_{t=0} \qquad (18)$$

$$u_i\big|_{\partial\Omega(t)}=0\,,\ \ \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega(t)}=0\,, \tag{19}$$

где обозначено $F_i=\dfrac{\partial\Delta\varphi_i}{\partial t}-\dfrac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2\varphi_i$, $i=0,1$.

В соответствие с методом Галеркина для нестационарных задач решение задач (17)-(19) ищем в виде

$$u_{i,n}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(t)\varphi_k(x,y,t)\,, \tag{20}$$

где $c_{i,k}(t)$ – неизвестные функции, $k=1,2,...,n$, $\varphi_k(x,\,y,\,t)=\omega^2(x,\,y,\,t)\tau_k(x,\,y)$ – координатные функции, $\tau_k(x,\,y)$, $k=1,2,...$, – любая полная в $L_2(\Omega(0))$ система функций, $i=0,1$.

Функции $c_{i,1}(t),\,...,\,c_{i,n}(t)$, $i=0,1$ найдем из условия ортогональности невязок

$$R_{i,n}(x,y,t)=-\frac{\partial\Delta u_{i,n}}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\Delta^2u_{i,n}-F_i=-\sum_{k=1}^{n}\dot c_{i,k}(t)\Delta\varphi_k-\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(t)\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(t)\Delta^2\varphi_k-F_i\,,$$

полученных подстановкой (20) в (17), первым n координатным функциям $\varphi_1,\,...,\,\varphi_n$.

Это приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\sum_{k=1}^{n}\dot c_{i,k}(t)(\Delta\varphi_k,\,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}-\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(t)\left(\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t},\,\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}+ \tag{21}$$

$$+\frac{1}{\mathbf{Re}}\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(t)(\Delta^2\varphi_k,\,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=(F_i,\,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},\ \ j=1,2,...,n,\ i=0,1.$$

Применяя первую и вторую формулу Грина [20] и учитывая краевые условия (19), скалярные произведения в (21) можно привести к виду:

$$(\Delta\varphi_k,\,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=\iint\limits_{\Omega(t)}\Delta\varphi_k\cdot\varphi_j dxdy=-\iint\limits_{\Omega(t)}\nabla\varphi_k\nabla\varphi_j dxdy=-(\nabla\varphi_k,\nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}\,,$$

$$\left(\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t},\,\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}=\iint\limits_{\Omega(t)}\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t}\varphi_j dxdy=-\iint\limits_{\Omega(t)}\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\nabla\varphi_j dxdy=-\left(\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t},\,\nabla\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}\,,$$

$$(\Delta^2\varphi_k,\,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=\iint\limits_{\Omega(t)}\Delta^2\varphi_k\varphi_j dxdy=\iint\limits_{\Omega(t)}\Delta\varphi_k\Delta\varphi_j dxdy=(\Delta\varphi_k,\,\Delta\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$(F_i,\,\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}=\iint\limits_{\Omega(t)}F_i\varphi_j dxdy=\iint\limits_{\Omega(t)}\frac{\partial\Delta\varphi_i}{\partial t}\varphi_j dxdy-\frac{1}{\mathbf{Re}}\iint\limits_{\Omega(t)}\Delta^2\varphi_i\varphi_j dxdy=$$

$$=-\iint\limits_{\Omega(t)}\nabla\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\nabla\varphi_j dxdy-\frac{1}{\mathbf{Re}}\iint\limits_{\Omega(t)}\Delta\varphi_i\Delta\varphi_j dxdy=-\left(\nabla\frac{\partial\varphi_i}{\partial t},\,\nabla\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}-\frac{1}{\mathbf{Re}}(\Delta\varphi_i,\,\Delta\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},\ i=0,1.$$

Тогда системы (21) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n}\dot c_{i,k}(t)(\nabla\varphi_k,\,\nabla\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}+\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(t)\left[\left(\nabla\frac{\partial\varphi_k}{\partial t},\,\nabla\varphi_j\right)_{L_2(\Omega(t))}+\frac{1}{\mathbf{Re}}(\Delta\varphi_k,\,\Delta\varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}\right]=$$

$$= -\left(\nabla \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \nabla \varphi_j \right)_{L_2(\Omega(t))} - \frac{1}{\mathbf{Re}} (\Delta \varphi_i, \Delta \varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}, \; j = 1, 2, ..., n, \; i = 0, 1. \qquad (22)$$

