

УДК 517.95+518.517

## **R-ФУНКЦИИ, ТВЭЛ С ПОЛИЗОНАЛЬНЫМ ОРЕБРЕНИЕМ ОБОЛОЧКИ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ**

<sup>1,2</sup>Максименко-Шейко К. В., <sup>1</sup>Шейко Т. И.

<sup>1</sup>*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина*

<sup>2</sup>*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, Харьков, 61000, Украина*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Для увеличения поверхности теплообмена в технике широко используется оребрение теплопередающих поверхностей. В ходе экспериментов с различными методами оребрения оболочек ТВЭЛов были разработаны более выгодные формы оребрения, так называемые полизональное и шевронное, реализацию которых предлагается выполнять на 3D-принтере. С точки зрения универсальности одним из наиболее перспективных выглядит функциональное представление с конструктивными возможностями теории R-функций. В статье приведены разработанные методики построения уравнений различных поверхностей оребрения на основе теории R-функций с их последующей реализацией на 3D-принтере и исследование гидродинамических и температурных полей при полизональном оребрении оболочки ТВЭЛа. Приведены результаты исследования поля скоростей и температурного поля для различных значений параметра закрутки.

*Ключевые слова: теория R-функций, метод Ритца, теплообмен, оболочка ТВЭЛа, полизональное и шевронное оребрение, 3D-принтер.*

## **R-ФУНКЦІЇ, ТВЕЛ З ПОЛІЗОНАЛЬНИМ ОРЕБРЕННЯМ ОБОЛОНКИ ТА ТЕПЛООБМІН ПРИ РУСІ РІДИНИ**

<sup>1,2</sup>Максименко-Шейко К. В., <sup>1</sup>Шейко Т. І.

<sup>1</sup>*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

<sup>2</sup>*Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,  
майдан Свободи, 4, Харків, 61000, Україна*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Для збільшення поверхні теплообміну в техніці широко використовується оребрення теплопередавальних поверхонь. Під час експериментів з різними методами оребрення оболонок ТВЕЛів були розроблені найбільш вигідні форми оребрення, так звані полізональне і шевронне, реалізацію яких пропонується виконувати на 3D-принтері. З погляду універсальності, одним з найбільш перспективних є функціональне представлення з конструктивними можливостями теорії R-функцій. У статті наведено розроблені методики побудови рівнянь різних поверхонь оребрення на основі теорії R-функцій з подальшою реалізацією на 3D-принтері та дослідження гідродинамічних і температурних полів при полізональному оребренні оболонки ТВЕЛа. Наведено результати дослідження поля швидкостей і температурного поля для різних значень параметра закрутки.

*Ключові слова: теорія R-функцій, метод Рітца, теплообмін, оболонка ТВЕЛа, полізональне і шевронне оребрення, 3D-принтер.*

## **R-FUNCTIONS, FUEL ELEMENT WITH POLYZONAL FINNING OF CLADDING AND HEAT TRANSFER AT LIQUID MOVING**

<sup>1,2</sup>Maksymenko-Sheiko K. V., <sup>1</sup>Sheiko T. I.

<sup>1</sup>*A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine,  
Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

<sup>2</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University,  
Svobody sq., 4, Kharkiv, 61022, Ukraine*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

The finning of heat-transmitting surfaces is widely used in technics for heat-exchange surface increasing. The finning forms are rather various. The finning not only increases a heat-exchange surface, but also renders the big influence at hydrodynamics of a stream, and thus at heat-emission factor. The

more favourable finning forms (so-called polyzonal and herring-bone) have been developed during experiments with various finning methods of fuel element claddings. The lacks of herring-bone surfaces are the high labour input and the cost price of manufacturing. These lacks can be removed due to the 3D-printing technology, since the advantages of 3D-printers using are the decrease of the cost price of production manufacturing, the reduction of terms of its occurrence in the market, modeling of objects of any form and complexity, the speed and high accuracy of manufacturing, the possibility of use of the various materials maintaining high temperature, intensive mechanical loadings and influence of harmful chemical substances. It is necessary to create the computer 3D-model of desirable object during preparation for 3D-printing. The analysis of classical representations has shown that their practical application is limited or demands significant efforts for construction of models of complex geometrical objects. One of the most perspective is the functional representation in which basis is the use of implicit mathematical functions language with constructive opportunities of the R-functions theory developed by academician V.L. Rvachev.

