

7. Vaysbord, E.M. and Zhukovskiy, V.I. (1980), *Vvedenie v differentsialnyie igryi neskolkih lits i ih prilozheniya* [An introduction to the differential game of several persons and their applications], Sovetskoe radio, Moskow, Russia.
8. Pankovskiy, Yu.I., Bobin, A.V. and Slatin, A.V. (2011), "Technology of creation of imitating mathematical model of reproduction of the course of military operations", *Trudyi konferentsii «Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika»*, vol. 1., pp. 229-233.
9. Buyanov, B.B., Lubkov, N.V. and Polyak, G.L. (2006), "A management decision-making support system with simulation", *Problemy Upravleniya*, no. 6, pp. 43-49.
10. Andreev, A.A. and Kocheulov, D.V. (2010), "Imitation model of marine battle on the base of cellular automaton", *Vestnik Tambovskogo universiteta, Seriya: Estestvennyie i tehnicheckie nauki*, vol. 15, pp. 1900-1908.
11. "Military literature", available at: <http://voennizdat.ru/index/0-79>.
12. "The nomenclature of arms over the countries. Ukraine – the nomenclature of arms", available at: <http://www.militaryparitet.com/nomen/ukraine>.
13. Annexes to the military regulations of the AF RF, available at: <http://group27.narod.ru/ucbeba/voenka-ustav-boy-pril.html>.
14. Veremeev, Yu.G. *Inzhenernyie boepripasyi. Raschet porazhayuschih vozmozhnostey osko-lochnyih min i granat* [Engineering ammunition. The calculation possibilities of damaging shrapnel mines and grenades], available at: <http://www.saper.etel.ru/mines-2/razlet-osk.html>.

УДК 539.3

## **О ВЛИЯНИИ МАСШТАБА В ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Карасёв А. Г., к. т. н., ассистент

*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,  
ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, 49600, Украина*

karasev.alexey@mail.ru

В работе рассматривается влияние масштаба тонкостенных конструкций на величину равномерного внешнего давления потери устойчивости. Задача решается численно, как в линейной, так и в геометрически нелинейной постановках, в широком диапазоне изменения параметров конической пологой оболочки. Используются современные программные комплексы ANSYS и ЛИРА.

*Ключевые слова:* упругая полая коническая оболочка, внешнее давление, деформирование и устойчивость, программный комплекс, конечные элементы, численный расчет, линейная и геометрически нелинейные задачи.

## **ПРО ВПЛИВ МАСШТАБУ В ЧИСЕЛЬНИХ РІШЕННЯХ ЗАДАЧИ СТІЙКОСТІ ПОЛОГИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК**

Карасьов О. Г., к. т. н., асистент

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,  
вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна*

karasev.alexey@mail.ru

У роботі розглядається вплив масштабу тонкостінних конструкцій на величину рівномірного зовнішнього тиску втрати стійкості. Задача розв'язується чисельно, як у лінійній, так і в геометрично нелінійній постановках, у широкому діапазоні зміни параметрів конічної пологої оболонки. Використовуються сучасні програмні комплекси ANSYS і ЛІРА.

*Ключові слова:* пружна полая конічна оболонка, зовнішній тиск, деформування і стійкість, програмний комплекс, скінчені елементи, чисельний розрахунок, лінійна і геометрично нелінійна задача.

## INFLUENCE OF SCALE IN NUMERICAL SOLUTION OF STABILITY OF SHALLOW CONICAL SHELLS

Karasev A. G., Ph. D. in Technical Sciences, assistant professor

*Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Chernychevskiy str. 24a, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine*

karasev.alexey@mail.ru

The aim of the work consists in a numerical analysis of deformation and stability of elastic circular shallow conical shells undergoing external transversal pressure. The influence of scale of the shell on the buckling pressure has been examined for the estimation of an accuracy of obtained solutions. This problem studies deformation of the shells in a wide range of geometrical parameters for different boundary conditions. The boundary conditions of the lower shell edge correspond to 4 different cases: fixed encastre support, moveable encastre support, fixed hinge support and moveable hinge support. The solution is carried out in ANSYS and LIRA software. The characteristic features of three solutions are determined: linear problem for the definition of critical pressure ( $q^{cr}$ ) based on quadrangular ANSYS finite elements (FE) SHELL 181 and LIRA FE 44; geometrically nonlinear problem for the definition of limit pressure ( $q^{lim}$ ) based on axisymmetric ANSYS FE SHELL 208; geometrically nonlinear problem based on ANSYS FE SHELL 181.