Введем в рассмотрение матрицы $\mathrm{A}(t) = [\alpha_{jk}(t)]_{j,\, k=\overline{1,\, n}}$, $\mathrm{B}(t) = [\beta_{jk}(t)]_{j,\, k=\overline{1,\, n}}$ и векторы $\mathbf{f}_i(t) = [f_{i,\, j}(t)]_{j=\overline{1,\, n}}$, $\mathbf{c}_i(t) = [c_{i,\, k}(t)]_{k=\overline{1,\, n}}$, $i = 0, 1$, где

$$\alpha_{jk}(t) = (\nabla \varphi_k, \nabla \varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}, \quad \beta_{jk}(t) = \left(\nabla \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \nabla \varphi_j \right)_{L_2(\Omega(t))} + \frac{1}{\mathbf{Re}} (\Delta \varphi_k, \Delta \varphi_j)_{L_2(\Omega(t))},$$

$$f_{i,\, j}(t) = -\left(\nabla \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \nabla \varphi_j \right)_{L_2(\Omega(t))} - \frac{1}{\mathbf{Re}} (\Delta \varphi_i, \Delta \varphi_j)_{L_2(\Omega(t))}, \; k, \; j = 1, 2, ..., n, \; i = 0, 1.$$

Тогда системы обыкновенных дифференциальных уравнений (22) в матричном виде запишутся так:

$$\mathrm{A}(t)\dot{\mathbf{c}}_i(t) + \mathrm{B}(t)\mathbf{c}_i(t) = \mathbf{f}_i(t), \; i = 0, 1. \qquad (23)$$

Начальные условия $c_{i,\, k}(0) = c_{i,\, k}^0$, $k = 1, 2, ..., n$, для систем (23) получим из условия ортогональности невязок

$$r_{i,\, n}(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_{i,\, k}(0)\, \varphi_k\big|_{t=0} + \varphi_i\big|_{t=0}, \; i = 0, 1,$$

полученной подстановкой (20) в (18), первым n координатным функциям $\varphi_1, ..., \varphi_n$, вычисленным при $t = 0$.

Это приводит к системам линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_{i,\, k}(0)(\varphi_k\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))} = -(\varphi_i\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))}, \; j = 1, 2, ..., n, \; i = 0, 1. \qquad (24)$$

Введем в рассмотрение матрицу $\Gamma = [\gamma_{jk}]_{j,\, k=\overline{1,\, n}}$ и векторы $\mathbf{h}_i = [h_{i,\, j}]_{j=\overline{1,\, n}}$, $\mathbf{c}_i^0 = [c_{i,\, k}^0]_{k=\overline{1,\, n}}$, $i = 0, 1$, где $\gamma_{jk} = (\varphi_k\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))}$, $h_{i,\, j} = -(\varphi_i\big|_{t=0}, \varphi_j\big|_{t=0})_{L_2(\Omega(0))}$.

Тогда системы линейных алгебраических уравнений (24) в матричном виде запишутся так

$$\Gamma \mathbf{c}_i^0 = \mathbf{h}_i, \; i = 0, 1. \qquad (25)$$

Итак, для нахождения функций $c_{i,1}(t), ..., c_{i,\, n}(t)$, $i = 0, 1$, из (20) нужно решить задачу Коши (23), (25).

Сходимость приближенных по Галёркину решений к обобщенным решениям соответствующих начально-краевых задач следует из результатов работы [21].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Вычислительный эксперимент был проведен для области $\Omega(t)$, представленной на рис. 1 при $A = 1$, $B = 1$, $a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{3}{7}$, $c = \frac{4}{7}$, $d = \frac{5}{7}$. Скалярные произведения, входящие в системы (22), (24), считались по кубатурной формуле Гаусса с 32 узлами по каждой из переменных, в качестве системы функций $\{\tau_k(x, y), k = 1, 2, 3, ...\}$ была использована система функций

$\left\{ P_q\left(\frac{2x}{A}-1\right)P_r\left(\frac{2y}{A}-1\right),\ q,r=0,1,2,\ldots \right\}$, где $P_k(z)$ – полином Лежандра степени k. Задачи Коши (23), (25) решались численно с точностью 10^{-6} методом Рунге-Кутты-Мерсона [22].

