

35. Faas D. Interactive deformation through mesh-free stress analysis in virtual reality // D. Faas, J.M. Vance // Mechanical Engineering Conference Presentations, Papers, And Proceedings. – 2008. – Paper 46.
36. Elmer [Electronic Resource]. – Mode of access : <http://www.csc.fi/english/pages/elmer>. – Title from screen.
37. Hecht F. FreeFem++ [Electronic Resource] // F. Hecht. – Paris. – Mode of access : <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
38. Dhondt. G. CalculiX. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Electronic Resource] // G. Dhondt, K. Wittig. – Mode of access : <http://www.dhondt.de/>. – Title from screen.
39. Zenkevich O.K. Metod konechnyih elementov v tehnikе // O.K. Zenkevich. – M. : Mir, 1975. – 541 p.
40. Kolodyazhnyi V.M. Bessetchnyie metody v zadachah modelirovaniya fizicheskikh protsessov / V.M. Kolodyazhnyi, O.Yu. Lisina // Probl. Mashinostroeniya. – 2010. – T.13, №3. – PP. 67-74.
41. Liu G.R. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method / G.R. Liu. – 2nd ed. – CRC PressTaylor & Francis Group, 2010. – 792 p.
42. Li Sh. Meshfree and particle methods and their applications / Sh. Li, W.K. Liu // Applied Mechanics Reviews. – 2002. – Vol. 55 (1). – PP. 1-34.
43. Makar V. Komp'yuterne modelyuvannya krayovih zadach na osnovi bezsitkovih aproksimatsiy / V. Makar. – Visnik Natsionalnogo universitetu "Lvivska politehnika" "Komp'yuterni nauki ta Informatsiyni tehnologiyi". – №663. – 2010. – PP. 187-198.
44. Fries Th.-P. Classification and Overview of Meshfree Methods. // Th.-P. Fries, H.-G. Matthies. – Technical University Braunschweig, 2004. – 122 p.

УДК 629.78.01

## **КОРЕКЦІЯ СЕРЕДНЬОЇ ВИСОТИ ОРБИТИ СУПУТНИКА ДВИГУНОМ МАЛОЇ ТЯГИ**

Коломієць Н. В., аспірант

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,  
пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

[info@aspirantura.org.ua](mailto:info@aspirantura.org.ua)

Пропонується методика розрахунку програми маневру корекції середньої висоти орбіти супутника, двигуном малої тяги трансверсального напрямку. Побудована математична модель збуреного руху супутника. Розроблений алгоритм знаходження оптимальних характерних точок роботи рушійної установки у випадку мінімальних витрат палива. На основі алгоритму розроблена програма та представлені результати корекції еліптичної та майже колової орбіти. Побудований алгоритм розв'язку крайової задачі корекції середньої висоти орбіти супутника. На основі оптимального, з точки зору витрат палива, двоімпульсного гоманнівського переходу була складена і вирішена крайова задача щодо характерних точок роботи РУ. Запропонована методика може бути використана для прийняття рішення про спосіб маневрування з метою збільшення або підтримання середнього радіусу майже колової орбіти КА з РУ малої тяги, а також для оцінки вимог до РУ низькоорбітальних супутників довготривалої експлуатації.

*Ключові слова:* корекція орбіти, мала тяга, трансверсальний напрям, збурений рух, крайова задача, програма роботи двигуна.

## КОРРЕКЦИЯ СРЕДНЕЙ ВЫСОТЫ ОРБИТЫ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

Коломиец Н. В., аспирант

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,  
пр. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49010, Украина*

info@aspirantura.org.ua

Предлагается методика расчета программы маневра коррекции средней высоты орбиты спутника двигателем малой тяги трансверсального направления. Построена математическая модель возмущенного движения спутника. Разработан алгоритм нахождения оптимальных характерных точек работы двигательной установки в случае минимальных затрат топлива. На основе алгоритма разработана программа и представлены результаты коррекции эллиптической и почти круговой орбиты.

