

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-06

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ, ПОВРЕЖДЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Искандеров Р. А., Алимамедов Р. К.

*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
ул. А. Султановой, 5, г. Баку, Аз 1073/1, Азербайджан*

r.iskanderov@gmail.com, resadali1976@gmail.com

В предлагаемой статье с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкреплённой, анизотропной повреждённой цилиндрической оболочки из стеклопластика с вязкой жидкостью под действием внешнего периодического давления. Торцы оболочки предполагались шарнирно закреплёнными. Деформирование цилиндрической оболочки определяется в рамках линейной теории упругих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, а для ребер используется теория криволинейных стержней Кирхгофа–Клебиса. Для описания процессов повреждения оболочки применяется наследственная теория повреждаемости в интегральной форме, где используется функция залечивания дефектов, зависящая от объема повреждаемости за цикл нагружения и принимающая значения от 0 до 1. Для решения поставленной задачи применяется вариационный принцип Остроградского–Гамильтона. Поверхностные нагрузки, действующие со стороны вязкой жидкости на поперечно подкреплённую оболочку, определяются из решений линеаризованного уравнения Навье–Стокса. Неизвестные компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки представляются в виде комбинации тригонометрических функций координат точки оболочки и тригонометрических функций времени с неизвестными постоянными коэффициентами. Эти неизвестные постоянные находятся из системы линейных алгебраических уравнений, полученной в результате совместного интегрирования полной энергии системы и уравнений движения жидкости с учетом контактных условий на поверхностях их взаимодействия. При малых значениях отношения радиуса оболочки к ее длине собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки. С увеличением этого отношения зависимость собственных частот колебаний системы от угла намотки носит сложный характер.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, частота колебаний, вариационный принцип, повреждаемость, статическая и динамическая сила, подкрепление.

ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПОПЕРЕЧНО ПІДКРІПЛЕНОЇ, АНІЗОТРОПНОЇ, ПОШКОДЖЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОЧКИ ЗІ СКЛОПЛАСТИКА, ЗАПОВНЕНОЇ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Искандеров Р. А., Алімамедов Р. К.

*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанової, 5, м. Баку, Аз 1073/1, Азербайджан*

r.iskanderov@gmail.com, resadali1976@gmail.com

У пропонованій статті за допомогою варіаційного принципу вирішена задача про параметричне коливання поперечно підкріпленої, анізотропної пошкодженої циліндричної оболонки зі склопластику із в'язкою рідиною під дією зовнішнього періодичного тиску. Торці оболонки передбачалися шарнірно закріпленими. Деформування циліндричної оболонки визначається в рамках лінійної теорії пружних оболонок, заснованої на гіпотезах Кірхгофа–Лява, а для ребер використовується теорія криволинійних стрижнів Кірхгофа–Клебиса. Для опису процесів пошкодження оболонки застосовується спадкова теорія пошкоджуваності в інтегральній формі, де використовується функція заліковування дефектів, що залежить від обсягу пошкоджуваності за цикл навантаження і приймає значення від 0 до 1. Для вирішення поставленого завдання застосовується варіаційний принцип Остроградського–Гамільтона. Поверхневі навантаження, що діють з боку в'язкої рідини на поперечно підкріплену оболонку, визначаються з рішень лінеаризованого рівняння Нав'є–Стокса. Невідомі компоненти вектора переміщень точок срединної поверхні оболонки представляються у вигляді комбінації тригонометричних функцій

координат точки оболонки і тригонометричних функцій часу з невідомими постійними коефіцієнтами. Ці невідомі постійні знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, отриманої в результаті спільного інтегрування повної енергії системи і рівнянь руху рідини з урахуванням контактних умов на поверхнях їх взаємодії. При малих значеннях відношення радіуса оболонки до її довжини власні частоти коливань системи слабо залежать від кута намотування. Зі збільшенням цього відношення залежність власних частот коливань системи від кута намотування носить складний характер.

