

11. Demianenko, A. G. (2016). Doslidjennia dynamiky pidsilenih priamokutnih plastinok z rukhomim inertsiionnim navantahzenniam. Vibratsiy v tekhnitsi ta tekhnologiiakh, No. 3(83), pp. 35-39.
12. Demianenko, A. G. (2013). Modified Krylov functions and their application in problems of the dynamics of elastic systems with a moving inertial load. Theoretical Foundation of Civil Engineering, Vol. 21, pp. 205-210.
13. Demianenko, A. G. (2016). Some features of the mathematical models of the problems of the dynamics of elastic objects with moving inertial loads and their research on the basis of the nonclassical method of separating the variables. Zbirnik materialiv 12 vidkritoiy konferensiy IMFS, pp. 68-69.
14. Dotsenko, P. D. (1988). Dynamics of systems carrying a mobile distributed load (Unpublished doktor thesis). Kharkiv.
15. Kalenyuk, P. I. & Nytrebych, Z. M. (2002). Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol metod. L'viv: Vydavnytstvo Natsional'noho universytetu "L'vivs'ka politekhnika".
16. Kiba, S. P. & Demianenko, A. G. (1991). Generalization of the method of separation of variables and some of its application in mechanics. Kyiv: NMK VO MOU.
17. Panovko, Ia. G. (1948). A historical sketch of the development of the theory of the dynamic action of a moving load. Trudi Leningr. KVVIA, Iss. 17, pp. 8-38.
18. Serazutdinov, M. N. (1975). The effect of a uniformly distributed movable load on the plate. Trudi seminaru po teorii obolochek. Kazan, pp. 156-163.
19. Iiakuchev, N. Z. (1972). Dynamics of deformable systems under the influence of moving loads. Part 1. Beams, rods under the influence of moving loads. Issledovaniia po teorii plastin i obolochek, No. 8, pp. 3-21.
20. Steuding, H. (1934). Die Schwingung von Trägern bei bewegten Lasten. Jng. Acch., pp. 275-305.
21. Housner, G. W. (1952). Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, Vol. 19, No. 2, pp. 205-209.
22. Schallenkamp, A. (1937). Schwingungen von Trägers bei bewegten Lasten. Ing. Arch., Vol. 8, pp. 35-42

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Каиров А. С., д. т. н., профессор, Власов О. И., Латанская Л. А., к. ф.-м. н., доцент

*Национальный университет кораблестроения,
просп. Героев Украины, 9, г. Николаев, 54025, Украина*

alex-kairov@yandex.ru

Исследованы свободные колебания упругих многослойных ортотропных цилиндрических оболочек вращения с присоединенными твердыми телами. Разработана уточненная математическая модель колебаний, учитывающая конструктивную неоднородность оболочки. Задача решается в линейной постановке методом Ритца. Приведены результаты расчета собственных частот и форм свободных колебаний оболочечной системы. Выполнено сопоставление полученных данных с численными результатами для аналогичных задач.

Ключевые слова: свободные колебания, цилиндрическая многослойная оболочка, конструктивная неоднородность, присоединенные твердые тела, собственные частоты и формы колебаний, вариационный метод Ритца.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРІДНИХ БАГАТОШАРОВИХ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Каіров О. С., д. т. н., професор, Власов О. І., Латанська Л. О., к. ф.-м. н., доцент

*Національний університет кораблебудування,
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025, Україна*

alex-kairov@yandex.ru

Досліджено вільні коливання пружних багатошарових ортотропних циліндричних оболонок обертання з приєднаними твердими тілами. Розроблена уточнена математична модель коливань, що враховує структурну неоднорідність оболонки. Задача розв'язується в лінійній постановці методом Рітца. Наведено результати розрахунку власних частот і форм вільних коливань оболонкової системи. Виконано порівняння отриманих даних з чисельними результатами для аналогічних задач.

Ключові слова: вільні коливання, циліндрична багатошарова оболонка, конструктивна неоднорідність, приєднані тверді тіла, власні частоти та форми коливань, варіаційний метод Рітца.

