3. Popova, N.A. (2004), "Analysis of the stress-strained state of an elastic semispace with the circular cylindrical cavity", *Visnyk kharkivskogo natsionalnogo universytetu*, *seriia Matematika*, *prykladna matematika i mekhanika*, no. 645, pp. 102-107.

4. Protsenko, V.S. and Ukrainets, N.A. (2006), "The mixed problem for an elastic semispace with a circular cylindrical cavity", *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika*, *Sbornik nauchnykh trudov*, no. 42, pp. 17-22.

5. Protsenko, V.S. and Ukrainets, N.A. (2011), "Application of the generalized Fourier method to solving the problems of potential theory and elasticity theory in the semispace with the cylindrical cavity", *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki*, *Sbornik statey*, Edited by Kizilova, N.N. and Zholtkevich, G.N., Apostrof, Kharkiv, pp. 189-200.

6. Protsenko, V.S. and Ukrainets, N.A. (2015), "Application of the generalized Fourier method to solve the first basic problem of elasticity theory for the semispace with the cylindrical cavity", *Visnyk zaporizkogo natsionalnogo universytetu*, *Fizyko-matematychni nauky*, no. 2, pp. 192-201.

7. Protsenko, V.S. and Nikolaev, A.G. (1986) "Solving spatial problems of elasticity theory by means of formulas reexpansion", *International Applied Mechanics*, vol. 22, no. 7, pp. 83-89.

8. Yerofeenko, V.T. (1989), *Teoremy slozheniia. Spravochnik* [Addition theorems. Handbook], Nauka i tekhnika, Minsk, Belorussiia.

9. Lyuk, Yu. (1980), *Spetsialnye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii* [Special mathematical functions and their approximations], Nauka, Moskow, Russia.

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОГО ВИБРОИЗОЛЯТОРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Решевская Е. С., Науменко Д. А.

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, Украина

naymwm@gmail.com

Рассматривается задача определения деформированного состояния эластомерного элемента сложной геометрической формы при различных механических характеристиках резины. Эластомерный материал имеет ряд уникальных свойств – высокую механическую прочность, эластичность и слабую сжимаемость. В связи с этим для адекватного описания поведения конструкций из эластомеров в условиях эксплуатации нужны специальные приемы и методы решения поставленных задач. Приведен обзор различных подходов к решению проблемы нахождения напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов методом конечных элементов. Все рассмотренные методы основаны либо на системе упрощающих гипотез, либо имеют вид, не удобный для использования в расчетах, либо позволяют производить расчеты лишь для частных случаев конкретных постановок задач.

Для расчетов была применена схема конечного элемента, которая заключается в тройной аппроксимации полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформации и функции изменения объема должен находиться в строгом соответствии с порядком разложения перемещений. Данная схема получила название моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемого материала.

При выборе рациональных параметров резиновых деталей машин большое значение имеет правильная оценка технических свойств резин, применяемых в современном машиностроении. Проведен расчет деформированного состояния эластомерного виброизолятора при различных механических характеристиках. Приведенные результаты численных расчетов могут быть применены при выборе марки резины для практического применения.

Ключевые слова: эластомеры, виброизоляторы, моментная схема конечного элемента, деформированное состояние.

ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛАСТОМЕРНОГО ВІБРОІЗОЛЯТОРУ ПРИ РІЗНИХ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Решевська К. С., Науменко Д. А.

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна

naymwm@gmail.com

Розглядається задача визначення деформованого стану еластомерного елементу складної геометричної форми при різних механічних характеристиках гуми. Еластомерний матеріал має ряд унікальних властивостей – високу механічну міцність, еластичність і слабку стисливість. У зв’язку з цим для адекватного опису поведінки конструкцій з еластомерів в умовах експлуатації потрібні спеціальні прийоми і методи розв’язання поставлених задач. Наведений огляд різних підходів до вирішення проблеми знаходження напружено-деформованого стану еластомерних елементів методом скінченних елементів. Усі розглянуті методи ґрунтується або на системі спрощуючих гіпотез, або мають вигляд, не зручний для використання в розрахунках, або дозволяють робити розрахунки лише для окремих випадків конкретних постановок задач.

Для розрахунків була застосована схема скінченного елементу, яка полягає в потрійній апроксимації полів переміщень, деформацій і функції зміни об’єму. Причому порядок розкладання деформації і функції зміни об’єму повинен перебувати в суворій відповідності з порядком розкладання переміщень. Ця схема отримала назву моментної схеми скінченного елементу для слабкостисливого матеріалу.