The developed techniques of construction of the equations of various finning surfaces at the R-functions theory basis and their subsequent 3D-realization are shown. The research of hydrodynamical and temperature fields at polyzonal finning of fuel element cladding are resulted.

The consecutive construction of the longitudinal, polyzonal and herring-bone finnings equations of the fuel element claddings allows to track the algorithm complication process due to corresponding superpositions in the initial equation which kind does not change. It is one of examples of advantage of the geometrical objects' analytical identification realized with the help of R-functions.

The results of the velocity and temperature fields research for various values of twisting parameter, testifying that the warming up in the intercostal zone increases with increase in value of twisting parameter, are shown.

*Keywords: R-functions theory, Ritz method, heat transfer, fuel element cladding, polyzonal and herring-bone finning, 3D-printer.*

## ВВЕДЕНИЕ

Для увеличения эффективного коэффициента теплопередачи в технике широко используется оребрение теплопередающих поверхностей. Форма оребрения весьма разнообразна. Применяют продольные, поперечные, спиральные ребра, ребра в виде шипов и т.д. Подробные сведения о различных способах оребрения и технологии изготовления ребристых поверхностей можно найти в работах [1-3]. Оребрение не только увеличивает поверхность теплообмена, но и оказывает большое влияние на гидродинамику потока, а тем самым и на коэффициент теплоотдачи. В ходе экспериментов с различными методами оребрения оболочек ТВЭЛов были разработаны более выгодные формы оребрения, так называемые полизональное и шевронное. При шевронном оребрении вся поверхность оболочки делится на четыре, шесть или восемь секторов, и на соседних секторах спирали расположены симметрично относительно продольной оси.

Недостатком шевронных поверхностей является высокая трудоемкость и себестоимость изготовления. Благодаря технологии 3D-печати, эти недостатки можно устранить, т.к. преимущества использования 3D-принтеров – это снижение себестоимости изготовления продукции, сокращение сроков ее появления на рынке, моделирование объектов любой формы и сложности, быстрота и высокая точность изготовления, возможность использования различных материалов, среди которых бетон, гидрогель, дерево, металл, термопластики, выдерживающие высокую температуру, интенсивные механические нагрузки и воздействие вредных химических веществ, шоколад, и даже живые клетки. Существует много технологий 3D-печати: стереолитография, ламинирование, селективное лазерное спекание, послойное наплавление FDM (Fused Deposition Modeling). Печать в формате 3D уже получила широкое распространение: автомобилестроение с оригинальным дизайном, авиамоделирование, машиностроение, строительство, оружие, медицина.

В процессе подготовки к печати на 3D-принтере необходимо создать компьютерную 3D-модель желаемого объекта [4-7]. Анализ классических представлений показал, что их практическое применение ограничено или требует значительных усилий для построения моделей сложных геометрических объектов. С точки зрения универсальности, одним из наиболее перспективных выглядит функциональное представление, в основе которого лежит

использование языка неявных математических функций с конструктивными возможностями теории R-функций, разработанной академиком В. Л. Рвачевым [4].

**Целью работы** является разработка методик и построение уравнений различных поверхностей оребрения на основе теории R-функций с их последующей реализацией на 3D-принтере и исследование гидродинамических и температурных полей при полизональном оребрении оболочки ТВЭЛа.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В работе были использованы R-операции систем  $\{R_0\}$  и суперпозиции с периодическими

функциями  $\mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}$  для построения уравнений,

соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, и

$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ \frac{(2k-1)n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}$  для построения уравнений, соответствующих

геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа [6].