Ключові слова: циліндрична оболонка, в'язка рідина, частота коливань, варіаційний принцип, пошкоджуваність, статична і динамічна сила, підкріплення.

PARAMETRIC VIBRATIONS OF LATERALLY STRENGTHENED, ANISOTROPIC, DAMAGED, VISCOUS FLUID-FILLED CYLINDRICAL SHELL MADE OF GLASS-REINFORCED PLASTIC

Iskanderov R. A., Alimamedov R. K.

*Azerbaijan Architectural and Construction University,
A. Sultanova str., 5, Baku, Az 1073/1, Azerbaijan*

r.iskanderov@gmil.com, resadali1976@gmail.com

The problem of cylindrical shell parametric oscillations under external periodic pressure is considered in this paper. It is supposed that shell is transversely reinforced and additionally anisotropic damaged. Shell is made from fiberglass with viscous fluid inside. The boundary conditions considered simply-supported edge. Ostrogradsky–Gauss variation principle is used for solving the problem. It is assumed the linear theory of elastic shells, based on Kirchhoff–Love hypothesis and Kirchhoff–Klebis theory for curvilinear rods. The hereditary theory in an integral form of damage is used for describing the shell damage process. The function of healing defects depending on the amount of damage during the loading cycle taking values in the range 0, 1. The surface loads acting on the transversely supported shell from the viscous fluid side. This loads are determined from the solutions of the linearized Navier–Stokes equation. The unknown components of the displacement vector points of the middle surface of the shell are represented as a combination of trigonometric functions by both the coordinates of the shell and the time with unknown coefficients. The coefficients are found from a system of linear algebraic equations, obtained as a result of the integration of the total energy and the fluid motion equations. The contact conditions on the surface are taking into the account. For small ratios of the shell radius to its length, the natural frequencies of the system weakly depend on the winding angle. With the increase of this ratio, the dependence of the natural frequencies of the system of the winding angle is complex.

Key words: cylindrical shell, viscous liquid, vibration frequency, variation principle, damageability, static and dynamic force, reinforcement.

ВВЕДЕНИЕ

Надежный расчет цилиндрической оболочки, контактирующей со средой на длительную прочность, предполагает учет образующихся и накапливающихся дефектов и влияния внешней среды и сил. При периодичности напряжения этот учет носит усложненный характер, связанный с так называемым процессом заживания дефектов. Поэтому разработка математических моделей для исследования поведений подкрепленных, поврежденных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и параметрических колебаний, а также выбор рациональных параметров конструкций, контактирующих с вязкой жидкостью, являются актуальными задачами.

Отметим, что в работе [1] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. Постоянные упругости оболочки зависят от угла намотки стекловолокна. Расчет частот свободных колебаний выполнен на основании метода Рэлея–Ритца. Результаты вычислений представлены в виде зависимостей частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки. Работа [2] посвящена исследованию свободных колебаний, усиленной продольными системами ребер и

нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика с протекающей жидкостью. В работах [3, 4] представлены результаты нахождения частот свободных колебаний подкрепленной различными ребрами цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье, с протекающей жидкостью. Предполагается, что кольцевые ребра укреплены на внешней поверхности обшивки, размещены на равных расстояниях и имеют одинаковые геометрические и механические характеристики. Результаты вычислений собственных частот колебаний представлены в виде зависимостей от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика и от скорости протекающей жидкости при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки.

В работах [5, 6] с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью под действием внешнего давления $q = q_0 + q_1 \sin \omega_* t$ (где q_0 – средняя или основная нагрузка, q_1 – амплитуда изменения нагрузки, ω_* – частота ее изменения). На основе вариационного принципа Остроградского–Гамильтона построена система дифференциальных уравнений относительно амплитуды перемещений поперечно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью и реализовано численно. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений линеаризованного уравнения Навье–Стокса. Предполагается, что ось упругой симметрии материала оболочки совпадает с координатными осями.