*Ключевые слова: коррекция орбиты, малая тяга, трансверсальное направление, возмущенное движение, краевая задача, программа работы двигателя.*

## CORRECTION OF MEDIUM ALTITUDE THE SATELLITE ORBIT ENGINE LOW TRACTION

Kolomyjec N. V., postgraduate

*Dnipropetrovsk National University, Ukraine,  
Haharina avenue 72, Dnipropetrovsk, 49010, Ukraine*

info@aspirantura.org.ua

By means of using the electric rocket engine of low thrust it is possible to reach the considerable saving of the fuel consumption. It is appropriate to make working out of the new space-based technologies and data collection for processing of the small-size elements of the wide purpose in the conditions of the outer space on the small spacecraft vehicle (SV) in accordance with the economic indicators. Moreover, the application of small spacecraft vehicles will be useful for aircraft space missile systems, over which creation the exploration works have been actively taken recently. The usage of the propulsion system (PS) of low thrust for SV at the considerable increase of the time of active existence of SV allows reducing the weight characteristics of PS and opens the prospective possibility of solution of the tasks of long-distant flights in the space, practically non-accomplished with the help of the chemical rocket engine, as well as qualitatively new possibilities of usage of the powerful electric rocket-propelled PS for the priority tasks and commercialization of the space. The propulsion systems of low thrust are capable to process the hundreds and thousands of hours and many times be switched on and switched off. They allow supporting the flight on the orbit in accordance with the set trajectory, compensating the flight resistance drag that is formed by the aerodynamic forces in the upper layers of the atmosphere and the solar wind.

In connection with the overall usage of miniaturization and nanotechnologies in the area of development of the target groups of satellites and for enhancement of such important parameters as reduction of the weight of SV fuel and increase of the time of staying in the orbit it is appropriate to use the electric rocket and other types of engines with the big substantial thrust.

The main problem of modern cosmonautics is considered as the active manoeuvring on the orbits with the usage of minimal quantity of energetic costs and formation of the system of support for the middle height of the SV orbit during the long-term exploitation, as the basis of which the traditional quasi Hohmann transit between circular orbits was taken.

The development of the mathematical model of the indignant movement of SV is considered. It is necessary to develop the programme of correction of the middle height of the orbit of SV for the low thrust engine of transversal direction. It is acknowledged that SV was affected by the external indignation, non-asymmetry of the gravitational field of the earth and density of the atmosphere. During correction the SV weight changes due to the fuel consumption. The traditional Hohmann two-impulse transit is chosen as a basis.

For the development of the mathematical model of the indignant movement of SV it is necessary to analyze and determine the following analytical expressions: indignation from the non-central gravitational field of the Earth; indignation from the aerodynamic resistance of the atmosphere; dependence on the density of atmosphere from the height; the changeable weight of SV; the work of PS of low thrust; equation of the indignant movement of SV.

The algorithm of finding out the optimal typical points of PS represents the procedure of finding out the optimal typical points for the work of PS of low thrust. It should be noted that at  $t_1=0$ , the signal of correction is sent to the first switching of PS on.

The mathematical model of the indignant movement of SV that takes into account the indignation from the non-central gravitational field of the Earth, indignation from the aerodynamic resistance of the atmosphere, change of the density of atmosphere from the height, change of SV weight and action of PS of low thrust directly in the transversal direction.

The algorithm of solution of the boundary value problem of correction of the middle orbit height of satellite was developed. Based upon the optimal from the view of fuel consumption, two-impulse Hohmann transit the boundary value problem in relation to the relatively typical points of PS work was formed and solved.

The suggested methods can be used for taking decisions about the way of manoeuvring with the aim of increase or support of the middle radius of almost circular orbit of SV with PS of low thrust, as well as for evaluation of the requirements to PS of low-orbital satellites of long-term exploitation.

*Key words: orbit correction, low thrust, in-track direction, perturbed motion, boundary problem, thrust inclusion program.*

## ВСТУП

Як відомо [1-4], шляхом використання електричного ракетного двигуна малої тяги можна досягти значної економії витрат палива. Відпрацювання нових космічних технологій і збір даних опрацювання малогабаритних елементів широкого призначення в умовах космічного простору доцільно за економічними показниками здійснювати на малих космічних апаратах (КА). Крім того, використання малих КА буде корисним для авіаційно-космічних ракетних систем, дослідні роботи над створенням яких активно ведуться в останній час.