#### Математические модели оболочек ТВЭЛов с оребрением

1. Оболочка ТВЭЛа с продольным оребрением (рис. 1, а).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(sx-2)^2}{0,56^2} - \frac{sy^2}{0,2^2} \vee_0 4-x^2-y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} sx = r \cos \mu, \\ sy = r \sin \mu; \end{cases} \quad \mu = \frac{8}{\pi n o l} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta n o l}{2}}{(2k-1)^2}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x};$$

$n o l = 20$  – количество ребер в оболочке.

2. Оболочка ТВЭЛа с полизональным оребрением (рис. 1, б).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(sx-2)^2}{0,56^2} - \frac{sy^2}{0,2^2} \vee_0 4-x^2-y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad \begin{cases} sx = rs \cos \mu s, \\ sy = rs \sin \mu s; \end{cases}$$

$$\mu s = \frac{8}{\pi n o l} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta s n o l}{2}}{(2k-1)^2}; \quad rs = \sqrt{xs^2 + ys^2}; \quad \theta s = \arctg \frac{ys}{xs};$$

$$\begin{cases} xs = x \cos \frac{f\hat{t}}{n} + y \sin \frac{f\hat{t}}{n}, \\ ys = y \cos \frac{f\hat{t}}{n} - x \sin \frac{f\hat{t}}{n}; \end{cases} \quad f\hat{t} = \frac{2\pi z}{10}, \quad n = 3.$$

3. Оболочка ТВЭЛа с горизонтальным шевронным оребрением (рис. 1, в).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(sx-2)^2}{0,56^2} - \frac{sy^2}{0,2^2} \vee_0 4-x^2-y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad \begin{cases} sx = rs \cos \mu s, \\ sy = rs \sin \mu s; \end{cases}$$

$$\mu s = \frac{8}{\pi n o 1} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta s n o 1}{2}}{(2k-1)^2}; \quad r s = \sqrt{x s^2 + y s^2}; \quad \theta s = \arctg \frac{y s}{x s};$$

$$\begin{cases} x s = x \cos \frac{f i}{n l} + y \sin \frac{f i}{n l}, \\ y s = y \cos \frac{f i}{n l} - x \sin \frac{f i}{n l}; \end{cases} \quad f i = \frac{4 h}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\pi z}{h}}{(2k-1)^2}, \quad h=3, \quad n l=3.$$

4. Оболочка ТВЭЛа с вертикальным шевронным оребрением (рис. 1, г).

$$\omega = \left( 1 - \frac{(s x - 2)^2}{0,56^2} - \frac{s y^2}{0,2^2} \vee_0 4 - x^2 - y^2 \right) \wedge_0 7,5^2 - z^2 \geq 0, \quad \begin{cases} s x = r o s \cos \mu 1, \\ s y = r o s \sin \mu 1; \end{cases}$$

$$r o s = \sqrt{x s^2 + y s^2}; \quad \theta s = \arctg \frac{y s}{x s}; \quad \mu 1 = \frac{8}{\pi n o 1} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta s n o 1}{2}}{(2k-1)^2};$$

$$\begin{cases} x s = x x \cos \frac{f i}{n} + y y \sin \frac{f i}{n}, \\ y s = y y \cos \frac{f i}{n} - x x \sin \frac{f i}{n}; \end{cases} \quad \begin{cases} x x = r \cos \mu 2, \\ y y = r \sin \mu 2; \end{cases} \quad \mu 2 = \frac{8}{\pi n o 2} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1) \frac{\theta n o 2}{2}}{(2k-1)^2};$$

$$f i = \frac{2 \pi z}{20}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x};$$

$n o 2 = 6$  – количество секторов.

На рис. 1, а-г представлена визуализация построенных уравнений оболочек ТВЭЛов с оребрениями в RFPreview [5].