Effective parameters of finite element models (size and number of FE) taken from stable results of the numerical analysis are determined for considered shells. A perfect coincidence of linear solutions in ANSYS and LIRA is established. Coincidences and differences of geometrically nonlinear solutions are determined. Reasons of result mismatches are also defined. The values of  $q^{lim}$  obtained with FE 181 and FE 208 are similar in case of small slope angles ( $\alpha \leq 2$ ) and/or small relative thickness parameter  $R/h < 200$  when values of  $q^{cr}$  higher than  $q^{lim}$ . It happens because of axisymmetric buckling deformations. Otherwise, values of  $q^{lim}$  obtained with FE 181 mostly depend on initial parameters of analysis. The decrease of  $q^{lim}$  is marked. This takes place in the case when  $q^{cr}$  lower than  $q^{lim}$  found for analysis with FE 208 due to changing of initial axisymmetric deformation by non-axisymmetric periodic in the circumferential direction deflections. The values of  $q^{cr}$  and  $q^{lim}$  are independent of scale for fixed slope angle  $\alpha$ . These buckling pressures are fully defined by  $R/h$  and Young modulus.

*Key words: elastic shallow conical shell, external pressure, deformation and buckling, software package, finite elements, numerical analysis, linear and geometrically non-linear problem.*

### ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Численный анализ задачи устойчивости упругих замкнутых пологих конических оболочек проводился путем их расчета в широком диапазоне изменения геометрии. При этом отношение радиуса основания оболочки к ее толщине (рис.1) изменялось в пределах  $R/h = 100 \div 2000$ . Угол наклона образующей конуса к плоскости его основания составлял  $\alpha = 0,5^\circ \div 20^\circ$ , толщина оболочек  $h = 0,4 \div 16$  мм. В основном рассматривались оболочки с толщиной, равной 4 мм. Материал оболочек – высокоупругая сталь (X18H9н, модуль Юнга –  $E = 2 \times 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона –  $\nu = 0,3$ ; условный предел текучести –  $\sigma_{02} = 800$  МПа). Нагружение осуществлялось равномерно распределенным по всей поверхности конуса внешним поперечным давлением ( $q$ ). Расчеты проводились для четырёх условий закрепления кромки основания конуса: неподвижного шарнирного опирания (н.ш.), подвижного шарнирного опирания (п.ш.), неподвижной заделки (н.з.), подвижной заделки (п.з.).

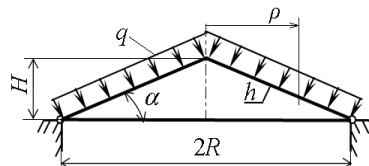


Рис. 1. Расчетная схема замкнутой пологой конической оболочки при внешнем давлении

Современные программные комплексы (ПК) обладают развитыми библиотеками конечных элементов. Элементы оболочек являются специальным классом элементов. Четких правил о границах применения элементов оболочек не существует. Тип КЭ определяет, среди прочего, применимость элемента к той или иной области расчетов.

Для эффективного моделирования тонкостенных конструкций были выбраны следующие конечные элементы из библиотек, используемых ПК. Так, в библиотеке КЭ ПК ЛИРА

(лицензия № 9Y057023) выбирался универсальный четырехугольный КЭ оболочки (КЭ 44). Каждый узел обладает шестью степенями свободы. Данный элемент предназначен для выполнения прочностного расчета тонких пологих оболочек. Для создания расчетной трехмерной модели конической оболочки в среде ПК ANSYS (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0 customer 298728) использовался четырехугольный КЭ SHELL 181 с 4 узловыми точками (узлы расположены в срединной плоскости), каждая из которых имеет 6 степеней свободы. Этот элемент хорошо подходит для расчета тонкостенных оболочек и применим при решении линейных и нелинейных задач с большими деформациями и поворотами. Элемент имеет свойства линейной упругости. Из упругих материалов применимы изотропные, ортотропные и анизотропные. При решении задач осесимметричного линейного и нелинейного деформирования, наряду с описанными выше, использовался также осесимметричный КЭ SHELL 208, представленный в библиотеке КЭ ПК ANSYS. Элемент имеет два узла с тремя степенями свободы в каждом узле. Элемент предназначен для моделирования конечных деформаций в осесимметричных моделях; поперечные касательные деформации считаются малыми.