При виборі раціональних параметрів гумових деталей машин велике значення має правильна оцінка технічних властивостей гум, вживаних в сучасному машинобудуванні. Проведений розрахунок деформованого стану еластомерного віброізолятору при різних механічних характеристиках. Наведені результати чисельних розрахунків можуть бути застосовані при виборі марки гуми для практичного застосування.

Ключові слова: еластомери, віброізолятори, моментна схема скінченного елементу, деформований стан.

FEATURES OF THE DEFORMED STATE OF ELASTOMERIC VIBROINSULATOR AT DIFFERENT MECHANICAL CHARACTERISTICS

Reshevskaya E. S., Naumenko D. A.

Zaporizhzhya national university,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine

naymwm@gmail.com

The task of determination of the deformed state of elastomeric element of difficult geometrical form at different mechanical descriptions of rubber is examined is considered. Elastomeric material has a number of unique properties - high mechanical wearability, elasticity and weak compressibility. In this regard, for adequate description of behavior of constructions from elastomers in the conditions of exploitation the special receptions and methods of decision of the objectives are needed. In the article the review of the different approaches to the decision of problem of finding of the stress-deformed state of elastomeric elements by the finite-element method is provided. All considered methods are based either on the system of simplifying hypotheses, either look like not user-friendly in calculations or allow to produce calculations only for the special cases of the concrete raising of tasks. For calculations the chart of eventual element, that consists in triple approximation of the movement fields, deformations and change of volume function , was applied. Thus an order of decomposition of deformation and the change volume function must be according to the order of movement expansion. This scheme got the name of moment scheme of finite element for weak compressibility material.

At the choice of rational parameters of rubber details of machines the correct estimation of technical properties of the rubbers applied in a modern engineer has a large value. The calculation of the deformed state of elastomeric vibroinsulator is conducted at different mechanical descriptions. The given results of numeral calculations can be applied at the choice of rubber brand for practical application.

Key words: elastomers, vibration isolators, moment scheme of finite elements, deformed state.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе эксплуатации машины, приборы и аппаратура подвергаются ударным, вибрационным и сейсмическим нагрузкам, которые вызывают необратимые ухудшения их эксплуатационно-технических характеристик и могут привести к выходу их из строя. С целью снижения вибрационных и сейсмических нагрузок применяют различные виброизолирующие конструкции (упругие, упруго-демпферные и демпферные опоры, резиновые прокладки и амортизаторы, виброизолирующие покрытия и т.д.). Виброизолирующие конструкции на основе эластомерных материалов по многим параметрам превосходят традиционные системы того же назначения и позволяют находить принципиально новые конструктивные решения ответственных узлов современных технических систем.

Возрастающее использование эластомерных материалов во многих областях современной техники приводит к необходимости описания с высокой точностью характеристик напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов конструкций. Повсеместное использование эластомеров в нефтегазовой промышленности, машиностроении, гражданском строительстве, кораблестроении, авиационной и аэрокосмической технике ставит широкий круг исследовательских задач.

Эластомерный материал имеет ряд уникальных свойств – высокую механическую прочность, эластичность и слабую сжимаемость. В связи с этим для адекватного описания поведения конструкций из эластомеров в условиях эксплуатации нужны специальные приемы и методы решения поставленных задач. Разработано несколько подходов к решению данной проблемы. Так, в работах С. Шарда, Н. Чогеля [1], Р. Пэнна [2], С.И. Дымникова [3], К.Ф. Черных, И.М. Шубиной [44] предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые имеют различные формы добавки члена, учитывающие слабую сжимаемость эластомера. Данные добавки определяются из условий: сжимаемости Мурнагана, сжимаемости при малых деформациях, сжимаемости Тэта и др. В работе Л.Р. Германа вводится смешанный вариационный принцип, в котором используется варьирование компоненты перемещений и среднего напряжения. Данный подход получил свое развитие в работах Т. Пиана, П. Тонга [5], С. Ли, Д. Малкуса [6], Дж. Одена [7]. В работах О.С. Зенкевича [8], И. Фрида [99], Дж. Одена [10] и др. для учета слабой сжимаемости эластомера был предложен способ сокращенного интегрирования, заключающийся в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются разными функциями.