На рис. 2-7 приведены поля скоростей течения в различные моменты времени. Как видно, в углублениях между лопастями образуются зоны возвратного течения.

ВЫВОДЫ

В работе впервые предложен метод математического моделирования и численного анализа течений вязкой несжимаемой жидкости в областях с подвижной (меняющей со временем форму) границей. При этом, благодаря использованию метода R-функций (за счет построения функции $\omega(x,y,t)$), удалось точно учесть геометрию области в каждый момент времени, а использование метода Галеркина для аппроксимации неопределенных компонент структурных формул привело к тому, что приближенное решение задачи получается в аналитической форме, что облегчает его дальнейшее использование при нахождении поля скоростей, давления и других характеристик течения. Этим и определяется научная новизна и практическая значимость работы.

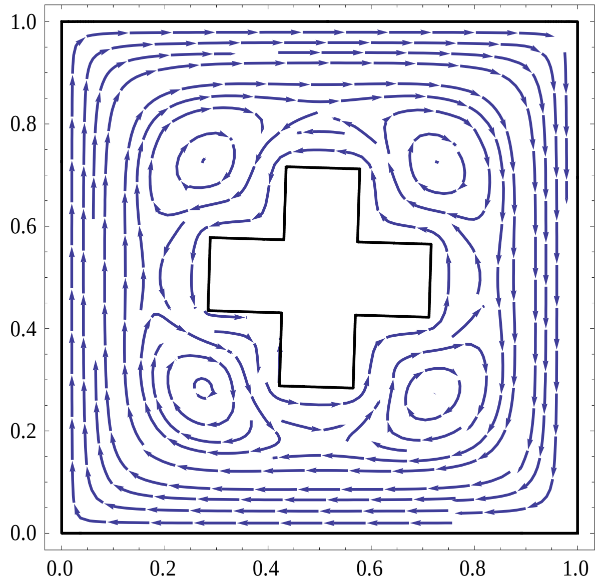

Рис. 2. Поле скоростей при $t=0$

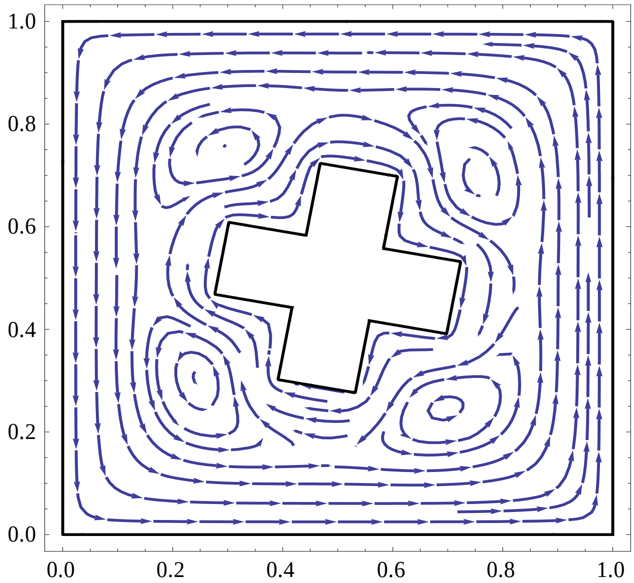

Рис. 3. Поле скоростей при $t=0,05$

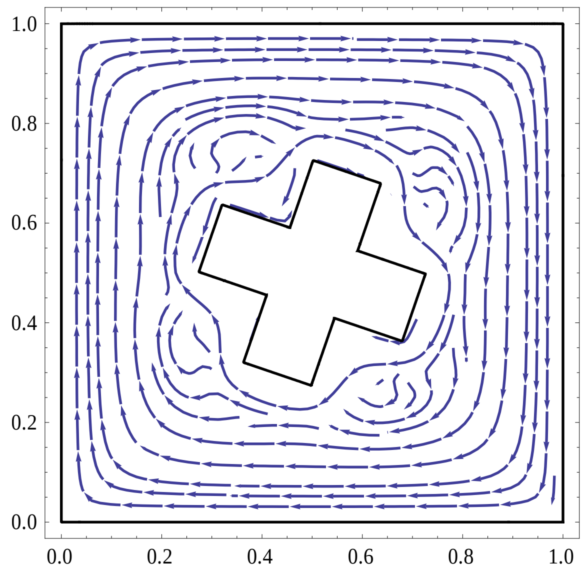

Рис. 4. Поле скоростей при $t=0,1$

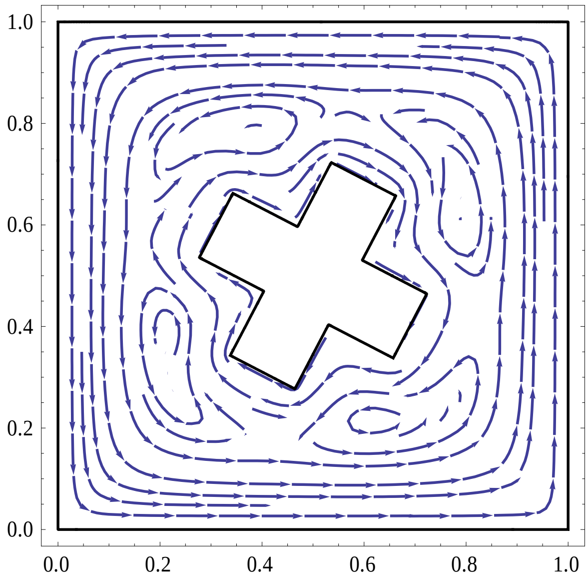

Рис. 5. Поле скоростей при $t=0,15$

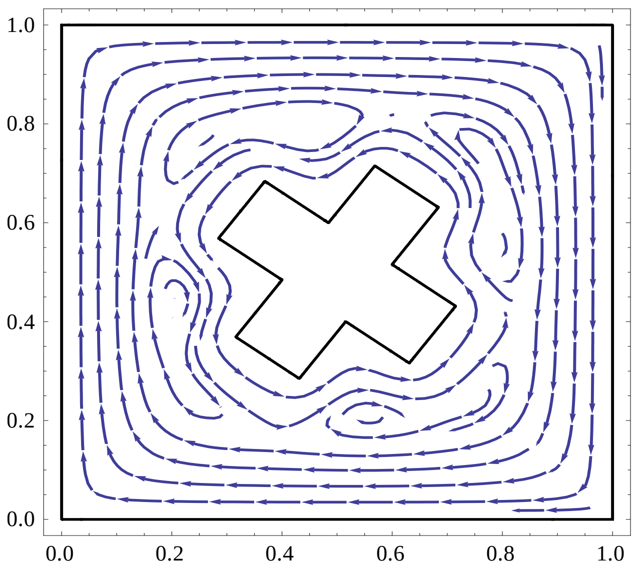

Рис. 6. Поле скоростей при $t = 0,2$

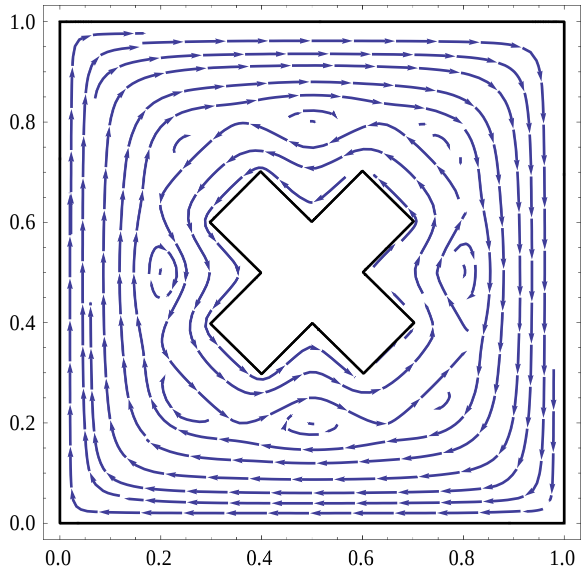

Рис. 7. Поле скоростей при $t = 0,25$

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. — М. : Мир, 1980. — 616 с.
2. Donea J. Finite Element Methods for flow Problems / J. Donea, A. Huerta. — London : Wiley, 2003. — 350 p.
3. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dinamics / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. — Oxford : BH, 2000. — 334 p.
4. Рвачев В. Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. — К. : Наук. думка, 1982. — 552 с.
5. Колосова С. В. Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе / С. В. Колосова // Прикл. мех. — 1971. — №7. — Вып. 10. — С. 100-105.