Работа [7] посвящена исследованию собственных частот колебаний шарнирно-опертой по краям круговой замкнутой цилиндрической оболочки, усиленной регулярной системой продольных и поперечных ребер со сплошным заполнителем. Оболочка моделируется как конструктивно-ортотропная, а ее движение описывается системой уравнений в перемещениях.

Одной из экспериментально подтвержденных теорий повреждаемости является наследственная теория повреждаемости, разработанная для сложнапряженного состояния в [8, 9]. Согласно этой теории определяющее уравнение для однородного тела (\bar{x} -вектор-координата точки тела) записывается в виде:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + M^* \cdot \sigma_{ij},$$

где M^* – интегральные операторы наследственного типа, описывающие процессы повреждаемости, и для которых имеют место представления:

$$M^* \cdot \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь $M(\bar{x}, t - \tau)$ – ядро повреждаемости; (t_k^-, t_k^+) – интервалы периодов активного напряжения, способствующего росту повреждаемости; $f(t_k^+)$ – функция залечивания дефектов, зависящая от объема повреждаемости, накопленной за данный цикл. Например, значение $f(t_k^+) = 0$ соответствует полному залечиванию дефектов, образовавшихся за данный цикл, а значения $f(t_k^+) = 1$ – отсутствию самого эффекта залечивания дефектов. Все промежуточные значения от нуля до единицы соответствуют эффекту частичному залечиванию дефектов. Для определения интервалов (t_k^-, t_k^+) необходимо задавать специальные условия. Их удобно формулировать для конкретной задачи с учетом специфики конструкции, условий ее работы и видов нагружения. В данной статье поступаем аналогичным образом, и подобные условия будут сформулированы ниже.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщиной $2h$, длиной l , заполненную вязкоупругой жидкостью. Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены, т.е. при $x = 0; l$ имеет место:

$$N_{xx} = 0; M_{xx} = 0; w = 0; v = 0,$$

где N_{xx} – осевое усилие, M_{xx} – изгибающий момент, w, v – компоненты вектора перемещений точки оболочки – прогиба и радиального перемещения соответственно.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный принцип Остроградского–Гамильтона. Согласно этому принципу истинные траектории отличаются от других возможных траекторий тем, что для первых должно выполняться условие

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0. \quad (2)$$

Здесь под K понимается кинетическая энергия системы, под Π – потенциальная энергия системы, $[t_0, t_1]$ – отрезок времени, в котором происходит процесс движения.

Принимается, что напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа–Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края панели, лежат в одной координатной плоскости.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_j, v_j, w_j для j -го поперечного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpj} . Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); & v_j(x) &= v(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); & \varphi_j &= \varphi_2(x_j, y); & \varphi_{kpj}(x) &= \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $h_j = 0,5h + H_j^1$, h – толщина оболочки, H_j^1 – расстояния от осей j -го поперечного стержня до поверхности оболочки, φ_j, φ_{kpj} – углы поворота и закручивания поперечных сечений кольцевых ребер.

Полная энергия упругой деформации ортотропной, продольно подкрепленной, повреждающейся цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} R^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12} + \right. \\ &\left. + N_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{22} d\tau \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +N_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{12} d\tau \right) - \\
 & -M_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{11} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{11} d\tau \right) - \\
 & -M_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{22} d\tau \right) - \\
 & -M_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{12} d\tau \right) \Big\} dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \tilde{E}_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpj}}{R} \right)^2 + \tilde{G}_j J_{kpj} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \\
 & + \rho_j F_j \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpj}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial t} \right)^2 \right] dy + \\
 & + \rho_0 h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y v + (q_z + q) w) dx dy, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u, v, w – составляющие перемещения точек срединной поверхности оболочки, x_1, x_2 – координаты криволинейных краев оболочки; $F_j, J_{zj}, J_{xj}, J_{kpj}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения j -го поперечного стержня относительно оси Oz , и оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_j, \tilde{G}_j – модули упругости и сдвига материала j -го продольного стержня, t – временная координата, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$, ρ_0, ρ_i – плотности материалов, из которых изготовлены оболочки, i -й продольный стержень, соответственно, q_x, q_y, q_z – компоненты вектора давлений, действующей со стороны вязкой жидкости, k_2 – количество поперечных ребер.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz; \quad (5)$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22}; \quad w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22}; \quad w_{21} = w_{12} = B_{66}\chi_{12}.$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
B_{22} &= b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\
B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\
B_{26} &= 1/2 (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/6 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\
B_{16} &= 1/2 (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/6 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi,
\end{aligned}$$