Расчетные модели МКЭ оболочек строились при помощи генератора сеток ПК. В ПК Лира геометрическая и конечно-элементная модель идеальной замкнутой конической оболочки создавалась в диалоговом режиме стандартными средствами ПК, путём задания числа конечных элементов в окружном направлении и в направлении образующей. Задание КЭ проводилось в форме последовательного удвоения их числа по обоим направлениям до получения стабильных результатов величины критического давления. Отметим, что регулярная сетка четырёхугольных элементов к вершине конуса заменялась треугольными элементами.

В ПК ANSYS процесс разбиения сетки КЭ по существующей геометрической модели является сложной задачей и напрямую связан с выбором типа расчета и характером решения. Сеть строилась регулярной и прямоугольной в плане. Размер конечного элемента согласуется с рекомендациями, приведёнными в документации комплекса [1], где указывается, что при учете больших перемещений поворот элемента не должен превышать  $30^\circ$ . На первых этапах расчета для всех оболочек число КЭ ( $N$ ) принималось близким к 600. С целью получения достоверных результатов сетка последовательно сгущалась путем приближенного удвоения  $N$ . Окончательные расчеты проводились при  $N$ , увеличение которого вдвое приводило к изменению критического давления не более чем на 0,7% (когда зависимость критического давления от  $N$  стабилизировалась). При этом в зависимости от значений параметров  $R/h$  и  $\alpha$ , а также  $R$  в окончательных расчетах принималось  $N = 3800 - 6900$ .

Следует отметить, что в зависимости от угла  $\alpha$  и условий закрепления оболочки возможны два механизма потери устойчивости, которые отражаются двумя расчётными моделями [2, 3]. Линейной бифуркационной моделью, отражающей смену исходного осесимметричного деформирования оболочки смежными формами неосесимметричного равновесия, и нелинейной моделью, связанной с переходом оболочки к несмежным формам равновесия, которые, согласно традиционным взглядам на проблему, для пологой оболочки представляют собой «выворотку». В этой связи для исследуемых оболочек численно решались и анализировались три задачи:

- 1) линейная бифуркационная задача по определению (с учётом линейного докритического деформирования) критического давления ( $q^{cr}$ ) и формы потери устойчивости с использованием оболочечного четырёхугольного КЭ SHELL 181 (ANSYS) и КЭ 44 (ЛИРА);
- 2) геометрически нелинейная задача осесимметричного деформирования и выпучивания по определению предельного давления ( $q^{lim}$ ) с использованием оболочечного осесимметричного конечного элемента SHELL 208 (ANSYS);

3) геометрически нелинейная задача деформирования и выпучивания с определением  $q^{lim}$  при использовании оболочечного четырёхугольного КЭ SHELL 181.

### ЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ (КЭ SHELL 181 И КЭ 44)

Результатом решения линейной задачи является критическое давление  $q^{cr}$  (рис. 2, а), представляющее собой минимальную величину давления из спектра собственных значений линеаризованной задачи устойчивости, а также соответствующая форма выпучивания в виде регулярных вмятин и выпучин, вытянутых вдоль образующей (рис. 2, б). При решении задачи на собственные значения учитывается линейное докритическое деформирование оболочки.