6. Максименко-Шейко К. В. Исследование течения несжимаемой вязкой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом *R*-функций / К. В. Максименко-Шейко // Проблемы машиностроения. — 2001. — Т. 4, №3-4. — С. 108-116.
7. Суворова И. Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы / И. Г. Суворова // Вестн. НТУ ХПИ. — 2004. — №31. — С. 141-148.
8. Рвачев В. Л. Метод *R*-функций в задаче о течении Гартмана / В. Л. Рвачев, А. Л. Корсунский, Т. И. Шейко // Магнитная гидродинамика. — 1982. — №2. — С. 64-69.
9. Колосова С. В. Применение метода *R*-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости / С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. — 2003. — №602. — С. 61-67.
10. Тевяшев А. Д. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях / А. Д. Тевяшев, Н. В. Гибкина, М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2007. — №2(37). — С. 50-57.
11. Артюх А. В. Исследование нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости (приближение Стокса) методами *R*-функций и Галеркина / А. В. Артюх, М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2011. — №3(54). — С. 16-21.
12. Артюх А. В. Применение методов *R*-функций и Галеркина к расчету плоских нестационарных вязких течений / А. В. Артюх, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького

національного університету. Серія : Фізико-математичні науки. — 2011. — №2. — С. 5-12.

13. Сидоров М. В. Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений / М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2003. — №1(22). — С. 42-44.
14. Шульгина С. С. Математическое моделирование течений вязкой жидкости в областях с подвижной границей / С. С. Шульгина // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Харьков-Херсон, 10-15 июня 2013 г.). — С. 397-400.