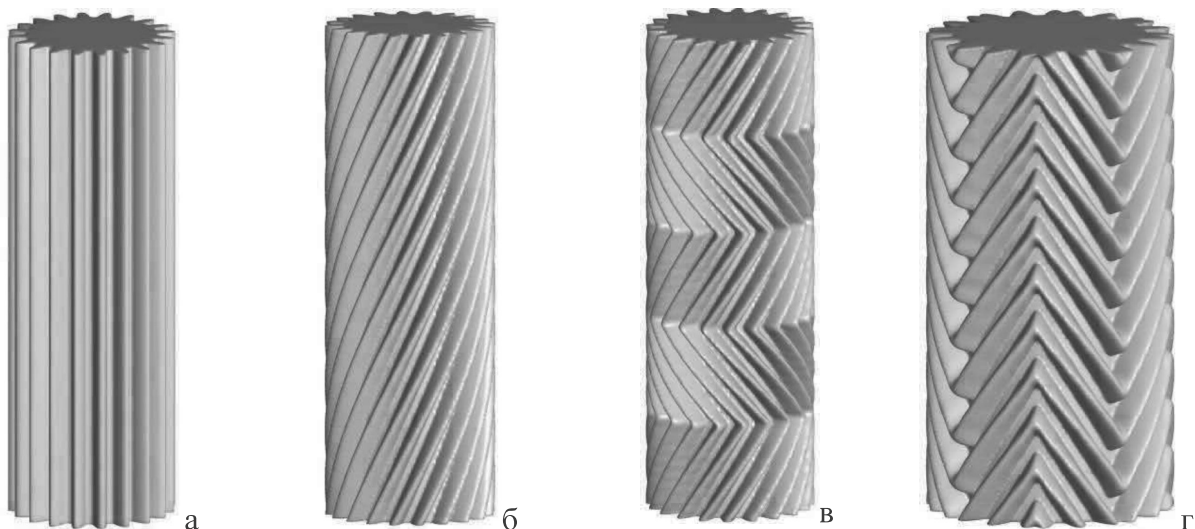


Рис. 1. Оболочки ТВЭЛов с оребрениями: а – продольное, б – поперечное ; в, г – шевронное оребрение

На рис. 2 представлена реализация на 3D-принтере построенного уравнения оболочки ТВЭЛа с шевронным оребрением.

Последовательное построение уравнений продольного, поперечного и шевронного оребрений оболочек ТВЭЛов позволяет проследить процесс усложнения алгоритма за счет

соответствующих суперпозиций в уравнении (1), вид которого не изменяется. Это является одним из примеров преимущества аналитической идентификации геометрических объектов, реализованной с использованием R-функций.



Рис. 2. Модель оболочки ТВЭЛа с шевронным оребрением, изготовленная на 3D-принтере

Рассмотрим задачу теплообмена при ламинарном течении жидкости для ТВЭЛа с полизональным оребрением оболочки (рис. 3).

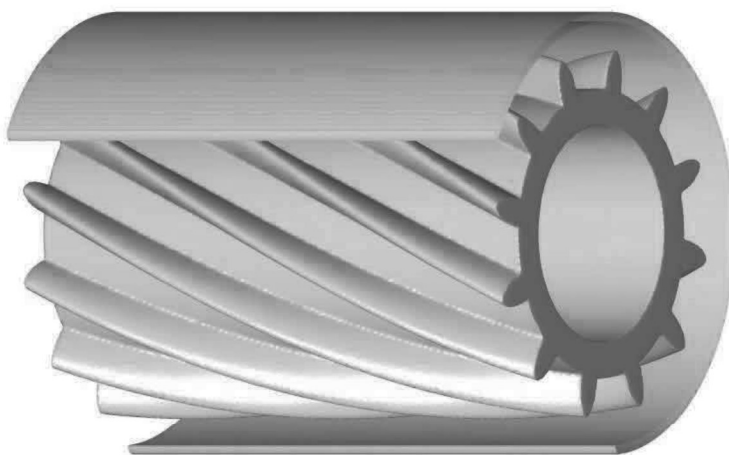


Рис. 3. ТВЭЛ с полизональным оребрением оболочки

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости, при постоянных физических свойствах жидкости и температуры имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{DT}{D\tau} = a\Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}, \\ \operatorname{div}\vec{V} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \nabla)$  – субстанциальная (или полная) производная;  $\mu\Phi$  – диссипативная функция;  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  – коэффициент температуропроводности;  $c_p$  – теплоемкость среды;  $q_V$  – мощность внутренних источников тепла.

