

7. Zheleznov, L.P. and Kabanov, V.V. (2002), "Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under axial compression and internal pressure", *Prikl. Mekhanika i tekhn. fizika*, vol. 43, no. 4, pp. 155-160.
8. Yamada, G., Irie, T. and Tagawa, Y. (1984), "Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile", *J. Sound and Vibr.*, vol. 95, no. 1, pp. 117-126.
9. Meish, V.F. and Kepenach, N.P. (2014), "Transient dynamics longitudinally reinforced cylindrical shells elliptical cross-section", *Prikl. mekhanika*, vol. 50, no. 6, pp. 83-89.
10. Grigorenko, Ya.M., Budak, V.D. and Grigorenko, O.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teorii' obolonok na osnovi dyskretno-kontinual'nikh metodiv: navchal'nyj posibnyk* [Solving the problems of membranes based on discrete kontynualnye methods: Tutorial], Ilion, Mykolayiv.

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О СЖАТИИ ДВУХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КУЛОНА

Стреляев Ю. М., старший преподаватель, Шупчинская К. С., студентка

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

Получено численное решение статической контактной задачи о фрикционном взаимодействии двух упругих бесконечных круговых цилиндров с ортогональными осями. Для учета трения, возникающего в точках поверхности соприкосновения тел, использован закон трения Кулона в перемещениях. Граничные условия контактного взаимодействия задавались в ограниченной области, содержащей неизвестную область контакта при неизвестной границе зоны сцепления и зоны проскальзывания. Задача сведена к решению системы нелинейных граничных интегральных уравнений. Приближенное решение системы получено с помощью дискретизации её уравнений и использования метода простой итерации для решения дискретного аналога системы. Численный анализ посвящен оценке влияния трения на нормальные и касательные контактные напряжения. Установлено, что трение практически не оказывает влияние на нормальные напряжения и размеры зоны контакта. Касательные напряжения достигают максимальных значений на границе зоны сцепления и зоны проскальзывания.

Ключевые слова: контактная задача, упругость, трение Кулона, сцепление, проскальзывание, цилиндры, интегральное уравнение, итерационный метод.

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО СТИСКУВАННЯ ДВОХ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ КУЛОНА

Стреляев Ю. М., старший викладач, Шупчинська К. С., студентка

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

Отримано чисельний розв'язок статичної контактної задачі про фрикційну взаємодію двох пружних нескінченних кругових циліндрів з ортогональними осями. Для урахування тертя, що виникає в точках поверхні зіткнення тіл, використовувався закон тертя Кулона в переміщеннях. Крайові умови контактної взаємодії задавались в обмеженій області, яка містить у собі невідому область контакту при невідомій межі зчеплення і зони проковзування. Задачу зведено до розв'язання системи нелінійних граничних інтегральних рівнянь. Наближений розв'язок системи отримано за допомогою дискретизації її рівнянь і використання метода простої ітерації для розв'язання дискретного аналога системи. Чисельний аналіз присвячено оцінці впливу тертя на нормальні і дотичні контактні напруження. Встановлено, що тертя практично не впливає на

нормальні напруження і розміри зони контакту. Дотичні напруження досягають максимальних значень на межі зони зчеплення і зони проковзування.

Ключові слова: контактна задача, пружність, тертя Кулона, зчеплення, проковзування, циліндри, інтегральне рівняння, ітераційний метод.

CONTACT PROBLEM OF TWO ELASTIC CYLINDERS COMPRESSION TAKING INTO ACCOUNT COULOMB FRICTION

Streliaiev Y. M., Shupchinskaya K. S.