Среди недавних разработок, посвященных расчету напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов, можно выделить работу С.А. Кабриц, В.М. Малькова, С.Е. Мансуровой [11]. Предлагаемый ими метод предназначен для решения двумерных нелинейных краевых задач слоя, а не трехмерных краевых задач теории упругости. Уравнения слоя не содержат особенностей, связанных с малой сжимаемостью материала и малой толщиной слоя.

В работах С.П. Копысова, А.К. Новикова [12] для решения подобных задач предлагается смешанный разрывный метод Галеркина, принадлежащий к классу конечно-элементных методов, в которых используется кусочно-полиномиальные пространства для поиска численного решения.

Таким образом, все рассмотренные методы, позволяющие решать проблему, возникающую в математическом аппарате МКЭ при расчете напряженно-деформированного состояния эластомерных элементов, основаны либо на системе упрощающих гипотез, либо имеют вид, не удобный для использования в расчетах, либо позволяют производить расчеты лишь для частных случаев конкретных постановок задач. В связи с этим возникает необходимость в применении гибридных схем МКЭ в форме метода перемещений на базе вариационного принципа Лагранжа. Такая схема была разработана В.В. Киричевским [13], им был предложен подход к выводу соотношений матрицы жесткости конечного элемента, заключающийся в тройной аппроксимации полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформации и функции изменения объема должен находиться в строгом соответствии с порядком разложения перемещений. Данная схема получила название моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемого материала.

МОМЕНТНАЯ СХЕМА КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Моментная схема конечного элемента основана на введении тройной аппроксимации: полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформаций и функции изменения объема выбирается с таким расчетом, чтобы исключить все компоненты деформаций, реагирующие на жесткие смещения и эффект «ложного сдвига», и все компоненты функции изменения объема, реагирующие на слабую сжимаемость эластомера.

Вывод матрицы жесткости трехмерного конечного элемента основывается на вариации упругой энергии деформации:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV, \tag{1}$$

σ^{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, V – заданный объем.

Учитывая закон Гука в форме:

$$\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda\theta g^{ij}, \tag{2}$$

где μ, λ – коэффициенты Ляме, g^{ik}, g^{jl}, g^{ij} – компоненты тензора упругих постоянных, $\theta = \varepsilon_{ii}$ – функция объемного сжатия, имеем

$$\delta W = \iiint_V \left(2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda\theta g^{ij}\right) \delta\varepsilon_{ij} dV \tag{3}$$

или

$$\delta W = \iiint_V \left(2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta\theta\right) dV. \tag{4}$$

Для построения матрицы жесткости конечного элемента внутри конечного элемента проводится тройная аппроксимация: полей перемещений $u_{k'}$, компонент тензора деформаций ε_{ij} и функции изменения объема θ.

Аппроксимация перемещений имеет вид:

$$u_{k'} = \sum_{pqr}^{113} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \tag{5}$$

где $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коэффициенты разложения; $\psi^{(pqr)}$ – набор степенных координатных функций вида:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{\left(x^1\right)^p \left(x^2\right)^q \left(x^3\right)^r}{p!q!r!}, \tag{6}$$

где $p = 0,1,2,3$, $q = 0,1,2,3$, $r = 0,1,2,3$ – степени аппроксимирующего полинома по соответствующим направлениям.

Компоненты тензора деформаций аппроксимируются путем разложения компонент ε_{ij} в ряд Маклорена в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{(ij)} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)} , \tag{7}$$

где $\{\psi_{ij}\}$ – степенные координатные функции, а коэффициенты e_{ij} записываются следующим образом в матричной форме:

$$\{e_{ij}\} = \left[F_{ij}^{s'}\right]\{\omega_{k'}\} . \tag{8}$$

Аппроксимация функции изменения объема записывается следующим образом:

$$\theta = \sum_{a=0}^{0}\sum_{b=0}^{0}\sum_{c=0}^{2} \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \tag{9}$$

где $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ – коэффициенты разложения, которые находятся из соотношения:

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \left.\frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^{\alpha} (\partial x_2)^{\beta} (\partial x_3)^{\gamma}}\right|_{x_1=x_2=x_3=0} . \tag{10}$$