Инвариантная форма записи уравнений (2) позволяет, используя аппарат тензорного анализа, переходить в новую систему координат, в нашем случае – в криволинейную неортогональную систему

$$\begin{cases} x = \hat{x} \cos \alpha z - \hat{y} \sin \alpha z, \\ y = \hat{x} \sin \alpha z + \hat{y} \cos \alpha z, \\ z = z. \end{cases}$$

В винтовой системе координат получим (2) в виде [6]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) T &= a \Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu \Phi}{\rho c_p}; \\ \frac{\partial V^1}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^1 - 2\alpha V^2 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{x} \frac{V^{32}}{f} &= \frac{1}{\rho} \left( -(1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu \left[ \Delta V^1 - 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \right) - 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^1 + 2 \frac{\alpha^3 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right]; \\ \frac{\partial V^2}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^2 + 2\alpha V^1 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{y} \frac{V^{32}}{f} &= \frac{1}{\rho} \left( \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu \left[ \Delta V^2 + 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} \right) + 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^1}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^2 - 2 \frac{\alpha^3 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right]; \\ \frac{\partial V^3}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^3 - \frac{\alpha^2 V^3}{f} (\hat{x} V^1 + \hat{y} V^2) &= \frac{\sqrt{f}}{\rho} \left( -\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu \left[ \Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f} \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\alpha^2 (2 - \alpha^2 \hat{x}^2 - \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V^3 \right]; \\ \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \right.$$

где

$$f = 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2, \quad (\vec{V} \nabla) = V^1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + V^2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \frac{V^3}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + 2\alpha \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial z} - 2\alpha \hat{x} \frac{\partial^2}{\partial \hat{y} \partial z} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right).$$

Граничное условие для скорости формулируется как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке:  $\vec{V}|_{\Omega} = 0$ . Граничные условия для поля температуры на стенке могут быть заданы различным образом:

$$T|_{\partial\Omega} = T_i, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = -\frac{q}{\lambda}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial n} + hT \right) \Big|_{\partial\Omega} = q_c, \quad \begin{cases} T|_{\partial\Omega+0} = T|_{\partial\Omega-0}; \\ \lambda_{жс} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega+0} = \lambda_{см} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega-0}. \end{cases}$$

В криволинейной неортогональной системе координат входящие в граничные условия производные по нормали с учетом нормализованности функции  $\omega_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  имеют вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = (1 + \alpha^2 \hat{x}_2^2) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_1} + (1 + \alpha^2 \hat{x}_1^2) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_2} - \alpha^2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \hat{x}_1} \right) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (3)$$

А полученные в работе [6] уравнения

$$\begin{aligned} (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 V^3}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \\ - \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)}{f^2} V^3 = -\frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$-\left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \right) \right] = -\frac{V^3}{a \sqrt{f}} C. \quad (5)$$

Таким образом, от трехмерных краевых задач приходим к двумерным задачам, для решения которых может быть применен метод Ритца в сочетании с методом R-функций [4, 6]. Положительная определенность операторов задач (4), (5) доказана в [6].