*Zaporizhzhue National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

strelkiny@gmail.com, corin-s@rambler.ru

The subject of the research in this work is to analyze the friction influence on the values of normal and tangential contact stresses that take place at frictional interaction of two linear-elastic bodies at the points of contact surface and also to obtain the contact area, adhesion region and slip page region on this surface. We have considered the static contact problem of compression taking into account friction of two linearly elastic infinite circular cylinders that have various radiuses and orthogonal axes of symmetry. It was supposed that the size of contact area is small in comparison with radiuses of cylinders; the contact area is flat and lies in the limited area of the common tangential plane passing through a point of initial contact of cylinders. We used the elastic half-space approximation of the interacting bodies which allowed us to express the linear integral operators of influence of the surface contact stresses on the surface elastic displacement by means of formulas of Boussinesq and Cerruti. The contact area and the boundary of the regions of adhesion and slip page are not known in advance and must be determined in the course of the problem solution. It was supposed that the friction between the contact surfaces of bodies obeys Coulomb's of friction law in which velocities are substitute by displacements. Boundary conditions were set on limited area of the tangential plane of cylinders which contain unknown area of contact. The contact problem was reduced to obtain unknown normal and tangential contact stresses from a system of non-linear boundary integral equations. Approximate solution of the system of non-linear integral equations is obtained by means of an iterative method. Numerical results were received for various values of the friction coefficient under identical conditions of normal loading of cylinders with various elastic constants. Approximate values of normal contact stresses that obtained at zero value of a friction coefficient were compared to its Hertz's analytical solution values and it showed good compliance. It is also established that in each considered case the contact area has the form of an ellipse, frictional force practically do not influence normal contact stresses and the sizes of contact area. The tangential stresses increase with increase in a friction coefficient and reach a maximum on border of regions of adhesion and a slip page, and the point of a maximum of the tangential stresses is the irregular point on the received curves.

Key words: contact problem, elasticity, Coulomb friction, adhesion, slipping, cylinders, integral equation, iterative method.

ВВЕДЕНИЕ

Начало исследованию контактных задач теории упругости положено Герцем в 1881 году [1]. Теория Герца описывает статические задачи о контакте абсолютно гладких линейно упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка в предположении, что поверхность контакта мала по сравнению с радиусами кривизны контактирующих поверхностей. Теория контактных задач активно развивается с середины XX века по настоящее время. Одним из важных вопросов, возникавших в процессе развития этой теории, являлся вопрос о влиянии поверхностного трения на контактные напряжения, возникающие во взаимодействующих элементах различных механических систем. Основная трудность, связанная с учетом трения в контактных задачах, заключается в том, что граничные условия взаимодействия тел приходится задавать на неизвестной заранее площадке контакта при неизвестной границе зоны сцепления и зоны проскальзывания тел. Это обстоятельство, как правило, приводит к нелинейности математических моделей контактного взаимодействия тел, что существенно усложняет поиск аналитических решений задач рассматриваемого класса. Отметим некоторые важные результаты в развитии теории контактных задач с учетом трения. Впервые аналитический метод решения задач с частичным проскальзыванием был независимо предложен в работах Каттанео [2] и Миндлина [3]. Плоская контактная задача о внедрении с трением прямоугольного штампа в упругую полуплоскость при неизвестной границе областей сцепления и проскальзывания впервые решена Галиным [4]. Решение осесимметрической задачи найдено в работах [5, 6]. На основе соображений подобия Спенс [5] показал, что для одинаковых упругих констант и коэффициентов трения относительные размеры зоны проскальзывания сохраняются для любого индентора с осесимметричным профилем и равны соответствующим значениям для штампа с плоским основанием.

Аналитические решения сингулярных интегральных уравнений некоторых плоских и осесимметрических контактных задач с трением получены в работах [7-9] с использованием обобщенного метода Винера-Хопфа. Наряду с аналитическими методами широкое применение для решения контактных задач с учетом трения получили различные численные методы, основанные на вариационной постановке задачи [10, 11] и на ее сведении к различным операторным уравнениям [12, 13]. В работе [11] приведено численное решение пространственной контактной задачи о вдавлении жесткого конечного цилиндра в упругое полупространство. В работе [13] предложен достаточно простой в реализации эффективный численный метод, позволяющий решать широкий класс статических и квазистатических контактных задач с учетом кулонова трения.

Задача о контакте двух упругих бесконечных ортогональных цилиндров с различными радиусами и различными упругими константами является трехмерной неосесимметрической задачей. Практическая ценность решения этой задачи обусловлена тем, что во многих механических системах и механизмах контактирующие поверхности имеют цилиндрическую форму. Аналитическое решение рассматриваемой задачи [14] в случае отсутствия трения находится в рамках классической теории Герца. В работе рассматривается задача при наличии кулонова трения между цилиндрами в статической постановке. Целью данной статьи является получение приближенного решения этой задачи с учетом взаимного влияния друг на друга нормальных и касательных напряжений, возникающих на поверхности контакта цилиндров, а также оценка влияния сил трения на распределение удельной контактной нагрузки на этой поверхности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим статическую контактную задачу о взаимодействии с кулоновым трением двух линейно-упругих изотропных бесконечных цилиндров с радиусами R_1 , R_2 , оси которых взаимно ортогональны (рис. 1). Будем считать, что цилиндры изготовлены из различных материалов и имеют различные упругие постоянные. Пусть в ненагруженном состоянии цилиндры касаются друг друга в одной точке.