FREE VIBRATIONS OF CONSTRUCTIONAL NON-HOMOGENEOUS MULTILAYER ORTHOTROPIC COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS

Kairov A. S., D. Sc. in Engineering, professor, Vlasov O. I., assistant,
Latanskaya L. A., Ph. D. in Physics and Maths., associate professor

*National University of shipbuilding,
av. of Heroes of Ukraine, 9, Mykolayiv, 54025, Ukraine*

alex-kairov@yandex.ru

Multilayer composite shells constructions are widespread in modern technic. That is why the problems which deal with the constructional non-homogeneous shells oscillation is rather actual. The presence of attached solid bodies, constructional features and composite orthotropic material creates a local inertial inhomogeneity and essential influence on the shells dynamic characteristics.

The main aim of this work is to investigate the composite orthotropic material, the direction of reinforcing fibers layers and the attached solid bodies influence on the thin rotation shells oscillation forms and frequencies.

The influence of reinforcing fibers orientation on the shells oscillations amplitudes and frequencies has been investigated by means of the new developed calculation method. The solution of this problem has been based on the Ritz method and developed mathematical model usage. The shells stress-strained state has been considered on the base Kirghof-Lyav's linear hypothesis. According to the Ostrogradsky-Hamiltons principle the problems solution is reduced to the variational equality. In this equality the Lagrange's functional for the non-homogeneous shells system consists of the sum of the shell functional and attached solid bodies functions addition. The main problem of the research is simplified by the Kholetsky matrix method usage. Thus the shells system oscillation natural frequencies and forms are calculated by the combination of Kholetsky and Hausholder's matrix method usage for QR reverse iterations. The obtained frequencies have also been compared with the results of calculation, based on ANSYS program and show good convergence.

The numerical results achieved on the base of the developed mathematical model show that the location of orthotropic layers and attached solid bodies sharply influence the thin shells oscillation forms and frequencies. The new dependences and mechanical effects, caused by the shells constructional non-homogeneity are rather important and should be used in practice.

Key words: free vibrations, cylindrical multilayer shell, constructional non-homogeneity, attached solid bodies, natural frequencies and modes of vibrations, variation Ritz method.

ВВЕДЕНИЕ

Многослойные ортотропные оболочки из композиционных материалов в качестве элементов конструкций находят широкое применение во многих отраслях современной техники. Знание динамических характеристик таких объектов позволяет отслеживать резонансные режимы их работы и напряженно-деформированное состояние в условиях воздействия изменяющихся во времени нагрузок и, тем самым, предотвратить возникновение аварийных ситуаций. Учет влияния внутренней структурной неоднородности материала и присоединенных твердых тел

на амплитудно-частотные характеристики собственных колебаний оболочечных элементов является актуальной задачей и требует построения уточненных математических моделей.

Предметом исследования является влияние дискретной структуры материала и присоединенных твердых тел на частоты и формы свободных колебаний тонкостенных многослойных композитных оболочек вращения, армированных однонаправленными высокопрочными волокнами.

Обзор исследований данной проблемы и полученные результаты решения конкретных задач достаточно полно отражены в известных публикациях [1, 3-7, 10, 13, 14]. Решению задач собственных колебаний изотропных оболочек с присоединенными твердыми телами посвящены работы [2, 9]. В [8, 11] приведен обзор результатов экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния и колебаний композитных оболочек из слоистых материалов.

Анализ приведенных работ позволяет сделать вывод, что для исследования колебаний слоистых конструкций чаще всего используются численные методы, а именно метод конечных элементов. С использованием вариационных методов и в аналитическом виде решения таких задач получены только для слоистых пластин и оболочек канонической формы в плане. Следовательно, разработка методов решения динамических задач оболочек неоднородной по толщине структуры со сложной формой плана является актуальной проблемой.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим свободные колебания оболочки вращения постоянной толщины h , состоящей из произвольного числа жестко связанных между собой ортотропных слоев толщиной h_i , армированных однонаправленными высокопрочными волокнами, расположенными, в общем случае, под углом ψ к осям координат. Принята криволинейная ортогональная система координат (α_1, α_2, z) , где ось α_1 направлена вдоль образующей, ось α_2 – в окружном направлении. На поверхности оболочки в точках $\Omega_\nu(\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)})$ могут располагаться жестко присоединенные твердые тела с массами M_ν ($\nu = \overline{1, Q}$). Предполагаем, что для всей рассматриваемой ортотропной многослойной оболочки выполняется гипотеза прямой нормали. Деформации слоев подчиняются обобщенному закону Гука. В произвольной точке каждого слоя существует плоскость упругой симметрии, параллельная касательной плоскости и координатной поверхности. Главные радиусы и кривизны слоев не изменяются по толщине. Для всех слоев выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява.