15. Полковниченко Е. Ю. Численный анализ течений вязкой жидкости в областях с подвижной границей / Е. Ю. Полковниченко, С. С. Шульгина // Научные труды Международной молодёжной научной конференция «XL Гагаринские чтения» в 9 томах (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 7-11 апреля 2014). — Т. 5. — С. 161-163.
16. Полковниченко Е. Ю. Применение методов *R*-функций и Галеркина для расчета течений вязкой жидкости в областях с подвижной границей / Е. Ю. Полковниченко, С. С. Шульгина // Материалы XVIII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 14-16 апреля 2014). — Т. 7. — С. 140-141.
17. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Дрофа, 2003. – – 840 с.
18. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса / М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2002. — №3(20). — С. 39-42.
19. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1966. — 432 с.
20. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.
21. Вишик М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения / М. И. Вишик // Матем. сб. — 1956. — Т. 39 (81). — №1. — С. 51-148.
22. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. — М. : Мир, 1990. — 512 с.

REFERENCES

1. Roache P.J. (1980), *Vychislitel’naja gidrodinamika* [Computayional Fluid Dynamics], Mir, Moscow, USSR.
2. Donea, J. and Huerta, A. (2003), *Finite Element Methods for Flow Problems*, Wiley, London, United Kingdom.
3. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (2000), *The Finite Element Method, vol. 3: Fluid Dynamics*, BH, Oxford, United Kingdom.
4. Rvacev, V.L. (1982), *Teoria R-funkcyj i nekotorye eye prilozhenia* [Theory of R-functions and its some applications], Naukova dumka, Kiev, USSR.
5. Kolosova, S.V. (1971), “About a non-viscous fluid flow around a cylinder in a tube”, *Prikladnaja mekhanika*, no. 7, vol. 10, pp. 100-105.
6. Maksimenko-Sheiko, K.V. (2001), “Study of the flow of a viscous incompressible fluid in a twisted channel complex profile by R-functions method”, *Problemy mashynostroenija*, vol. 4, no. 3-4, pp. 108-116.