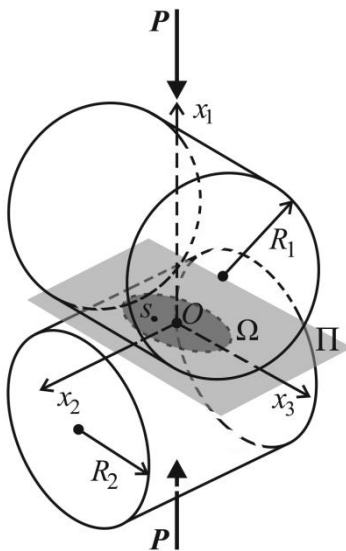


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке касания цилиндров, осями x_2 , x_3 , расположенными в их общей касательной плоскости Π параллельно осям цилиндров, и осью x_1 , направленной внутрь верхнего цилиндра (рис. 1). Под действием сжимающей силы P , приложенной вдоль оси x_1 , происходит жесткое поступательное сближение осей цилиндров Δ и в плоскости Π образуется площадка контакта Ω_0 . Будем считать, что размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами цилиндров, а упругие перемещения малы по сравнению с её размерами. В случае, когда цилиндры имеют одинаковые упругие постоянные или являются абсолютно гладкими, поверхность контакта имеет форму эллипса, трение в точках этой поверхности не возникает и распределение нормальных контактных напряжений $p_1(x_2, x_3)$ на ней выражается, согласно теории Герца, формулой [14]:

$$p_1(x_2, x_3) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2}}, \quad (1)$$

где положительные постоянные a, b есть полуоси эллипса контакта (формулы для их расчета можно найти в справочнике [15]). Наличие трения между цилиндрами, имеющими различные упругие постоянные, приводит к появлению касательных напряжений $p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$, действующих в области контакта и направленных параллельно осям x_2, x_3 соответственно. Условия контактного взаимодействия будем задавать в ограниченной области $\Omega \subset \Pi$, содержащей в себе неизвестную область контакта Ω_0 . Обозначим $u_1(x_2, x_3), u_2(x_2, x_3), u_3(x_2, x_3)$ значения в точке $s(x_2, x_3) \in \Omega$ (рис. 1) перемещений вдоль осей x_1, x_2, x_3 точек поверхности верхнего цилиндра относительно противоположащих точек нижнего цилиндра. Для учета трения будем использовать закон трения Кулона в перемещениях [16]. Тогда граничные условия контактного взаимодействия цилиндров в точках области Ω можно выразить системой соотношений [13]

$$\begin{cases} u_1(x_2, x_3) \geq 0, \\ p_1(x_2, x_3) \geq 0, \\ p_1(x_2, x_3) \cdot u_1(x_2, x_3) = 0, \\ \sqrt{p_2^2(x_2, x_3) + p_3^2(x_2, x_3)} \leq \mu p_1(x_2, x_3), \\ p_2(x_2, x_3) \sqrt{u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3)} + \mu p_1(x_2, x_3) u_2(x_2, x_3) = 0, \\ p_3(x_2, x_3) \sqrt{u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3)} + \mu p_1(x_2, x_3) u_3(x_2, x_3) = 0; \quad (x_2, x_3) \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Первое неравенство системы (2) означает отсутствие взаимного проникания контактирующих поверхностей, второе неравенство означает, что контактное давление не может быть растягивающим. Третье равенство означает отсутствие контактного давления вне области контакта. Последние три соотношения системы (2) выражают закон трения Кулона (неотрицательная константа μ есть коэффициент трения). Заменяя цилиндры упругими полупространствами, связь между поверхностными перемещениями $u_1(x_2, x_3), u_2(x_2, x_3), u_3(x_2, x_3)$ и поверхностными напряжениями $p_1(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$ в области Ω выразим, используя решения Буссинеска и Черутти [14], следующими соотношениями:

$$\begin{cases} u_1(x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega} K_{1j}(x_2, x_3, y_2, y_3) p_j(y_2, y_3) dy_2 dy_3 + \delta(x_2, x_3) - \Delta, \\ u_2(x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega} K_{2j}(x_2, x_3, y_2, y_3) p_j(y_2, y_3) dy_2 dy_3, \\ u_3(x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega} K_{3j}(x_2, x_3, y_2, y_3) p_j(y_2, y_3) dy_2 dy_3, \end{cases} \quad (3)$$