В качестве базисной принимаем срединную поверхность оболочки, смещение точек которой характеризуется вектором перемещений $\bar{u}^0 = (u_1, u_2, u_3)$. Меридиан базисной поверхности описывается уравнением $R = r(\xi)$, где ξ – ось вращения оболочки.

Перемещения и деформации в i -ом слое рассматриваемой оболочки вдоль координатных линий записываются в виде:

$$u_1^{(i)} = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + z_i \theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_2^{(i)} = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + z_i \theta_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_3^{(i)} = u_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1)$$

$$e_1^{(i)} = e_1(\alpha_1, \alpha_2) + z_i e_4(\alpha_1, \alpha_2), \quad e_2^{(i)} = e_2(\alpha_1, \alpha_2) + z_i e_5(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$e_3^{(i)} = e_3(\alpha_1, \alpha_2) + 2z_i e_6(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2)$$

где u_1, u_2, u_3 – амплитудные значения меридионального, окружного и нормального перемещений точек срединной поверхности ($z=0$); e_1, e_2, \dots, e_6 – компоненты перемещений срединной поверхности i -го слоя оболочки; z^i – расстояния от базисной поверхности до i -го слоя; $\theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \theta_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – углы поворота нормали к базисной поверхности оболочки относительно координатных осей.

Из обобщенного закона Гука для i -го слоя оболочки с учетом равенства $\sigma_z = 0$ и уравнений (1), (2) находим

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(i)} \\ \sigma_{22}^{(i)} \\ \sigma_{12}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(i)} & B_{12}^{(i)} & B_{16}^{(i)} \\ B_{12}^{(i)} & B_{22}^{(i)} & B_{26}^{(i)} \\ B_{16}^{(i)} & B_{26}^{(i)} & B_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1^{(i)} \\ e_2^{(i)} \\ e_3^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{11}^{(i)} &= \frac{E_1^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, & B_{12}^{(i)} &= \frac{\nu_{12}^{(i)} E_1^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} = \frac{\nu_{21}^{(i)} E_2^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, \\ B_{22}^{(i)} &= \frac{E_2^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}}, & B_{66}^{(i)} &= G_{12}^{(i)}, & B_{16}^{(i)} &= B_{26}^{(i)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $B_{11}^{(i)}, B_{12}^{(i)}, B_{16}^{(i)}, B_{26}^{(i)}, B_{66}^{(i)}$ – удельные коэффициенты упругости материала ортотропных слоев оболочки; $\sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}$ – напряжения в плоскости i -го слоя; $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \nu_{21}^{(i)}, \nu_{12}^{(i)}, G_{12}^{(i)}, \rho^{(i)}$ – механические характеристики и плотность материала i -го слоя, для которых выполняются соотношение $E_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} = E_2^{(i)} \nu_{21}^{(i)}$.

Аналогичным образом получим выражения усилий и моментов:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь

$$C_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{pq}^{(i)} dz, \quad K_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{pq}^{(i)} z dz, \quad D_{pq} = \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{pq}^{(i)} z^2 dz \quad (6)$$

$$(p, q = 1, 2, 6),$$

где C_{pq}, K_{pq}, D_{pq} – обобщенные коэффициенты упругости; $N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}$ – внутренние усилия и моменты многослойной оболочки. При этом из (4) и (6) следует, что $C_{16} = C_{26} = 0, K_{16} = K_{26} = 0, D_{16} = D_{26} = 0$. Для оболочки симметричного строения $K_{pq} = 0$.