где b_{11} , b_{22} , b_{12} , b_{66} – основные модули упругости ортотропного материала, φ – угол, образуемый направлением стекловолокон с окружным направлением.

Напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} \sigma_{12} = B_{66}\varepsilon_{12}, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Поверхностные нагрузки q_x , q_y и q_z , действующие со стороны вязкой жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяются из решения линеаризованного уравнения Навье–Стокса:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_0 a^2} q \text{grad} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \bar{\mu} \nabla^2 \vec{v}, \tag{7}$$

где $\bar{\mu}$ – динамический коэффициент вязкости, p – давление в некоторой точке жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, a – скорость звука в жидкости, ∇^2 – оператор Лапласа, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости произвольной точки жидкости.

На контактной поверхности оболочка – вязкая жидкость ($r = R$) выполняются:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_r = \frac{\partial w}{\partial t}; \tag{8}$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta}, \quad q_z = -p, \tag{9}$$

где силы вязкости определяются равенствами

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right). \tag{10}$$

Уравнение (9) с помощью уравнения неразрывности и уравнения состояния переходит к уравнению относительно p :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{11}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$u = A(t) \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \quad v = B(t) \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \quad w = C(t) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi, \tag{12}$$

где A , B , C – неизвестные функции. Эти функции для частот, лежащих вблизи $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1}{2}$, примем в виде

$$A(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad B(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \\ C(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (13)$$

Решение уравнения (11) после разделения переменных имеет вид:

$$p = p_0 J(\lambda r) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega t. \quad (14)$$

Дополняя контактными условиями (8), (9) полную энергию системы (4) уравнений движения жидкости (7), приходим к контактной задаче о параметрических колебаниях ортотропной оболочки, подкрепленной поперечными системами ребер и заполненной вязкой жидкостью. Другими словами, задача о параметрических колебаниях подкрепленной поперечными системами ребер ортотропной оболочки с вязкой жидкостью сводится к совместному интегрированию полной энергией системы и уравнений движения жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Используя (4)–(6), (16) и (12)–(14) и (2), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}B_1 + a_{i4}B_2 + a_{i5}C_1 + a_{i6}C_2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (15)$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{i6}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) имеют громоздкий вид, поэтому в данной статье не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (15) шестого порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя J_n :

$$\det \|a_{ij}\| = 0. \quad (16)$$

Отметим, что при $\bar{\mu} = 0$ уравнение (16) переходит к частотному уравнению параметрических колебаний поперечно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью.