Застосування рушійної установки (РУ) малої тяги на КА дозволяє при суттєвому збільшенні часу активного існування КА знизити масові характеристики РУ і відкриває принципову можливість рішення задач тривалих польотів у космосі, практично нездійснених за допомогою хімічних ракетних двигунів, а також якісно нові можливості використання могутніх електрореактивних РУ для маршових задач і комерціалізації космосу. Рухові установки малої тяги здатні працювати сотні і тисячі годин і багаторазово включатися і виключатися. Вони дозволяють підтримувати політ на орбіті за заданою траєкторією, компенсуючи опір польоту, що створюється аеродинамічними силами у верхніх шарах атмосфери та сонячним вітром.

У зв'язку зі всебічним використанням мініатюризації та нанопроводжень, у сфері побудови цільових груп супутників та для поліпшення таких важливих параметрів, як зменшення маси палива КА та збільшення часу перебування на орбіті, доцільно використовувати електричні ракетні та інші типи двигунів з великою питомою тягою.

Виходячи з доцільності використання такого типу двигунів, пропонується розробка алгоритму корекції середньої висоти орбіти супутника з їх використанням. У доступній літературі алгоритм для здійснення корекції середньої орбіти КА не описаний, але в цьому напрямку був створений окремий розділ, який описував рух і залежності характеристик КА з використанням РУ малої тяги, над яким працювали такі вчені, як В.В. Васильєв, М.К. Тихонравов, Г.С. Титов та ін. [1-3, 5].

Актуальність полягає в описі та моделюванні основної проблеми сучасної космонавтики – активного маневрування на орбітах з використанням мінімальної кількості енерговитрат та створенні системи підтримки середньої висоти орбіти КА впродовж тривалого часу експлуатації, за основу якої був взятий класичний квазігоманівський перехід між коловими орбітами.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається побудова математичної моделі збуреного руху КА. Необхідно розробити програму корекції середньої висоти орбіти КА для двигуна малої тяги трансверсального напрямку. Приймається, що на КА діють зовнішні збурювання, несиметричності гравітаційного поля Землі та щільності атмосфери. Впродовж корекції маса КА змінюється за рахунок витрат палива. За основу маневру обраний класичний гоманівський двоімпульсний перехід.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Для побудови математичної моделі збуреного руху КА потрібно проаналізувати і визначити такі аналітичні вирази:

- збурень від нецентрального гравітаційного поля Землі;
- збурень від аеродинамічного опору атмосфери;

- залежності щільності атмосфери від висоти;
- змінної маси КА;
- роботи РУ малої тяги;
- рівняння збуреного руху КА.

Значення, які приймає щільність атмосфери, на декілька порядків відрізняються від відповідних значень висоти орбіти і від точності розрахунку. Враховуючи це, неможливо скористатись більш швидким і зручним методом лінеаризації. З існуючих методів побудови функції залежності від аргументу, які задані таблично, найбільш вірогідно справляється метод сплайн-інтерполяції, бо він не потребує значного часу обробки даних за рахунок використання матрично-функціональних елементів, матриці квадратичних коефіцієнтів.

Оскільки параметри орбіти КА з РУ малої тяги змінюються повільно, використовується система диференціальних рівнянь в оскулюючих елементах [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Omega}{dt} = W \cdot \frac{r \cdot \sin(u)}{\sqrt{\mu p} \cdot \sin(i)}; \\ \frac{di}{dt} = W \cdot \frac{r \cdot \cos(u)}{\sqrt{\mu p}}; \\ \frac{dp}{dt} = 2r \cdot T \cdot \sqrt{p/\mu}; \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[ -S \cos(u) + T \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin(u) + \frac{r}{p} \cdot (T\lambda_1 - W\lambda_2 \operatorname{ctg}(i) \sin(u)) \right]; \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[ S \sin(u) + T \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos(u) + \frac{r}{p} \cdot (T\lambda_2 + W\lambda_1 \operatorname{ctg}(i) \sin(u)) \right]; \\ \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - W \cdot \frac{r \sin(u) \operatorname{ctg}(i)}{\sqrt{\mu p}}; \\ \frac{dm}{dt} = \frac{n \cdot m}{I_s} \cdot j; \\ \frac{dj}{dt} = 0; \\ \lambda_1 = e \cdot \sin(\omega); \\ \lambda_2 = e \cdot \cos(\omega); \\ e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}; \\ \omega = \begin{cases} \omega' = \operatorname{arctg}(\lambda_1/\lambda_2), & \lambda_2 \geq 0; \\ \omega' + \pi, & \lambda_2 < 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $\Omega$  – довгота висхідного вузла,  $i$  – нахилення орбіти,  $r$  – радіус-вектор положення КА,  $u$  – аргумент широти,  $p$  – фокальний параметр,  $\mu$  – гравітаційна стала,  $m$  – поточна маса КА,  $e$  – ексцентриситет,  $\omega$  – аргумент перицентра,  $j$  – логічний прапор включення РУ,  $S$ ,  $T$ ,  $W$  – проекції характерних прискорень на радіальний, трансверсальний та бінормальний напрями.