Соотношения упругости в форме (6) записываются также и для оболочек, у которых главные направления упругости повернуты вокруг оси z на угол ψ и не совпадают с направлениями

координатных линий (α_1, α_2) . В этом случае характеристики ортотропного материала i -го слоя записываются в виде [1, 12]:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11}^{(i)} &= B_{11}^{(i)} \cos^4 \psi + 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + B_{22}^{(i)} \sin^4 \psi, \\ \bar{B}_{12}^{(i)} &= B_{12}^{(i)} + [B_{11}^{(i)} + B_{22}^{(i)} - 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi, \\ \bar{B}_{22}^{(i)} &= B_{11}^{(i)} \sin^4 \psi + 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + B_{22}^{(i)} \cos^4 \psi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{B}_{66}^{(i)} = B_{66}^{(i)} + [B_{11}^{(i)} + B_{22}^{(i)} - 2(B_{12}^{(i)} + 2B_{66}^{(i)})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi.$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Согласно принципа Остроградского-Гамильтона, решение сводится к вариационному уравнению [2]

$$\delta \mathcal{E}(\alpha_1, \alpha_2, z) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя выражение для функционала энергии \mathcal{E} по толщине i -го слоя и суммируя полученные результаты по всему пакету слоев оболочки, получим двумерную форму вариационного уравнения Лагранжа (8) $\delta \mathcal{E}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$.

Для входящих в функцию Лагранжа $\mathcal{E} = K - \Pi$ потенциальной и кинетической энергий в общем случае получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iint_S \{ C_{11} e_1^2 + 2C_{12} e_1 e_2 + C_{22} e_2^2 + C_{66} e_3^2 + \\ &+ 2[K_{11} e_1 e_4 + K_{12} (e_1 e_5 + e_2 e_4) + K_{22} e_2 e_5 + 2K_{66} e_3 e_6] + \\ &+ D_{11} e_4^2 + 2D_{12} e_4 e_5 + D_{22} e_5^2 + 4D_{66} e_6^2 \} A_1 A_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_2, \\ K &= \frac{\omega^2}{2} \left(\sum_{i=1}^N \rho^{(i)} h_i \iint_S \sum_{k=1}^3 (u_k^{(i)})^2 A_1 A_2 \partial \alpha_1 \partial \alpha_2 + \sum_{\nu=0}^Q \left\{ M_\nu \sum_{k=1}^3 [u_{k\nu}(\Omega_\nu)]^2 \right\} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы; S и ω – площадь интегрируемой поверхности и круговая частота собственных колебаний оболочки.

Компоненты перемещений базовой поверхности аппроксимируются системой линейно независимых координатных функций $\varphi_{mn}^{(k)}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u_k = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}^{(k)} \varphi_{mn}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (10)$$

где $C_{mn}^{(k)}$ – коэффициенты собственных форм колебаний; t – текущее время.

Деформации оболочки запишутся в виде

$$e_p = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}^{(k)} \Phi_{pmn}^{(k)} \quad (p = \overline{1, 6}). \quad (11)$$

Базисные функции деформаций $\Phi_{pmn}^{(k)}$ зависят от геометрических параметров оболочки [9].

После применения процедуры Рунге к системе (8), преобразования соотношений (9) с учетом зависимостей (1)-(7), (10), (11) и разделения переменных, получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 C_{mn}^{(k)} \left(A_{mn}^{(\eta k)} - \lambda^2 B_{mn}^{(\eta k)} \right) = 0 \quad (\eta = \overline{1,3}). \quad (12)$$

Здесь $A_{mn}^{(\eta k)}$, $B_{mn}^{(\eta k)}$ – интегральные операторы оболочечной системы [9], при вычислении которых применяется численное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса.

Система уравнений (11) позволяет свести задачу (8) к бесконечной последовательности одномерных задач на собственные значения, из решения которых определяются собственные частоты и формы колебаний. Собственные значения и собственные вектора задачи (12) определяются комбинированным методом Хаусхольдера-QR-обратных итераций с помощью разложения Холецкого [15].

Из приведенного решения следует, что техника построения разрешающих уравнений задачи о собственных колебаниях ортотропных слоистых оболочек и методика решения этих уравнений аналогичны соответствующим приемам для случая изотропных оболочек [9]. Однако здесь имеются некоторые особенности, связанные с многослойностью и ортотропией материала, которые играют важную роль при решении конкретных задач.

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные расчеты частот и форм свободных колебаний проводились для ортотропной цилиндрической оболочки вращения с относительными характерными размерами $R/h = 125$, $L/R = 2,3$, выполненной в виде монослоя из однонаправленного углепластика Р-313 с волокном Торнелл-300 [10]. Общая толщина пакета слоев составляет ($h = 0,6$ мм). Для $E_1 = 142$ ГПа; $E_2 = 9,13$ ГПа; $\nu_1 = 0,32$; $\nu_2 = 0,02$; $G_{12} = 5,49$ ГПа; $\rho = 1,55 \times 10^3$ кг/м³.