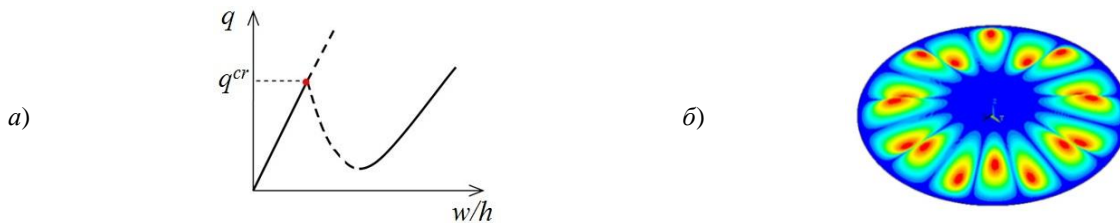


Рис. 2. Линейная задача определения критического давления (а) и формы потери устойчивости (б)

Известно, что величина  $q^{cr}$  рассматриваемой оболочки зависит только от двух геометрических показателей:  $R/h$  и угла  $\alpha$ , а также от упругих показателей материала. В этой связи, с целью оценки точности получаемых линейных решений, в таблице 1 приведены значения  $q^{cr}$  для двух условий закрепления неподвижного края оболочки: неподвижной заделки и шарнирного опирания, а также число волн в окружном направлении формы потери устойчивости ( $n$ ).

Таблица 1 – Критическое давление и число волн формы потери устойчивости оболочек различного масштаба с  $R/h = 500$  и  $\alpha = 10^\circ$

$h, м$	$R, м$	$q_{ANSYS}^{cr}, Па (н.з.)$	$q_{ANSYS}^{cr}, Па (н.ш.)$	$q_{ЛИРА}^{cr}, Па (н.з.)$	$q_{ЛИРА}^{cr}, Па (н.ш.)$	$n$
0,001	0,5	9677	8675	9681	8679	8/8
0,002	1,0	9677	8675	9681	8679	8/8
0,003	1,5	9677	8675	9681	8679	8/8
0,004	2,0	9677	8675	9681	8679	8/8
0,005	2,5	9677	8675	9681	8679	8/8
0,006	3,0	9677	8675	9681	8679	8/8
0,007	3,5	9677	8675	9681	8679	8/8
0,008	4,0	9677	8675	9681	8679	8/8
0,009	4,5	9677	8675	9681	8679	8/8
0,010	5,0	9677	8675	9681	8679	8/8
0,011	5,5	9664	8663	9681	8679	8/8
0,012	6,0	9653	8652	9681	8679	8/8
0,013	6,5	9644	8643	9681	8679	8/8
0,014	7,0	9644	8643	9681	8679	8/8
0,015	7,5	9635	8635	9681	8679	8/8
0,016	8,0	9628	8628	9681	8679	8/8

Все оболочки имели одинаковые относительные показатели геометрии:  $R/h = 500$  и  $\alpha = 10^\circ$  при различных значениях толщины, которая изменялась от 1 мм до 16 мм (с шагом 1 мм).

Соответствующим образом изменялись также значения радиусов основания оболочки  $R$ . При этом число  $N$  для оболочек с толщиной  $h = 1 \div 10$  мм было одинаковым и составляло 4800. Полученные значения критического давления в приведенном интервале  $h$ , с точностью 4-х значащих цифр, оказались одинаковы. При  $h = 10 \div 16$  мм число  $N$  последовательно увеличивалось от 4800 до 5200. Увеличение числа КЭ привело к незначительному последовательному снижению критического давления, максимальное значение которого составило 0,55%.

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ (КЭ SHELL 208) И (КЭ SHELL 181)

При решении геометрически нелинейной задачи (только ПК ANSYS) исследовалось деформирование и выпучивание оболочки, путём построения зависимостей перемещений оболочки (прогибов), в первую очередь, ее вершины, а также отдельных точек её поверхности от величины давления  $q$ . При этом определялась величина предельного давления  $q^{lim}$ .

На рис. 3 представлены зависимости перемещений вершины пологого конуса от величины давления « $q - u_z$ » для оболочки с  $R/h = 500$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5^\circ$  и  $h = 4$  мм, полученные при расчётах с использованием осесимметричного КЭ SHELL 208 для неподвижного (рис. 3, а) и подвижного (рис. 3, б) шарнирного опирания края оболочки. Эти зависимости наглядно демонстрируют процесс потери устойчивости в виде осесимметричной «выворотки» – при постоянном давлении, равном предельному его значению  $q^{lim}$ , происходит скачкообразный рост перемещений, вплоть до значения, которое приближается снизу к удвоенной высоте конуса (в вершине конус, как жесткий элемент, не «выворачивается»). «Прощёлкивание» отмечено на приведенных зависимостях стрелкой от докритической ветви к устойчивой восходящей закритической ветви.