З погляду витрат до палива на борту КА оптимальним вважається так званий гоманівський двохімпульсний перехід між двома круговими орбітами, згідно з яким КА надається два імпульси приросту швидкості  $\Delta V_1$  та  $\Delta V_2$ . Через застосування коректуючого двигуна малої тяги імпульси приросту швидкості  $\Delta V_1$  та  $\Delta V_2$  створюються за кінцевий час, який залежно від тягоозброєності може досягати 80% періоду обертання.

Коли різниця радіусів орбіт до переходу і після переходу не перевищує декількох процентів від радіуса початкової орбіти:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{(r_0 - \Delta r_m)^3}} \cdot \Delta r_m;$$

де  $r_0$  – радіус початкової орбіти,  $\Delta r_m$  – величина відхилення фактичної висоти орбіти від заданої.

У випадку використання РУ малої тяги, імпульсний підхід до розв'язку задачі корекції висоти кругової орбіти стає не придатним, але ідея гоманівського переходу залишається тому, що для його виконання використовуються дві активні дільниці, в інтервалах часу  $t_1 \dots t_2$  та  $t_3 \dots t_4$ .

Крайова задача полягає в тому, щоб визначити розташування активних дільниць траєкторії КА. Початок першої активної дільниці має місце коли радіус орбіти починає виходити за нижню межу  $r_1 = r_0 - r_m$  і дана команда на включення РУ, кінець другої активної дільниці обумовлений досяганням верхньої межі  $r_2$ . Інші моменти включення та виключення РУ визначаються шляхом розв'язку крайової задачі.

Умови на лівому кінці:

$$r(t_1) = r_1; \quad V(t_1) = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}.$$

Умови на правому кінці:

$$r(t_4) = r_2; \quad V(t_4) = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}; \quad r_2 - r_1 \leq \Delta r_m.$$

Цим умовам повинен відповідати розв'язок системи диференціальних рівнянь збуреного руху КА (1).

Крайова задача розв'язується ітераційним шляхом, у якому за початкові умови слід визначити перші наближення  $t_{20}$ ,  $t_{30}$ ,  $t_{40}$ . Запишемо вирази для  $\Delta V_1$  та  $\Delta V_2$  через перші наближення:

$$\Delta V_1 = \frac{\Delta r_m}{2} \sqrt{\frac{\mu}{(r_1)^3}} = \frac{P}{m_1} \cdot (t_{20} - t_1) \Rightarrow t_{20} = \frac{\Delta V_1 \cdot m_1}{P} + t_1;$$

$$\Delta V_2 = \Delta V_1 = \frac{P}{m_2} \cdot (t_{40} - t_{30}); \quad \Delta t_{340} = t_{40} - t_{30} = \frac{\Delta V_1 \cdot m_2}{P},$$

де  $P$  – сила тяги КА;  $m_1$  – маса КА перед початком першої активної дільниці;  $m_2$  – маса КА перед початком другої активної дільниці.

Шляхом інтегрування диференціальних рівнянь збуреного руху КА на інтервалі першої активної дільниці  $t_1 \dots t_{20}$  знаходяться фокальний параметр  $p$ , ексцентриситет перехідної орбіти  $e$ , величина великої полуосі орбіти  $a_p$ , половина періоду обертання  $T_n$  на перехідній орбіті та маса КА:

$$a_p = \frac{p}{1 - e^2}; \quad T_n = 2\pi \sqrt{\frac{a_p^3}{\mu}}; \quad t_{30} = \frac{t_1 + t_{20}}{2} + \frac{T_n}{2} - \frac{\Delta t_{340}}{2}; \quad t_{40} = t_{30} + \Delta t_{340}.$$