Минимизируем функционалы, эквивалентные краевым задачам (4) и (5),

$$I_1 = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} + KV^2 - 2FV \right] d\hat{x} d\hat{y},$$

где

$$K = \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2}; \quad F = -\frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad f = \sqrt{1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2};$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} - 2GT1 \right] d\hat{x} d\hat{y} + \\ + 2 \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T0}{\partial \hat{x}} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial T0}{\partial \hat{y}} - \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \left( \frac{\partial T0}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T0}{\partial \hat{y}} \right) \right] d\hat{x} d\hat{y}, \end{aligned}$$

где  $G = -\frac{V^3}{a \sqrt{f}} C$ . На внешней стенке ( $f_1 = (R^2 - x^2 - y^2)/2R = 0$ )  $T|_{\partial\Omega_1} = 0$ , на внутренней ( $\omega = 0$ )  $T|_{\partial\Omega_2} = 1$ . Структура решения задачи (4) имеет вид  $V^3 = \omega_1 \Phi_1$ , а задачи (5) –  $T = T0 + T1$ ;  $T0 = \frac{f_1}{f_1 + \omega_2}$ ;  $T1 = \omega_1 \Phi_2$ , где  $\omega_1 = f_1 \wedge_0 \omega_2$ . При различных значениях параметра закрутки  $\alpha$ , получаем результаты, приведенные на рис. 4.