где функция $\delta(x_1, x_2) = R_1 + R_2 - \sqrt{R_1^2 - x_3^2} - \sqrt{R_2^2 - x_2^2}$ задает первоначальный зазор между цилиндрами, а ядра $K_{ij}(x_2, x_3, y_2, y_3)$ линейных интегральных операторов влияния поверхностных нагрузок на поверхностные упругие перемещения задаются равенствами

$$K_{11}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_1}{r}, \quad K_{12}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_2(x_2 - y_2)}{r^2}, \quad K_{13}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_2(x_3 - y_3)}{r^2},$$

$$K_{21}(x_2, x_3, y_2, y_3) = -K_{12}(x_2, x_3, y_2, y_3), \quad K_{22}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_2 - y_2)^2}{r^3},$$

$$\begin{aligned}
 K_{23}(x_2, x_3, y_2, y_3) &= \frac{c_3(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)}{r^3}, \quad K_{31}(x_2, x_3, y_2, y_3) = -K_{13}(x_2, x_3, y_2, y_3), \\
 K_{32}(x_2, x_3, y_2, y_3) &= K_{23}(x_2, x_3, y_2, y_3), \quad K_{33}(x_2, x_3, y_2, y_3) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_3(x_3 - y_3)^2}{r^3}, \\
 r &= \sqrt{(x_2^2 - y_2^2) + (x_3^2 - y_3^2)}, \quad c_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}, \quad c_2 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{2\pi E_2} - \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{2\pi E_1}, \\
 c_3 &= \frac{\nu_1(1 + \nu_1)}{\pi E_1} + \frac{\nu_2(1 + \nu_2)}{\pi E_2},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где E_1, E_2 – модули Юнга, ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона первого и второго цилиндров соответственно.

Таким образом, рассматриваемая контактная задача состоит в определении неизвестных функций $p_1(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$, которые в области Ω удовлетворяют системе (2) с учетом соотношений (3)-(4). После нахождения контактных напряжений $p_1(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3)$ неизвестную область контакта Ω_0 и её конфигурацию, используя формулы (3)-(4), можно найти из очевидных соотношений

$$\begin{aligned}
 \Omega_0 &= \{(x_2, x_3) \in \Omega \mid u_1(x_2, x_3) = 0\}, \\
 \Omega_C &= \{(x_2, x_3) \in \Omega \mid u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3) = 0\}, \\
 \Omega_{\Pi} &= \{(x_2, x_3) \in \Omega \mid u_2^2(x_2, x_3) + u_3^2(x_2, x_3) > 0\},
 \end{aligned}$$

где Ω_C и Ω_{Π} обозначены, соответственно, зона сцепления и зона проскальзывания, образующиеся в области контакта Ω_0 .

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для получения системы интегральных уравнений рассматриваемой контактной задачи будем использовать две вспомогательные функции [13]:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\
 q(x, y, z) &= \begin{cases} x, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Приведем без доказательства две теоремы об очевидных свойствах функций h и q .

Теорема 1. Для любых действительных чисел x, y система

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x \cdot y = 0 \end{cases}$$

эквивалентна равенству $x = h(x - E \cdot y)$, в котором E – произвольное положительное число.

Теорема 2. Для любых действительных чисел x, y, u, v и любого неотрицательного числа z система соотношений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ x \cdot \sqrt{u^2 + v^2} + z \cdot u = 0, \\ y \cdot \sqrt{u^2 + v^2} + z \cdot v = 0 \end{cases}$$

эквивалентна системе равенств

$$\begin{cases} x = q(x - Eu, y - Ev, z), \\ y = q(y - Ev, x - Eu, z), \end{cases}$$

где E – произвольное положительное число.