Функції умов на правому кінці  $r(t_4)$  та  $V(t_4)$  розкладаються в ряд Тейлора зі збереженням тільки лінійних доданків:

$$\begin{cases} fr(t_{20}, t_{30}, t_{40}) + \frac{\partial fr}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial fr}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial fr}{\partial t_4} \Delta t_4 = r_2; \\ fVt(t_{20}, t_{30}, t_{40}) + \frac{\partial fVt}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial fVt}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial fVt}{\partial t_4} \Delta t_4 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}; \end{cases} \quad (2)$$

де  $fr(t_{20}, t_{30}, t_{40})$  – значення радіуса орбіти на кінці другої активної ділянки при інтегруванні (2) по початковим наближенням;  $fVt(t_{20}, t_{30}, t_{40})$  – значення тангенціальної складової швидкості КА на кінці другої активної ділянки при інтегруванні (1) по початковим наближенням.

Частинні похідні знаходяться чисельним шляхом багатократного інтегрування диференційних рівнянь, за прикладом:

$$\frac{\partial fr}{\partial t_2} = \frac{fr(t_{20} + \Delta t_2, t_{30}, t_{40}) - fr(t_{20}, t_{30}, t_{40})}{\Delta t_2};$$

$$\frac{\partial fVt}{\partial t_3} = \frac{fVt(t_{20}, t_{30} + \Delta t_3, t_{40}) - fVt(t_{20}, t_{30}, t_{40})}{\Delta t_3}.$$

Оскільки система (2) – це два рівняння з трьома невідомими, то один з невідомих, наприклад,  $\Delta t_3$  визначається наближенням в околі  $t_{30}$ :

$$\Delta t_3 = 0; \pm \frac{\Delta t_{340}}{10}; \pm \frac{\Delta t_{340}}{5} \dots$$

Третє рівняння складається, виходячи з умови рівності нулю радіальної складової швидкості:

$$fVr(t_{20}, t_{30}, t_{40}) + \frac{\partial fVr}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial fVr}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial fVr}{\partial t_4} \Delta t_4 = 0. \quad (3)$$

Система (2) разом із (3) утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими  $\Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4$ . Треба зазначити, що окрім лівих та правих кінців у крайовій задачі треба ввести ще обмеження за вірогідністю:

$$t_1 < t_2 + \Delta t_2 < t_3 + \Delta t_3 < t_4 + \Delta t_4 < T_n. \quad (4)$$

З урахуванням (4) отриману систему диференційних рівнянь треба вираховувати аналітичним способом з максимальним наближенням до крайових умов.

На другому кроці ітерацій:

$$t_2 = t_{20} + \Delta t_2; \quad t_3 = t_{30} + \Delta t_3; \quad t_4 = t_{40} + \Delta t_4. \quad (5)$$

Описаний процес повторюється; на другому і останніх кроках часткові похідні, що входять до системи (2) та (3), і функції  $fr, fVt$  та  $fVr$  модифікуються. Процес ітерацій припиняється, коли умови на правому кінці виконуються із заданою похибкою  $\varepsilon$ .

**Алгоритм знаходження оптимальних характерних точок роботи РУ.** Алгоритм представляє собою процедуру знаходження оптимальних характерних точок для роботи РУ малої тяги. Слід зауважити, що при  $t_1 = 0$ , подається сигнал корекції на перше включення РУ.

За першими наближеними значеннями характерних точок (4) приймається 5% від різниці інтервалу між цією точкою і попередньою за приріст до характерної точки:

$$\Delta t_i = (t_i - t_{i-1}) \cdot 0,05. \quad (6)$$

Система (1) інтегрується чотири рази:

1. Від  $t_1..t_2$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ), потім від  $t_2..t_3$  з виключеною ( $j = 0$ ), і від  $t_3..t_4$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ). У кінці отримуємо доданки  $fr(t_{20}, t_{30}, t_{40}), fVt(t_{20}, t_{30}, t_{40}), fVr(t_{20}, t_{30}, t_{40})$  для системи (2).
2. Від  $t_1..t_2 + \Delta t_2$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ), потім від  $t_2 + \Delta t_2..t_3$  з виключеною ( $j = 0$ ), і від  $t_3..t_4$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ). У кінці отримуємо доданки  $fr(t_{20} + \Delta t_2, t_{30}, t_{40}), fVt(t_{20} + \Delta t_2, t_{30}, t_{40}), fVr(t_{20} + \Delta t_2, t_{30}, t_{40})$  для системи (2).
3. Від  $t_1..t_2$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ), потім від  $t_2..t_3 + \Delta t_3$  з виключеною ( $j = 0$ ), і від  $t_3 + \Delta t_3..t_4$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ). У кінці отримуємо доданки  $fr(t_{20}, t_{30} + \Delta t_3, t_{40}), fVt(t_{20}, t_{30} + \Delta t_3, t_{40}), fVr(t_{20}, t_{30} + \Delta t_3, t_{40})$  для системи (2).
4. Від  $t_1..t_2$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ), потім від  $t_2..t_3$  з виключеною ( $j = 0$ ), і від  $t_3..t_4 + \Delta t_4$  зі включеною РУ ( $j = 1$ ). У кінці отримуємо доданки  $fr(t_{20}, t_{30}, t_{40} + \Delta t_4), fVt(t_{20}, t_{30}, t_{40} + \Delta t_4), fVr(t_{20}, t_{30}, t_{40} + \Delta t_4)$  для системи (2).

Тепер система (2) разом з (3) представляє собою систему алгебраїчних рівнянь, яка в матричному вигляді запишеться як:

$$A \cdot t^* = B, \quad (7)$$

де  $A$  – матриця ( $3 \times 3$ ) частинних похідних при  $t_i^*$ , Якоб'ян;  $t^*$  – вектор-стовбець ( $3 \times 1$ ) невідомих  $t_i^*$ ,  $B$  – вектор-стовбець ( $3 \times 1$ ) різниць між отриманими і бажаними значеннями правих кінців.

Точне вирішення рівняння (7) дає не вірогідні результати; при виконанні наступної ітерації характерні точки, які мають чітку послідовність, почнуть мінятися місцями між собою. За таких умов рівняння (7) потрібно розв'язувати аналітичним методом найбільш наближено. Використовується метод градієнтного спуску в сукупності з обмеженням, яке будемо вибирати із отриманих методом мінімумів квадратичної оцінки (знищення різниці між отриманими і бажаними значеннями правих кінців крайової задачі) ті, що задовольняють вимозі чіткої послідовності (4). Після завершення цього методу визначаються другі наближення стосовно характерних точок у вигляді вектору  $\Delta t^*$ , підставляючи які у (7), надають новий вектор-стовбець  $B^*$ . Якщо його значення не задовольняють деяких значень  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{Vr}$ ,  $\varepsilon_{Vt}$ , то за формулою (6) знаходяться нові наближення і весь процес повторюється, починаючи з формули (6).

## РЕЗУЛЬТАТИ

Результати моделювання представлені на рис. 1-2 та табл. 1 для супутника з параметрами:

Висота номінальної орбіти – 1000 км.

Величина відхилення від номінальної орбіти – 20 км.

Нахилення орбіти –  $50^\circ$ .

Вага супутника – 100 кгс.

Характерна площа –  $40 \text{ м}^2$ .

Аеродинамічний коефіцієнт опору – 2,4.

Питомий імпульс тяги – 800 с.

Тягоозброєність –  $5 \times 10^{-4}$ .