На рис. 1 для различных граничных условий представлены графики, характеризующие изменения значения безразмерного частотного параметра $\bar{\omega} = \omega(\psi) / \omega(0)$ от угла армирования ортотропных слоев. При этом $\omega(\psi)$ соответствует низшей частоте колебаний оболочки, армированной под углом ψ . Приведенные зависимости соответствуют следующим граничным условиям: 1 – шарнирное опирание, 2 – шарнирное опирание – жесткое закрепление, 3 – жесткое закрепление, 4 – консольное закрепление. Минимальной частоте консольно закрепленной оболочки соответствует волновое число в окружном направлении $n = 4$, остальным граничным условиям – $n = 6$. Расхождение результатов счета с использованием предложенной расчетной методики с данными, полученными пакетом прикладных программ ANSYS, не превышает 3,4%. Рис. 2 характеризует зависимость влияния угла армирования на величину приведенных упругих характеристик $b_{pq} = \bar{B}_{pq} / E_1$ для жестко закрепленной оболочки. Приведенные кривые соответствуют следующим характеристикам: 1 – b_{11} , 2 – b_{22} , 3 – b_{12} , 4 – b_{66} . Как следует из приведенных данных, максимум первой частоты для жестко закрепленной оболочки соответствует углу $\psi = 44^\circ$, который, как показал анализ энергетического состояния, характеризуется равенством энергий, связанных с деформациями растяжения-сжатия и сдвига. Минимальной низшей собственной частоте соответствует $\psi = 0^\circ$ и $n = 7$. Для всех значений углов армирования возрастание первой частоты колебаний сопровождается уменьшением волнового числа n .

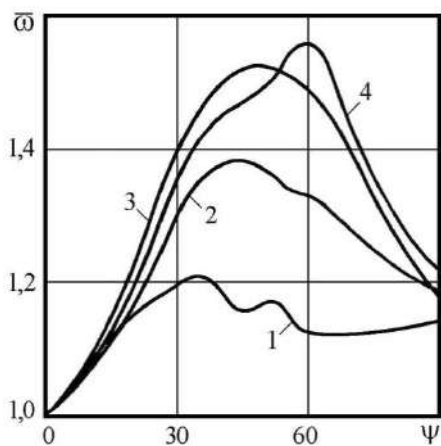


Рис. 1. Влияние угла армирования на величину относительного частотного параметра $\bar{\omega}$

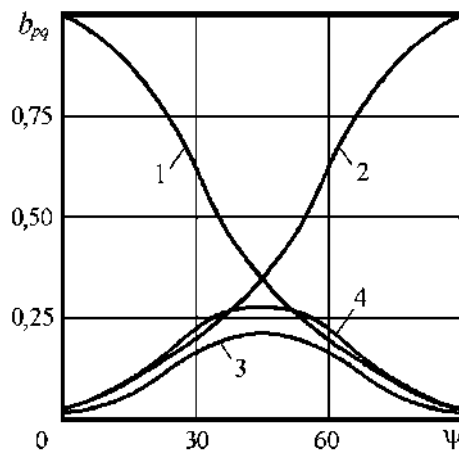


Рис. 2. Влияние угла армирования на величину приведенных упругих характеристик b_{pq}

На рис. 3 для рассмотренных выше граничных условий приведены графики изменения параметра $\bar{\omega}$ в зависимости от значения отношения модулей упругости $\alpha = E_1/E_2$. Как следует из рис. 3, для оболочки, составленной из трех слоев при $\psi = 0^\circ$ для внутреннего слоя и $\psi = 90^\circ$ для наружных, частотный параметр составляет $\bar{\omega} = 1,515$, для пяти слоев – $\bar{\omega} = 1,252$, для семи слоев – $\bar{\omega} = 1,444$. При этом суммарные толщины слоев обоих направлений равны. Проведенные исследования показывают, что даже сравнительно тонкие слои армированного углепластика оказывают существенное влияние на частотные характеристики оболочки.