7. Suvorova, I.G. (2004), “Computer modeling axisymmetric fluid flow in the channel of complicate form”, *Vestnik NTU KhPI*, no. 31, pp. 141-148.
8. Rvachev, V.L., Korsunskij, A.L. and Shejko, T.I. (1982) “Method of R-functions in the Hartmann flow problem”, *Magnitnaja Gidrodinamika*, no. 2, pp. 64-69.
9. Kolosova, S.V. and Sidorov M.V. (2003), “Application of the method of R-functions for numerical studies of a 2D viscous flow”, *Visnyk Kharkivs’kogo Universytetu, Serija Matematyka, Prykladna Matematyka, Mekhanika*, vol. 602, no. 53, pp. 61-67.
10. Tevjashev, A.D., Gibkina, N.V. and Sidorov, M.V. (2007), “About one method mathematical modeling of viscous flow in bounded simply connected 2D-domains”, *Radioelektronika i informatika*, no. 2 (37), pp. 50-57.
11. Artjukh, A.V. and Sidorov, M.V. (2011), “Study of unsteady plane-parallel flows of incompressible viscous fluid (Stokes approximation) by R-functions and Galerkin methods”, *Radioelektronika i informatika*, no. 3 (54), pp. 16-21.
12. Artjukh, A.V. and Sidorov, M.V. (2011), “Application of R-functions and Galerkin methods to calculation of plane unsteady viscous flows”, *Visnyk Zaporiz’kogo nacional’nogo universytetu, Ser: fizyko-matematychni nauky*, no. 2, pp. 5-12.
13. Sidorov, M.V. (2003), “Numerical method for multiply viscous flow”, *Radioelektronika i informatika*, no. 1(22), pp. 42-44.
14. Shulgina, S.S. (2013), “Mathematical modeling of viscous flow in domains with a moving boundary”, *Metod diskretnyh osobennostej v zadachah matematicheskoj fiziki. Trudy XVI Mezhdunarodnogo simpoziuma* [XVI International Symposium “Discrete singularities methods in mathematical physics”], Kharkov-Kherson, KhNU, June 10-15, 2013, pp. 397-400.
15. Polkovnichenko, Ye.Yu. and Shulgina, S.S. (2014), “Numerical study of viscous flow in domains with a moving boundary”, *XL Gagarinskie chtenija. Nauchnye trudy mezhdunarodnoj molodezhnoj konferencii* [XL Gagarin’s study], Moscow, “MATI”-RGTU, April 7-11, 2014, pp. 161-163.
16. Polkovnichenko, Ye.Yu. and Shulgina, S.S. (2014), “Application of R-functions and Galerkin methods to calculation of viscous flow in domains with a moving boundary”, *Radioelektronika I molodezh’ v XXI veke. Materialy XVIII mezdunarodnogo molodezhnogo foruma* [The 18th International Youth Forum “Radio electronics and youth in the XXIst century”], Kharkov, KhNURE, April 14-16, 2014, pp. 140-141.
17. Loitsyanskii, L.G. (2003), *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquids and gases], Drofa, Moscow, Russia.
18. Sidorov, M.V. (2002), “About general solution structures for Stokes problem”, *Radioelektronica i informatika*, no. 3 (20), pp. 39-42.
19. Mikhlin, S.G. (1966), *Chislennaja realizacyja variacyonnyh metodov* [The numerical performance of variational methods], Nauka, Moscow, USSR.
20. Mikhlin, S.G. (1970), *Variacyonnye metody v matematicheskoj fizike* [Variational methods in mathematical physics], Nauka, Moscow, USSR.
21. Vishik, M.I. (1956), “The problem of Cauchy with operators as coefficients, the mixed boundary problem for systems of differential equations and an approximate method of their solution”, *Matematicheskij Sbornik*, vol. 39(81), no. 1, pp. 51-148.
22. Hairer, S., Norsett, S.P. and Wanner, G. (1990), *Reshenie obyknovennykh differencyal’nyh uravnenij. Nezhestkie zadachi* [Solving ordinary differential equation I. Nonstiff problems], Mir, Moscow, USSR.