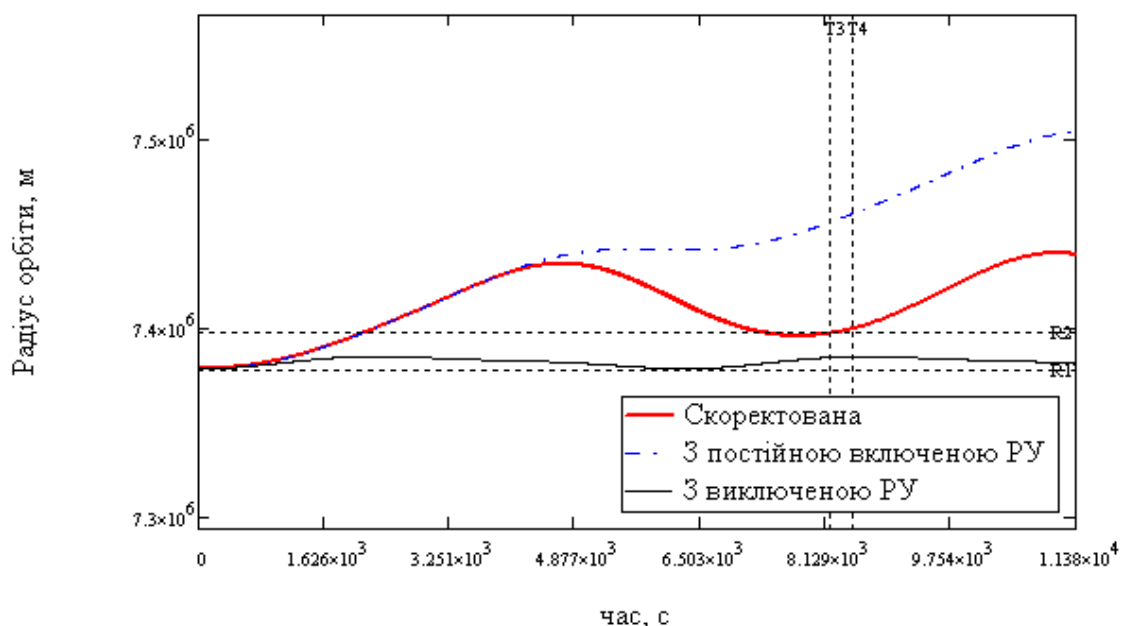
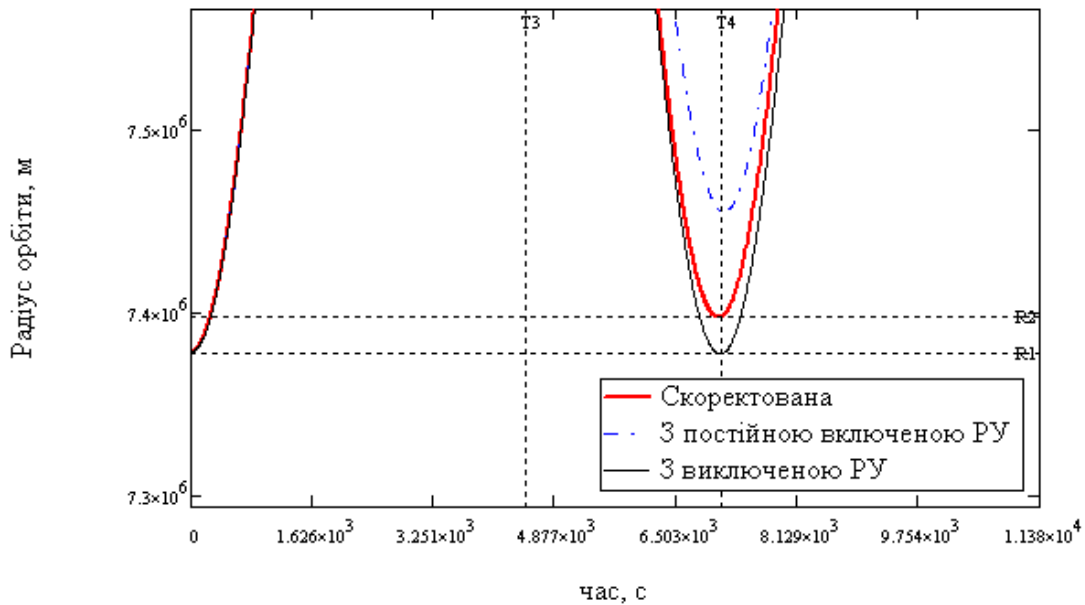


Рис. 1. Орбіта КА та її корекція  $e_0 = 0,075$

Рис. 2. Орбіта КА та її корекція  $e_0 = 0$ 

Таблиця 1 – Результати моделювання для двох випадків ексцентриситету

	$e_0 = 0$	$e_0 = 0,075$
Характерні точки роботи РУ: T1; T2;	0 с; 3266 с;	0 с; 677 с;
T3; T4;	8202 с; 8502 с;	4497 с; 7115 с;
Характерний час роботи РУ	3566 с	3295 с
Абсолютна похибка корекції	2 км	1 км
Вага витраченого палива	0,023 кгс	0,021 кгс

### ВИСНОВКИ

Розроблена математична модель збуреного руху КА, яка враховує збурення від нецентрального гравітаційного поля Землі, збурення від аеродинамічного опору атмосфери, зміну щільності атмосфери від висоти, зміну маси КА та дію РУ малої тяги безпосередньо в трансверсальному напрямі.