Из утверждений теорем 1, 2 следует, что систему соотношений (2) можно записать в такой эквивалентной форме:

$$\begin{cases} p_1(x_2, x_3) = h(p_1(x_2, x_3) - Eu_1(x_2, x_3)); \\ p_2(x_2, x_3) = q(p_2(x_2, x_3) - Eu_2(x_2, x_3), p_3(x_2, x_3) - Eu_3(x_2, x_3), \mu p_1(x_2, x_3)); \\ p_3(x_2, x_3) = q(p_3(x_2, x_3) - Eu_3(x_2, x_3), p_2(x_2, x_3) - Eu_2(x_2, x_3), \mu p_1(x_2, x_3)); \\ (x_1, x_2) \in \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

где $u_1(x_2, x_3)$, $u_2(x_2, x_3)$, $u_3(x_2, x_3)$ определяются формулами (3)-(4). С учетом этих формул система (5) представляет собой систему трех нелинейных граничных интегральных уравнений относительно неизвестных в области Ω функций $p_1(x_2, x_3)$, $p_2(x_2, x_3)$, $p_3(x_2, x_3)$, задающих распределение удельной контактной нагрузки в этой области.

Метод численного решения системы (5), детально изложенный в работе [13], состоит в регуляризации нелинейных интегральных уравнений системы, дискретизации регуляризованных уравнений и использовании итерационных процессов для решения дискретного аналога регуляризованной системы (5). Для получения такого дискретного аналога зададим область Ω в виде открытого квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям x_2, x_3 . Разобьем квадрат Ω на l^2 непересекающихся равных квадратных областей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l^2}$, ориентированных подобно Ω . Полагая, что неизвестные функции $p_1(x_2, x_3)$, $p_2(x_2, x_3)$, $p_3(x_2, x_3)$ принимают на каждом граничном элементе ω_k постоянные значения $p_{3k-2}, p_{3k-1}, p_{3k}$, сведем нахождение приближенного решения системы (5) к нахождению неизвестных числовых параметров $p_1, p_2, \dots, p_{3l^2}$, удовлетворяющих следующей системе $3l^2$ скалярных уравнений:

$$\begin{cases} p_{3k-2} = h \left(p_{3k-2} - E \left(\sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-2,j} p_j + b_k \right) \right); \\ p_{3k-1} = q \left(p_{3k-1} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1,j} p_j, p_{3k} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k,j} p_j, \mu p_{3k-2} \right); \\ p_{3k} = q \left(p_{3k} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k,j} p_j, p_{3k-1} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1,j} p_j, \mu p_{3k-2} \right); \\ k = \overline{1, l^2}. \end{cases} \quad (6)$$

При определенных допущениях [13], входящие в систему (6) числовые параметры $a_{k,j}$, b_k можно выразить следующими равенствами:

$$b_k = \delta(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k) - \Delta \quad \forall k = \overline{1, l^2};$$

$$a_{3k-j, 3k-j} = \varepsilon + \iint_{\omega_k} K_{3-j, 3-j}(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad \forall k = \overline{1, l^2}, \quad \forall j = 0, 1, 2;$$

$$a_{3k-2, 3k-1} = a_{3k-2, 3k} = a_{3k-1, 3k-2} = a_{3k-1, 3k} = a_{3k, 3k-2} = a_{3k, 3k-1} = 0;$$

$$a_{3k-m, 3j-g} = \text{mes}(\omega_j) K_{3-m, 3-g}(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k, \tilde{x}_2^j, \tilde{x}_3^j) \quad \forall k, j = \overline{1, l^2}, k \neq j, \quad \forall m, g = 0, 1, 2,$$

где точка $(\tilde{x}_2^k, \tilde{x}_3^k)$ есть центр квадрата ω_k , $\text{mes}(\omega_j)$ есть площадь ω_j , $\varepsilon > 0$ есть параметр регуляризации [13].

Для нахождения приближенного решения системы (6) можно предложить итерационный процесс, основанный на методе простой итерации

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_{3l^2}^{(0)}) \in R^{3l^2}, \quad k = \overline{1, l^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ p_{3k-2}^{(m+1)} = h \left(p_{3k-2}^{(m)} - E \left(\sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-2, j} p_j^{(m)} + b_k \right) \right); \\ p_{3k-1}^{(m+1)} = q \left(p_{3k-1}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1, j} p_j^{(m)}, p_{3k}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k, j} p_j^{(m)}, \mu p_{3k-2}^{(m)} \right); \\ p_{3k}^{(m+1)} = q \left(p_{3k}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k, j} p_j^{(m)}, p_{3k-1}^{(m)} - E \sum_{j=1}^{3l^2} a_{3k-1, j} p_j^{(m)}, \mu p_{3k-2}^{(m)} \right). \end{array} \right. \quad (7)$$