В матричной форме выражения (9) и (10) имеют вид:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\} , \tag{11}$$

$$\{\xi\} = \left[F_{\theta}^{s'}\right]\{\omega_{k'}\} . \tag{12}$$

В результате выражение для вариации упругой энергии деформации имеет вид:

$$\delta W = \delta\{\omega_{s'}\}^T \left[F_{ij}^{s'}\right]^T \left[H^{ijkl}\right]\left[F_{kl}^{t}\right]\{\omega_t\} + \delta\{\omega_{s'}\}^T \left[F_{\theta}^{s'}\right]^T \left[H^{(\theta)}\right]\left[F_{\theta}^{t}\right]\{\omega_t\} , \tag{13}$$

$$\left[H^{ijkl}\right] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\}\{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 ,$$

$$\left[H^{\theta}\right] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \lambda \{\psi_\theta\}\{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 .$$

Представляя в матричном виде коэффициенты разложения перемещений и перемещениями:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}\} , \tag{14}$$

либо связь между функциями формы и степенными функциями в виде:

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}, \tag{15}$$

где $[A]$ – матрица преобразования, подлежащая определению для конкретного вида аппроксимирующих функций.

Подставляя (14) в (13), имеем:

$$\begin{gathered} \delta W = \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T \left[F_{ij}^{s'}\right]^T \left[H^{ijkl}\right]\left[F_{kl}^{t'}\right][A]\{u_{t'}\} + \\ +\delta\{u_{s'}\}^T [A]^T \left[F_{\theta}^{s'}\right]^T \left[H^{\theta}\right]\left[F_{\theta}^{t'}\right][A]\{u_{t'}\} = \\ = \delta\{u_{s'}\}\left[G^{s't'}\right]\{u_{t'}\} + \delta\{u_{s'}\}\left[G_{\theta}^{s't'}\right]\{u_{t'}\} , \end{gathered} \tag{16}$$

где $\left[G^{s't'}\right]$ и $\left[G_{\theta}^{s't'}\right]$ – матрицы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned}\left[G^{s't'}\right]&=\left[A\right]^{T}\left[F_{ij}^{s'}\right]^{T}\left[H^{ijkl}\right]\left[F_{kl}^{t'}\right]\left[A\right];\\ \left[G_{\theta}^{s't'}\right]&=\left[A\right]^{T}\left[F_{\theta}^{s'}\right]^{T}\left[H^{\theta}\right]\left[F_{\theta}^{t'}\right]\left[A\right].\end{aligned} \tag{17}$$

Матрица жесткости КЭ окончательно вычисляется по формуле

$$\left[K^{s't'}\right]=\left[A\right]^{T}\left[F_{ij}^{s'}\right]^{T}\left[H^{ijkl}\right]\left[F_{k'l'}^{t}\right]\left[A\right]+\left[A\right]^{T}\left[F_{\theta}^{s'}\right]^{T}\left[H^{\theta}\right]\left[F_{\theta}^{t'}\right]\left[A\right]. \tag{18}$$

Таким образом, для конкретных видов КЭ и аппроксимирующих полиномов для получения матрицы жесткости необходимо построение специальных матриц $\left[F_{ij}^{s}\right]$, $\left[F_{\theta}^{s}\right]$, $\left[A\right]$.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ЭЛАСТОМЕРОВ РАЗЛИЧНЫХ МАРОК

При выборе рациональных параметров резиновых деталей машин большое значение имеет правильная оценка технических свойств резин, применяемых в современном машиностроении. Из приведенных данных и опыта применения резины в горных машинах [15, 16] следует, что наиболее приемлемыми являются резины на основе натурального каучука (НК) и синтетических СКИ-3, СКИ-3+СКД каучуков. Они достаточно прочны, эластичны, имеют высокое сопротивление истиранию, морозостойкости, хорошо крепятся к металлам и поэтому широко применяются для изготовления резинометаллических деталей.

Проведен расчет деформированного состояния элементов из резин различных марок (таблица 1). В качестве эластомерного элемента взят виброизолятор ВР-201 (рис.1).