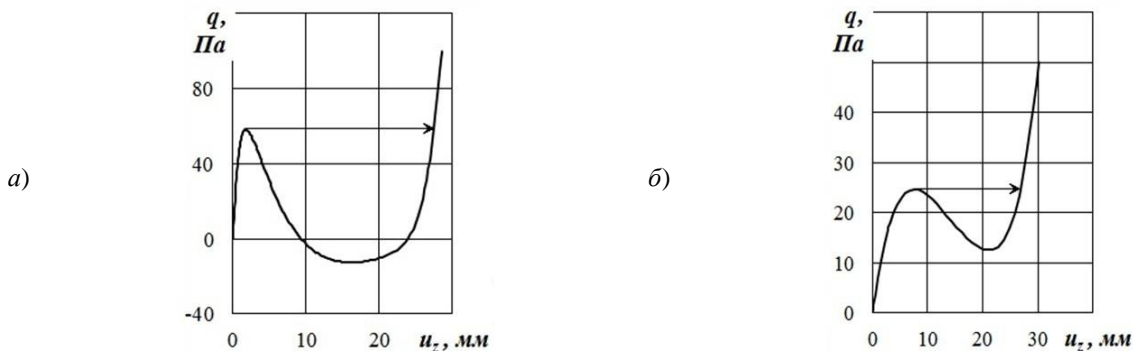


Рис. 3. Зависимости « $q - u_z$ » для оболочки с  $R/h = 500$  и  $\alpha = 0,5^\circ$  ( $h = 4$  мм) при условии неподвижного (а) и подвижного (б) шарнирного опирания

Результаты решения геометрически нелинейной задачи деформирования и выпучивания рассматриваемых оболочек с использованием оболочечного четырехугольного КЭ SHELL 181 имеют ряд важных особенностей.

В случае малых углов  $\alpha$ , при которых величина критического давления  $q^{cr}$  больше предельного его значения  $q^{lim}$ , как и при использовании осесимметричного КЭ SHELL 208, в процессе увеличения давления развивается осесимметричная докритическая, а затем (после достижения предельного давления) и закритическая деформации оболочки. При этом значения предельных давлений (и верхняя и нижняя их величина) полностью совпадают с результатами, полученными с использованием осесимметричного конечного элемента.

В случае  $q^{cr} \leq q_{208}^{lim}$  характер докритического деформирования и результат решения существенно зависят от исходных показателей расчета. При этом, как правило, по мере увеличения давления исходное движение решения по ветви осесимметричных равновесных состояний при достижении определенных особых точек переходит на равновесные ветви с периодическими в окружном направлении вмятинами. Величина предельного давления  $q_{181}^{lim}$  в данном случае снижается и зависит от исходных показателей расчета. Контроль

правильности полученного решения и значения  $q_{181}^{lim}$  осуществляется по перемещению вершины конуса, величина которого должна быть близка к удвоенной стреле подъема оболочки (за исключением оболочек с  $\alpha \sim (15-20)^\circ$ ).

Так же, как и в случае критического давления, полученного в результате решения линейной задачи, величина предельного давления геометрически нелинейной задачи при заданном угле  $\alpha$  от абсолютных размеров оболочки не зависит, а полностью определяется величиной относительного параметра  $R/h$  и величиной модуля упругости материала. Из табл. 2 видно, что этот вывод справедлив как для осесимметричного элемента SHELL 208, так и для четырехугольного элемента SHELL 181.

Таблица 2 – Значения предельной нагрузки  $q^{lim}$  (кПа) для оболочки с  $\alpha = 4^\circ$ ; неподвижная заделка

КЭ	$h, мм$	$R/h$	100	250	500	1000	2000
SHELL 1 81	0,4	$q^{lim}, кПа$	189,1	27,97	5,231	1,490	0,155
	4,0		189,1	27,97	5,238	1,492	0,157
SHELL 2 08	0,4		188,1	33,15	6,820	1,682	0,419
	4,0		188,1	33,15	6,820	1,682	0,419

В то же время следует отметить, что величина  $q^{lim}$ , которая получена с использованием осесимметричного конечного элемента SHELL 208 и четырехугольного КЭ SHELL 181, совпадает только для малых углов  $\alpha$ .