Очевидно, что с помощью итерационного процесса (7), который может сходиться в пространстве R^{3l^2} лишь к решению системы (6), можно получить её приближенное решение с достаточной степенью точности.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При расчетах использовались следующие входные данные: радиусы цилиндров равны $R_1 = 0,265 \text{ м}$ и $R_2 = 0,3 \text{ м}$; жесткое сближение $\Delta = 0,0007 \text{ м}$; модули Юнга равны $E_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 10^5 \text{ МПа}$; коэффициенты Пуассона равны $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$. Область Ω разбивалась на $41 \times 41 = 1681$ квадратных граничных элемента ω_k со стороной $0,00025 \text{ м}$. Расчеты производились для значений коэффициента трения μ равных 0 , $0,2$, $0,4$ и $0,8$. Значения контактных давлений $p_1(x_2, x_3)$, найденные из численного решения задачи при $\mu = 0$, сопоставлялись со значениями, найденными из аналитического решения Герца по формуле (1). Значения нормальных контактных напряжений в узловых точках (центрах квадратов ω_k), расположенных на оси x_3 , приведены в таблице 1 (напряжения $p_1(0, x_3)$ в МПа; координата x_3 в метрах). Первая строка таблицы соответствует решению Герца, вторая – численному решению задачи без учета трения ($\mu = 0$). Третья, четвертая и пятая строки таблицы соответствуют численным решениям задачи с учетом трения, полученным при коэффициентах трения $\mu = 0,2$, $\mu = 0,4$ и $\mu = 0,8$ соответственно.

Таблица 1 – Зависимость нормальных напряжений от расстояния

x_3	0,0000	0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025	0,0030	0,0035	0,0040	0,0045
1	784,96	780,67	767,67	745,50	713,29	669,62	612,03	536,04	432,06	269,43
2	783,89	779,31	765,39	741,60	706,97	659,74	597,01	513,02	394,37	171,45
3	811,57	806,84	792,42	767,70	731,70	680,13	604,80	512,36	385,96	148,65
4	811,24	806,45	791,98	767,26	731,23	682,11	616,7	527,03	384,16	134,94
5	810,97	806,21	791,70	766,70	730,90	681,68	616,18	528,30	400,60	121,25

Данные, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что численное решение рассматриваемой задачи без учета трения несущественно отличается от аналитического решения, найденного по формуле (1). Наибольшее относительное отклонение значений контактных давлений по сравнению с их максимальным значением, найденным согласно (1), составляет приблизительно 12% и достигается в точках, близких к краю пятна контакта, в остальных точках погрешность не превосходит 4%. Существенную погрешность в точках, близких к краю пятна контакта, можно объяснить бесконечным градиентом функции (1) на границе эллипса контакта. Анализ данных, приведенных в третьей, четвертой и пятой строках таблицы 1, показал, что наличие трения в области контакта практически не оказывает влияния на нормальные напряжения. На рис. 2. показаны графики распределения касательного напряжения $p_3(0, x_3)$ вдоль оси x_3 , соответствующие различным значениям коэффициента трения.