Таблица 1 – Осадка виброизолятора для различных марок резины

Шифр резины	Тип каучука	G_0, МПа	Нагрузка, МПа	Осадка, мм
2959	НК	1,76	3	0,995
1378	СКИ+СКД	1,30		1,347
1224	НК	1,30		1,347
4з	СКИ-3	1,60		1,095
11-67Л	СКИ	1,50		1,168
11-59Л	СКИ-3	1,50		1,168
28Э	СКИ-3	1,70		1,03
310	СКИ-3	1,40		1,251
169	СКИ-3	1,50		1,168
51-1562	СКИ-3	0,78		2,245
51-1711	СКИ-3	1,30		1,347
51-1714	СКИ-3	2,00		0,875

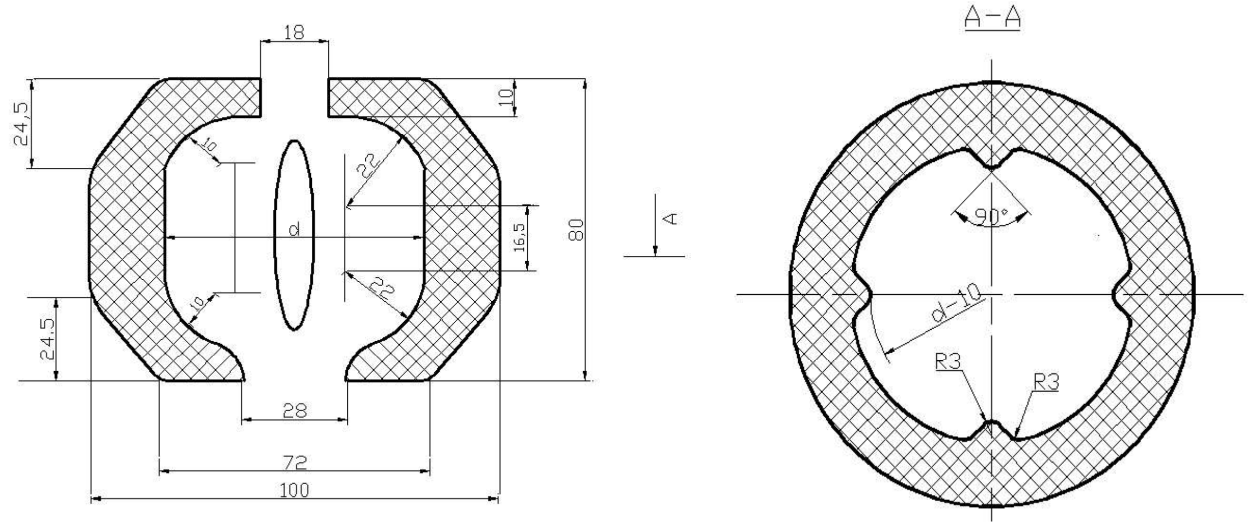

Рис. 1. Расчетная схема виброизолятора ВР-201

ВЫВОДЫ

Таким образом, в статье проведено исследование деформированного состояния элемента из эластомеров с различными механическими характеристиками. Применение моментной схемы конечного элемента позволило обойти сложности, возникающие при учете специфических свойств эластомерных деталей. Выявленные зависимости модуля сдвига от осадка могут быть применены при выборе марки резины эластомерного виброизолятора при проектировании инженерных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shard S. C. A Strai Energy Density Function for Compressible Rubber like Materials / S. C. Shard, N. W. Tschoegl // Trans. Soc. Rheology. – 1976. – V. 20, N 3. – P. 361-373.
2. Penn R. W. Volume Changes Accompanylug Extenslon of Rubber / R. W. Penn // Trans. Soc. Rheol. – 1970. – Vol. 14, N 4. – P. 507-517.
3. Дымников С. И. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов / С. И. Дымников, И. Р. Мейерс, А. Г. Эрдманис // Вопр. динамики и прочности. – 1983. – Вып. 40. – С. 98-108.
4. Черных К. Ф. Об учете сжимаемости резины / К. Ф. Черных, И. М. Шубина // Механика эластомеров : науч. тр. Кубан. гос. ун-та. – 1978. – Вып. 3. – С. 56-63.
5. Tong P. On the convergence of the finite element method for problems with singularity / P. Tong, T. H. H. Pian // Intern. J. Solids. and Struct. – 1973. – Vol. 9, N 3. – P. 313-321.
6. Malkus D. S. Finite elements with penalties in nonlinear elasticity / D. S. Malkus // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1980. –Vol. 16. – P. 121-126.
7. Oden I. T. Finite element methods for constrained problems in elasticity / I. T. Oden, N. Kikuchi // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – Vol. 18, N 5. – P. 701-725.
8. Zienkiewicz O. C. Reduced integration technique in general analysis of plates and schells / O. C. Zienkiewicz, J. Too, R. L. Taylor // Intern. J. Numerical Methods Eng. – 1971. – Vol. 3, N 3. – P. 275-290.
9. Fried I. Numerical integration in the finite element method / I. Fried // Comput. Struct. – 1974. – Vol. 4. – P. 921-933.
10. Oden I. T. On some generalization of the incremental stiffness relations for finite deformations of compressible and incompressible finite elements / I. T. Oden, J. E. Key // Nucl. Engng. Design. – 1971. – Vol. 15. – P. 121-134.
11. Кабриц С. А. Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала / С. А. Кабриц, В. М. Мальков, С. Е. Мансурова // Изв. РАН. Мех. тверд. тела – 2001. – № 1. – С. 38-47.