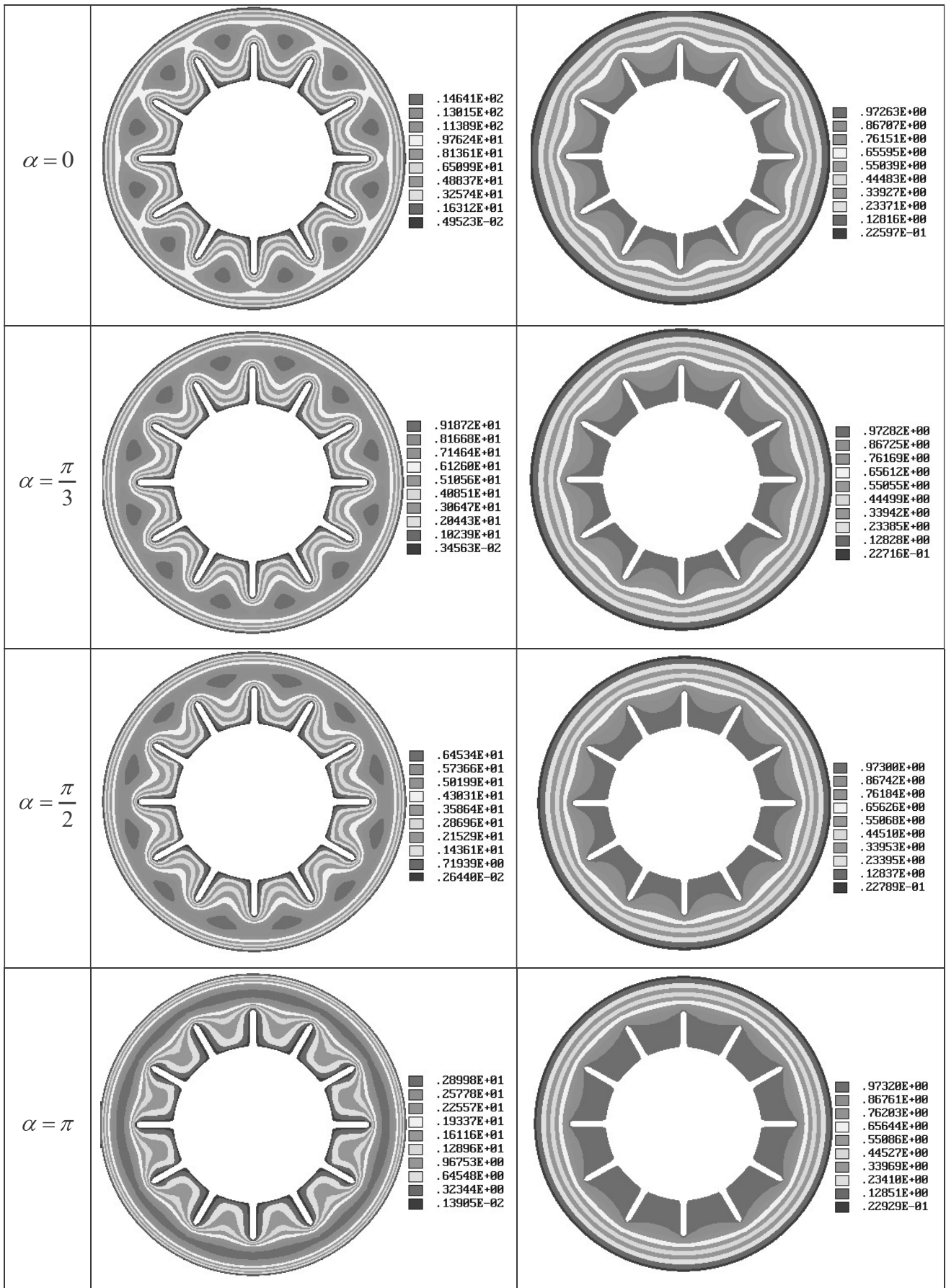


Рис. 4. Распределения поля скоростей (слева) и температур (справа) при различных значениях параметра закрутки



Результаты, представленные на рис. 4, свидетельствуют о том, что с увеличением значения параметра закрутки  $\alpha$  увеличивается прогревание в межреберной зоне.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. Москва: Атомиздат, 1974. 367 с.
2. Андреев П. А., Гремилов Д. И., Федорович Е. Д. Теплообменные аппараты ядерных энергетических установок. Н.М. Синева (ред.). Ленинград: Судостроение, 1969. 352 с.
3. Антуфьев В. М. Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева. Москва-Ленинград: Энергия, 1966. 184 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. Думка, 1982. 552 с.
5. Лисін Д. О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview»: Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 45951. 2012.
6. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
7. Чопоров С. В., Гоменюк С. И., Лисняк А. А., Аль-Омари М. А. В., Алатамнех Х. Х. Триангуляция поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2016. № 3(58). С. 542–549.

### REFERENCES

1. Petukhov, B. S., Genin, L. G. & Kovalev, S. A. (1974). A heat exchange is in nuclear power installations. Moscow: Atomizdat.
2. Andreyev, P. A., Gremilov, D. I. & Fedorovich, Ye. D. (1969). Heat-exchange vehicles of nuclear power installations. Leningrad: Sudostroyeniye.
3. Antufyev, V. M. (1966). Efficiency of various forms of convective heating surfaces. Moscow-Leningrad: Energiya.
4. Rvachev, V. L. (1982). Theory of R-functions and some of its applications. Kiev: Nauk. dumka.
5. Svidotstvo pro reyeestratsiyu avtorskogo prava na tvir № 45951. Computer program "Visualization System and building a grid on the surface of geometric objects that are described by means of mathematical theory of R-functions "RFPreview", Lisin, D. O., 2012.
6. Maksimenko-Sheyko, K. V. (2009). R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields. Kharkov: IPMash NAN Ukrainy.
7. Choporov, S. V., Gomenyuk, S. I., Lisnyak, A. A., Al-Omari, M. A. V. & Alathamneh, H. H. (2016). Triangulation of surfaces under a hybrid parametric and implicit representation. *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta*, No. 3(58), pp. 542-549.

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО СЛОЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Ободан Н. И., д. т. н., Адлуцкий В. Я., к. ф.-м. н., Козакова Н. Л.

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,  
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

kkt\_fpm@ukr.net

В постановке плоской геометрически нелинейной теории упругости рассмотрена задача устойчивости двухслойной арочной системы под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по границе верхнего слоя. На линии раздела слоев реализуются условия полного сцепления, гладкого контакта и отставания. Задача сформулирована в вариационной постановке. Проведен численный анализ критических нагрузок и возможных равновесных конфигураций системы в зависимости от значений ее геометрических и физических параметров. Основное внимание уделено изучению равновесных форм с выщелкнутым нижним слоем.

*Ключевые слова: плоская геометрически нелинейная задача теории упругости, двухслойная система, контактное взаимодействие, потеря устойчивости, выщелкивание.*