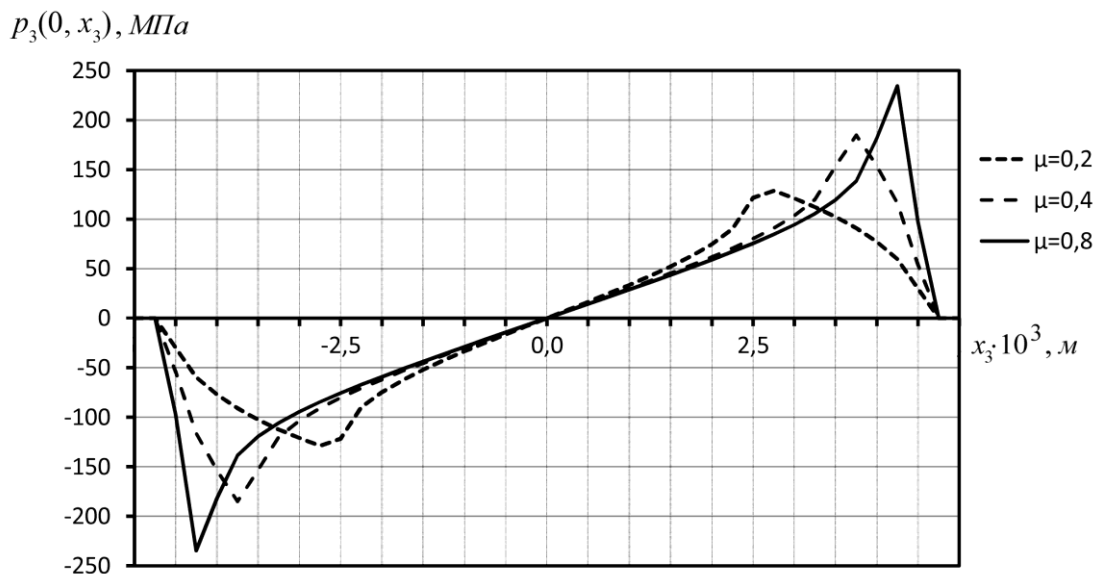


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от расстояния при различных коэффициентах трения

На рис. 3 показаны контактные пятна, состоящие из зоны сцепления (тёмный цвет) и зоны проскальзывания (серый цвет), которые возникают в области Ω при значениях коэффициента трения $\mu = 0,2$, $\mu = 0,4$ и $\mu = 0,8$ (клетки на рисунке соответствуют граничным элементам ω_k).

Анализ результатов, представленных на рис. 2, 3, показал, что касательные напряжения растут с увеличением трения и достигают максимума на границе зоны сцепления и зоны проскальзывания. Причем, точки максимума касательных напряжений являются нерегулярными точками на полученных кривых (рис. 2). Установлено также, что в каждом рассматриваемом случае область контакта имеет форму, близкую к эллипсу (рис. 3),

значения полуосей которого близки к теоретическим значениям, найденным согласно [15], для соответствующей задачи Герца. Как и следовало ожидать, площадь зоны сцепления растет с увеличением коэффициента трения.