## ВЫВОДЫ

1. Конечными элементами, адекватными рассматриваемым задачам, являются:

а) в ПК ЛИРА – универсальный КЭ 44, учитывающий особенности поведения пологих оболочек при статических видах нагружения (решение только линейных бифуркационных задач устойчивости);

б) в ПК ANSYS – универсальный четырехугольный КЭ SHELL 181 для решения линейной и геометрически нелинейной задачи устойчивости; осесимметричный КЭ SHELL 208 для решения геометрически нелинейной задачи.

2. На основе получения стабильных результатов расчета определены эффективные параметры конечно-элементной модели (размеры и число КЭ) исследуемых упругих пологих оболочек, которые использовались при решении задач деформирования и устойчивости при внешнем давлении.

3. При заданном угле  $\alpha$  величина  $q^{lim}$  геометрически нелинейной задачи, также, как и  $q^{cr}$ , от абсолютных размеров оболочки не зависит, а полностью определяется параметром  $R/h$  и величиной модуля упругости материала, что справедливо при использовании как осесимметричного КЭ SHELL 208, так и четырехугольного КЭ SHELL 181, однако значения  $q^{lim}$ , полученные с использованием этих КЭ, совпадают только для малых углов  $\alpha$ .

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование проведено в рамках гранта фонда Гумбольдта № 3.4 – Фокоор – UKR/1070297.

## ЛИТЕРАТУРА

- ANSYS Inc. Academic Research, Release 13.0, Help System, Mechanical Analysis Guide.
- Карасёв А. Г. Исследование деформирования и устойчивости упругих замкнутых пологих конических оболочек с начальными несовершенствами при внешнем давлении / А.Г. Карасёв, М.А. Варяничко // Theoretical Foundation of Civil Engineering. – Warsaw : WP, 2011. – Vol. 19. – P. 99-104.

3. Karasev A. G. Deformation and buckling of elastic shallow conical shells with different boundary conditions / A.G. Karasev, M.A. Varianichko, G.G. Karasev // *Stability of Structures*. – Zakopane. – 2012. – Vol. 13. – P. 315-320.

### REFERENCES

1. ANSYS Inc. Academic Research, Release 13.0, Help System, Mechanical Analysis Guide.
2. Karasev, A.G. and Varianichko, M.A. (2011), “Analysis of deformations and stability of elastic flat closed conical shells with initial imperfections under external pressure”, *Theoretical Foundation of Civil Engineering*, WP, Warsaw, vol. 19, pp. 99-104.
3. Karasev, A.G., Varianichko, M.A. and Karasev, G.G. (2012), “Deformation and buckling of elastic shallow conical shells with different boundary conditions”, *Stability of Structures*, Zakopane, vol. 13, pp. 315-320.

УДК 539.3

## ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ МАТРИЦЕЙ И ВОЛОКНОМ

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., к. т. н., доцент,  
Богуславская А. М., аспирант

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gsm1212@ukr.net

В работе предлагается методика определения эффективных вязкоупругих характеристик однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропных матрицы и волокна, которые отличаются своими реологическими характеристиками, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. Применение предложенной методики позволяет получить упругие характеристики композита в виде функций упругих характеристик его составляющих и относительной частоты армирования композита.

*Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокна, эффективный модуль упругости, условия согласования.*

## ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ В'ЯЗКОПРУЖНИМИ МАТРИЦЕЮ ТА ВОЛОКНОМ

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., к. т. н., доцент,  
Богуславська А. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gsm1212@ukr.net

У роботі пропонується методика визначення ефективних в'язкопружних характеристик однонапрямого композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізоотропних матриці та волокна, які відрізняються за своїми реологічними характеристиками, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізоотропним матеріалом. Застосування запропонованої методики дозволяє отримати пружні характеристики композита у вигляді функцій пружних характеристик його складових та відносної частоти армування композита.

*Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, ефективний модуль пружності, умови узгодженості.*