На рис. 4 представлены зависимости изменения частотного параметра $\omega_* = \omega R \sqrt{\rho(1 - \nu_1 \nu_2)} / E_1$, характеризующего низшую частоту колебаний, от волнового числа n двухслойной оболочки, полученной перекрестной намоткой слоев ($\psi = \pm 45^\circ$), с жестко присоединенным на наружной поверхности твердым телом (кривая 4), масса которого $M_1 = 0,037$ кг. Торцевые контуры оболочки жестко заземлены. Кривые 1-3 соответствуют случаям незагруженной оболочки, для которой угол ψ равен соответственно $0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ$. Из данных рис. 4 видно, что аналогично изотропному материалу [9], наличие присоединенного тела существенно понижает значение низшей частоты колебаний. Более высокие частоты колебаний изменяются незначительно и близки к частотам незагруженной оболочки. Деформации поверхности локализованы в окрестности крепления присоединенного тела.

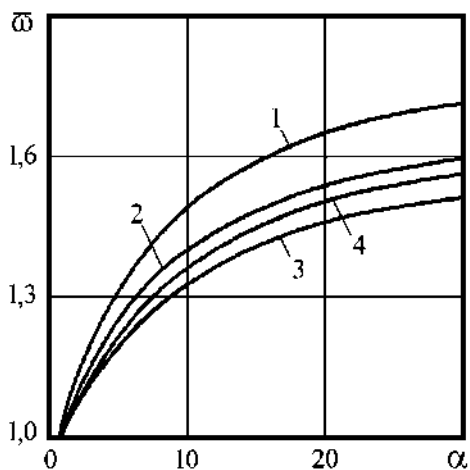


Рис. 3. Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от показателя анизотропии α

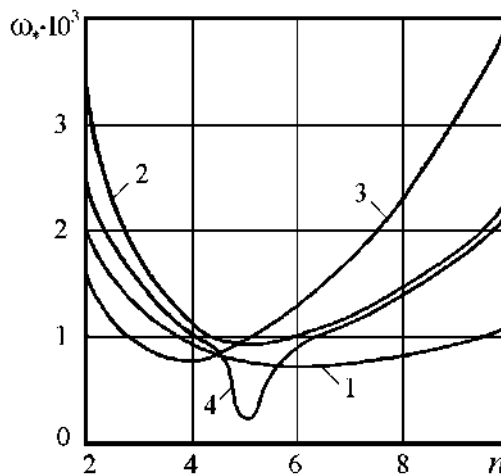


Рис. 4. Зависимость частотного параметра ω_* от волнового числа n

Таким образом, уровень частот и формы собственных колебаний можно регулировать посредством варьирования угла армирования, количества слоев и состава композита, граничных условий и геометрии оболочки.

ВЫВОДЫ

Методом Ритца решена задача определения частот и форм свободных колебаний упругих многослойных композитных цилиндрических оболочек вращения с присоединенными твердыми телами. Рассматриваемые оболочки состоят из ортотропных армированных слоев. Расчетная математическая модель построена на основе линейной теории тонких упругих оболочек в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. Получены результаты численного анализа зависимости амплитудно-частотных характеристик оболочек для различных композиционных материалов и граничных условий с учетом дискретно неоднородной по толщине структуры. Выявлено существование влияния присоединенных твердых тел, ортотропии и количества слоев, ориентации армирующих волокон на значения низших частот и формы колебаний.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Ревуцкий В. Н. Колебания ребристых оболочек вращения. Киев: Наук. думка, 1988. 172 с.
3. Бабич Д. В., Воробей В. В., Тарасюк В. И., Хорошун Л. П. Собственные колебания оболочек вращения из термочувствительных композиционных материалов. *Прикл. механика*. 1992. Т. 28, № 4. С. 8–16.
4. Богданович А. Е., Заруцкий В. А. Собственные колебания ортотропных ребристых цилиндрических оболочек. *Прикл. механика*. 1991. Т. 27, № 10. С. 83–90.
5. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 376 с.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. Москва: Машиностроение, 1988. 288 с.
7. Заруцкий В. А. Стационарные волны в многослойных ортотропных ребристых цилиндрических оболочках. В кн.: Механика композитов: В 12 т. Т. 9. Динамика элементов конструкций. Киев: А.С.К., 1999. С. 44–82.
8. Заруцкий В. А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек. *Прикл. механика*. 2001. Т. 37, № 8. С. 38–67.
9. Каиров А. С., Шевченко В. П. О собственных колебаниях подкрепленных оболочек с присоединенными телами. *Збірник наукових праць Укр. державного морського технічн. ун-ту*. 2000. № 5(371). С. 121–130.
10. Васильев В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. и др. Композиционные материалы: Справочник. Васильев В. В., Тарнопольский Ю. М. (ред.). Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
11. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Экспериментальные исследования колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов. *Прикл. механика*. 2009. Т. 45, № 5. С. 53–79.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.
13. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 2. Механика элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1983. 464 с.
14. Механика композитов. Т. 9. Динамика элементов конструкций. Кубенко В. Д. (ред.). Киев: АСК, 1999. 379 с.
15. Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970. 564 с.