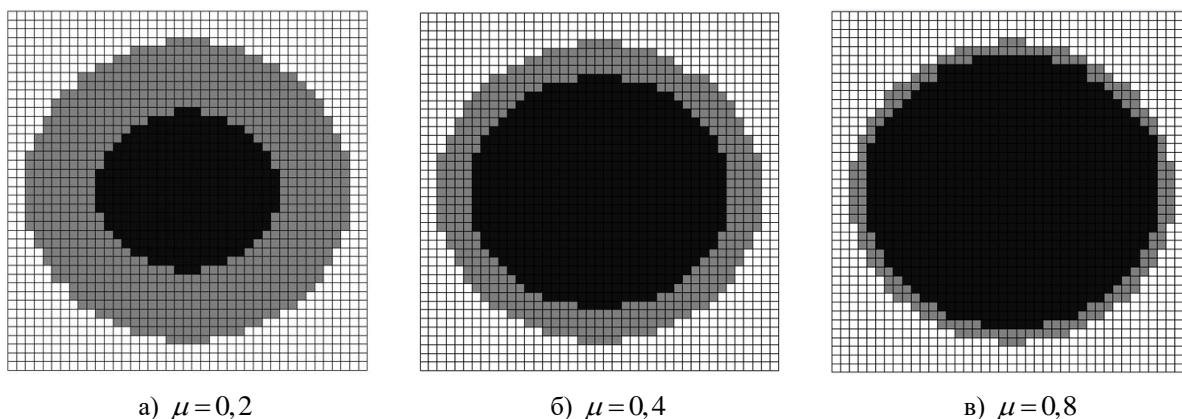


Рис. 3. Конфигурация области контакта

ВЫВОДЫ

Получено численное решение статической контактной задачи о сжатии с трением двух упругих бесконечных круговых цилиндров с ортогональными осями. Для решения задачи был использован метод нелинейных граничных интегральных уравнений, предложенный в работе [13]. Для проверки корректности этого метода результаты численных расчетов в случае отсутствия трения сопоставлялись с известным аналитическим решением рассматриваемой задачи и показали хорошее соответствие. Установлено, что силы трения практически не искажают форму и размеры зоны контакта и не влияют на нормальные напряжения, возникающие в ней. При наличии трения в зоне контакта появляются касательные напряжения, максимальные значения которых увеличиваются с увеличением коэффициента трения и в каждом рассмотренном случае достигаются на границе зон сцепления и проскальзывания.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hertz Н. Über die Berührung fester elastischer Körper / Н. Hertz // J Reine und Angewandte Mathematik. – 1882. – Bd. 92. – P. 156-171.
2. Cattaneo С. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi / С. Cattaneo // Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei. – 1938. – Vol. 27, Ser. 6. – P. 342-348, 434-436, 474-478.
3. Mindlin R. D. Compliance of elastic bodies in contact / R. D. Mindlin // Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1949. – Vol. 16, №3. – P 259-268.
4. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // Прикл. математика и механика. – 1945. – Т. 9. – Вып. 5. – С. 413-424.
5. Spence D. A. The Hertz contact problem with finite friction / D. A. Spence // J of Elasticity. – 1975. – 5(3-4). – P. 297-319.
6. Моссаковский В. И. Контактные задачи математической теории упругости / В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова. – К. : Наук. думка, 1985. – 176 с.
7. Zhupanska O. I. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space / O. I. Zhupanska, A. F. Ulitko // J. Mech. Phys. Solids. – 2005. – 53. – P. 975-999.
8. Ostryk V. I. Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion / V. I. Ostryk, A. F. Ulitko // Materials Science. – 2013. – Vol. 48. – №. 4. – С. 444-455.
9. Острик В. И. Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления / В. И. Острик // Прикл. математика и механика. – 2013. – Т. 77. – № 4. – С. 605-619.
10. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 2009. – Т. 73. – № 3. – С. 492-502.

11. Кравчук А. С. О решении трехмерных контактных задач с трением / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72. – № 3. – С. 485-496.
12. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б. А. Галанов // Прикл. математика и механика. – 1985. – Т. 49. – № 5. – С. 827-835.
13. Александров А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними / А. И. Александров // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2013. – Т.56. – № 3. – С. 29-42.
14. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора ; под ред. Р. В. Гольдштейна. – М. : Мир, – 1989. – 510 с.
15. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К. : Наукова думка, 1988. – 736 с.
16. Кравчук А. С. К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе / А. С. Кравчук // Механика деформируемого твердого тела. – Куйбышев : Изд-во Куйбыш. ун-та, 1976. – С. 102-105.

REFERENCES

1. Hertz, H. (1882), “Über die Berührung fester elastischer Körper”, *J Reine und Angewandte Mathematik*, bd. 92, pp. 156-171.
2. Cattaneo, C. (1938), “Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi”, *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*, vol. 27, ser. 6, pp. 342-348, 434-436, 474-478.
3. Mindlin, R.D. (1949), “Compliance of elastic bodies in contact”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, vol 16, no. 3, pp. 259-268.
4. Galin, L.A. (1945), “The indentation of a punch in the presence of friction and adhesion”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 9, no. 5, pp. 413-24.
5. Spence, D.A. (1975), “The Hertz contact problem with finite friction”, *J of Elasticity*, 5(3-4), pp. 297-319.
6. Mossakovskii, V.I., Kachalovskaya, N.Ye. and Golikova, S.S. (1985), *Kontaknyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Contact Problems of the Mathematical theory of Elasticity], Naukova Dumka, Kiev.
7. Zhupanska, O.I. and Ulitko, A.F. (2005), “Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space”, *J. Mech. Phys. Solids*, 53, pp. 975-999.
8. Ostryk, V.I. and Ulitko, F. (2013) “Axially symmetric contact of two elastic bodies with friction and adhesion”, *Materials Science*, vol. 48, no. 4, pp. 444-455.
9. Ostryk, V.I. (2013), “Axisymmetric contact of a punch of polynomial profile with an elastic half-space when there is friction and adhesion”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 77, no. 4, pp. 433-444.
10. Kravchuk, A.S. (2009), “The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 73, no. 3, pp. 351-357.
11. Kravchuk, A.S. (2008), “The solution of three-dimensional friction contact problems”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 72, no. 3, pp. 338-346.
12. Galanov, B.A. (1985) “The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 49, no. 5, pp. 634-640.
13. Aleksandrov, A.I. (2015), “A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction”, *Matematychni metody i fizyko-mekhanichni polya*, vol. 205, no. 4, pp. 518-534.
14. Johnson, K.L. (1985), [Contact Mechanics], Cambridge Univ. Press, Cambridge.
15. Pisarenko, G.S., Yakovlev, A.P. and Matveev, V.V. (1988), *Spravochnik po soprotivleniiu materialov* [Reference book on strength of materials], Naukova dumka, Kiev.
16. Kravchuk, A. S. (1976) “By the formulation of boundary value problems of the theory of elasticity with boundary friction”, *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*, Izd-vo Kuibyshev. Univ., Kuibyshev, pp. 102-105.