Побудований алгоритм розв'язку крайової задачі корекції середньої висоти орбіти супутника. На основі оптимального, з точки зору витрат палива, двоімпульсного гоманівського переходу була складена і вирішена крайова задача відносно характерних точок роботи РУ.

Запропонована методика може бути використана для прийняття рішення про спосіб маневрування з метою збільшення або підтримання середнього радіусу майже колової орбіти КА з РУ малої тяги, а також для оцінки вимог до РУ низькоорбітальних супутників довготривалої експлуатації.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Васильев И. Ю. Сравнение эффективности двигателей постоянной и регулируемой по величине тяги при многооборотных межорбитальных переходах / И. Ю. Васильев, Б. Н. Кифоренко, З. В. Пасечник // Проблемы управления и информатики. — 2005. — №6. — С. 98-105.



2. Васильев В. В. Оптимальное управление эллиптической орбитой спутника Земли с двигателем малой тяги / В. В. Васильев // Космич. исслед. — 1980. — 18, вып. 5. — С. 707-714.
3. Васильев В. В. Многошаговые алгоритмы коррекции орбиты спутника Земли двигателем малой тяги / В. В. Васильев, В. В. Салмин // Космич. исслед. — 1984. — 22, вып. 4. — С. 507-519.
4. Петухов В. Г. Оптимизация траекторий с малой тягой / В. Г. Петухов // Презентация на семинаре по механике космического полета, управлению и информатике ИКИ РАН, Москва, июнь 2000 г.
5. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова. — М. : Машиностроение, 1972.
6. Охоцимский Д. Е. Основы механики космического полета / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сухарилдзе. — М. : Недра, 1990. — 448 с.

#### REFERENCES

1. Vasilev Y.Yu., Kiforenko B.N., Pasechnik Z.V. Sravnenie effektivnosti dvigatelei postoiannoї i rehuliruemoї po velichine tiahі pri mnohooborotnikh mezhorbitalnikh perekhodakh // Problemi upravleniia i informatiki. — 2005. — № 6. — PP. 98-105.
2. Vasilev V.V. Optimalnoe upravlenie ellipticheskoi orbitoi sputnika Zemli s dvigatelem maloi tiahі // Kosmich. issled. — 1980. — 18, v. 5. — PP. 707-714.
3. Vasilev V.V., Salmin V.V. Mnohoshahovie alhoritmi korrektsii orbiti sputnika Zemli dvigatelem maloi tiahі // Kosmich. issled. — 1984. — 22, v. 4. — PP. 507-519.
4. Petukhov V.H. Optimizatsiia traektorii s maloi tiahoi. Prezentatsiia na seminare po mekhanike kosmicheskoho poleta, upravleniiu i informatike YKY RAN, Moskva, iun 2000 h.
5. Osnovi teorii poleta kosmicheskikh apparatov / Pod red. H.S. Narimanova, M.K. Tikhonravova. — М. : Mashinostroenie, 1972.
6. Okhotsimskii D.E., Sukharilidze Yu.H. Osnovi mekhaniki kosmicheskoho poleta. — М. : Nedra, 1990. — 448 p.

УДК 517.958 : 539.3:534.21

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ПЛАСТИНИ З УРАХУВАННЯМ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ МАТЕРІАЛУ

Кудзіновська І. П., к. т. н., доцент

*Національний авіаційний університет,  
просп. Космонавта Комарова, 1, м. Київ-058, 03680, Україна*

Kudzinovskaya@ukr.net

Проведено дослідження вимушених вісесиметричних згинальних коливань круглої п'єзокерамічної пластини з товщиною поляризацією під дією зовнішнього гармонічного навантаження. Записано замкнену систему диференціальних рівнянь, що описує коливання пластини, з урахуванням в'язкопружності матеріалу. Для випадків жорсткого закріплення контуру та шарнірного опирання пластини отримано точний розв'язок. Проведено числовий розрахунок і аналіз амплітудно-частотних характеристик пластини в області основного резонансу.

*Ключові слова: кругла п'єзокерамічна пластинка, вимушені вісесиметричні коливання, розрахунок та аналіз амплітудно-частотних характеристик коливань.*