12. Копысов С. П. Параллельный разрывный метод Галеркина для некоторых задач теории упругости / С. П. Копысов, А. К. Новиков // Численные методы в математике и механике. – 2007. – № 3. – С. 44-47.
13. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2002. – 655 с.
14. Дырда В. И. Резиновые детали в машиностроении / В. И. Дырда, Е. Ф. Чижик. – Дніпропетровськ : Поліграфіст, 2000. – 581 с.
15. Потураев В. Н. Резина в горном деле / В. Н. Потураев, В. И. Дырда, В. П. Надутый. – М. : Недра, 1974. – 152 с.
16. Потураев В. Н. Резиновые и резинометаллические детали машин / В. Н. Потураев. – М. : Машиностроение, 1966. – 300 с.

REFERENCE

1. Shard, S.C. (1976), “A Strain Energy Density Function for Compressible Rubber like Materials”, *Trans. Soc. Rheology*, vol. 20, no. 3, pp. 361-373.
2. Penn, R.W. (1970), “Volume Changes Accompanylug Extenslon of Rubber”, *Trans. Soc. Rheol*, vol. 14, no. 4, pp. 507-517.
3. Dymnikov, S.I., Meyers, I.R. and Erdmanis, A.G. (1983), “Elastic potentials for weakly compressible elastomeric materials”, *Vopr. dinamiki i prochnosti*, issue 40, pp. 98-108.
4. Chernykh, K.F. and Shubina, I.M. (1978), “About the accounting of compressibility of elastomers”, *Mekhanika elastomerov*, issue 3, pp. 56-63.
5. Tong, P. and Pian, T.H.H. (1973), “On the convergence of the finite element method for problems with singularity”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 9, no. 3, pp. 313-321.
6. Malkus, D.S. (1980), “Finite elements with penalties in nonlinear elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 16, pp. 121-126.
7. Oden, I.T. and Kikuchi, N. (1983), “Finite element methods for constrained problems in elasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, no. 5, pp. 701-725.
8. Zienkiewicz, O.C., Too, J. and Taylor, R.L. (1971), “Reduced integration technique in general analysis of plates and schells”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, no. 3, pp. 275-290.
9. Fried, I. (1974), “Numerical integration in the finite element method”, *Computer Structure*, vol. 4, pp. 921-933.
10. Oden, I.T. and Key, J.E. (1971), “On some generalization of the incremental stiffness relations for finite deformations of compressible and incompressible finite elements”, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 15, pp. 121-134.
11. Kabrits, S.A., Mal’kov, V.M. and Mansurova, S.E. (2001), “Yhe nonlinear equations of a flat layer for three models of an elastomeric layer”, *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, no.1, pp. 38-47.
12. Kopysov, S.P. and Novikov, A.K. (2007), “Parallel razryvny method of Galerkin for some tasks of the theory of elasticity”, *Chislennye metody v matematike i mekhanike*, no.3, pp. 44-47.
13. Kirichevskiy, V.V. (2002), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [Method of final elements in mechanics of elastomers], Nauk. Dumka, Kiiv, Ukraine.
14. Dyrda, V.I. and CHizhik, E.F. (2000), *Rezinovye detali* [Rubber details], Poligrafist, Dnipropetrovs’k, Ukraine.
15. Poturaev, V.N., Dyrda, V.I. and Nadutyy, V.P. (1974), *Rezina v gornom dele* [Rubber in mining], Nedra, Moscow, Russia.
16. Poturaev, V.N. (1966), *Rezinovye i rezinometallicheskie detali mashin* [Rubber and rubber-metal details of engine], Mashinostroenie, Moscow, Russia.