REFERENCES

1. Ambarcumyan, S. A. (1974). General theory of anisotropic shells. Moscow: Nauka.
2. Amiro, I. Ya., Zarutskiy, V. A. & Revutskiy, V. N. (1988). Vibrations of ribbed shells of revolution. Nauk. dumka, Kiev.

3. Babich, D. V., Vorobey, V. V., Tarasyuk, V. I. & Khoroshun, L. P. (1992). Free vibrations of shells of rotation from temperature-sensitive composite materials. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 28, No.4, pp. 8-16.
4. Bogdanovich, A. E. & Zarutskiy, V. A. (1991). Free vibrations of ribbed orthotropic cylindrical shells. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 27, No. 10, pp. 83-90.
5. Bolotin, V. V. & Novichkov, Yu. N. (1980). *Mechanics of multilayered structures*. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Grigolyuk, E. I. & Kulikov, G. M. (1988). *Multilayer reinforced shell: Calculation of pneumatic tires*. Moscow: Mashinostroyeniye.
7. Zarutskiy, V. A. (1999). Stationary waves in multilayer orthotropic ribbed cylindrical shells. "Mechanics of composites". *Dynamics of structural elements* (vol. 9). Kiev: ASK, pp. 44-82.
8. Zarutskiy, V. A. (2001). On the comprehensive experimental studies of stability and vibrations of structurally inhomogeneous shells. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 37, No. 8, pp. 38-67.
9. Kairov, A. S. & Shevchenko, V. P. (2000). Of natural vibrations of supported shells with attached bodies. *Zbirnyk nauk. prac' Ukr. Derjavnogo Mors'kogo Tekhnichn. un-tu*, No. 5(371), pp. 121-130.
10. Vasil'ev, V. V., Protasov, V. D., Bolotin, V. V. & oth. (1990). *Composite materials: Handbook*. Vasil'ev, V. V. & Tarnopol'skiy, Yu. M. (Eds.). Moscow: Mashinostroyeniye.
11. Kubenko, V. D. & Kovalchuk, P. S. (2009). Experimental study of vibrations and dynamic stability of shells made of laminated composite materials. *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 45, No. 5, pp. 53-79.
12. Lehnitskiy, S. G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow: Nauka.
13. Guz', A. N., Grigorenko, Ya. M., Babich, I. Yu. & oth. (1983). *Mechanics of composite materials and structural elements*. Vol. 2. *Mechanics of structural elements*. Kiev: Nauk. dumka.
14. Kubenko, V. D. (Eds.). (1999). *Mechanics of composites*. Vol. 9. *Dynamics of structural elements*. Kiev: ASK.
15. Wilkinson, D. H. (1970). *The algebraic problem of eigenvalues*. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ ШАРІРНО ОПЕРТОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З П'ЄЗОСЕНСОРАМИ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ТА ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

¹Карнаухов В. Г., д. ф.-м. н., професор, ¹Козлов В. І., д. ф.-м. н., професор,

²Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

¹*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна*

²*Національний технічний університет «КПІ»,
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна*

karn@inmech.kiev.ua

Представлена модель вимушених резонансних коливань і вібророзігріву в'язкопружних пластин з п'єзосенсорами з урахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Методом Бубнова-Гальоркіна одержано наближений аналітичний розв'язок сформульованої задачі для прямокутної шарірно опертої пластини. Подано аналіз впливу геометричної нелінійності, зсувних деформацій і температури на ефективність роботи п'єзосенсорів.

Ключові слова: резонансні коливання, геометрична нелінійність, деформації зсуву, температура, п'єзосенсори.