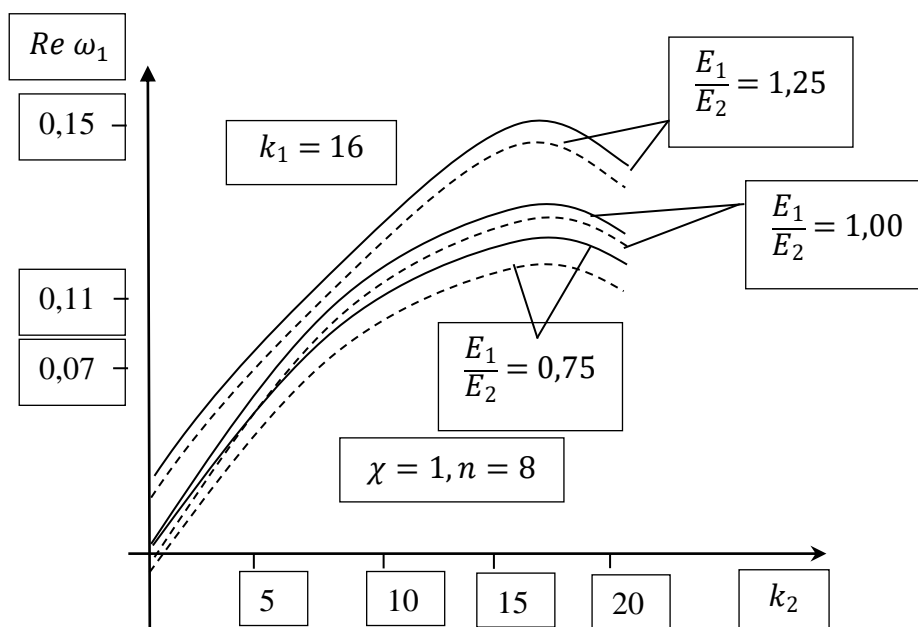


Рис. 1. Зависимость параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных стержней, были приняты [2]:

$$R = 0,16 \text{ м}; \quad h = 0,00045 \text{ м}; \quad \nu_2 = 0,19; \quad \nu_1 = 0,11; \quad l = 0,8 \text{ м}; \quad \rho/\rho_0 = 0,105;$$

$$\xi_1 = 1; \quad \tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad \nu = 0,3; \quad h_j = 1,39 \text{ мм}; \quad F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4;$$

$$J_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4; \quad a_* = 1350 \text{ м/с}; \quad \bar{\mu} = 10,02 \text{ кг/с} \cdot \text{м}.$$

Результаты счета представлены на рис. 1 и на рис. 2. В них приведены зависимость параметра частоты от числа поперечных стержней k_2 для различных отношений модулей упругости материала оболочки и от угла намотки φ для различных отношений $\frac{R}{L}$. В обоих рисунках штриховым линиям соответствует поврежденная оболочка, сплошным линиям – оболочка без повреждений. Рис. 1 и рис. 2 показывают, что учет повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. Кроме того, с увеличением отношений $\frac{E_1}{E_2}$ частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенных значениях k_1 инерционных действий стержней на процесс колебаний системы становятся существенными.

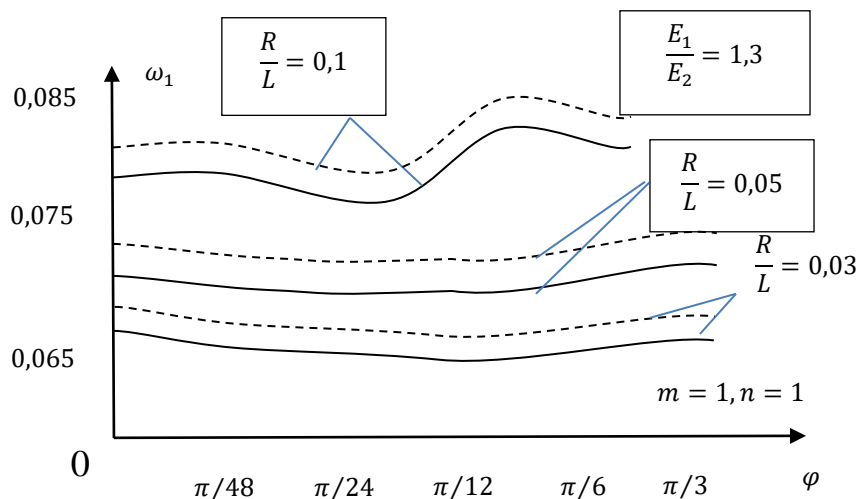


Рис. 2. Зависимость параметра частоты колебаний от угла намотки φ

Рис. 2 показывает, что при малых значениях отношений R/L собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки φ . С увеличением отношений R/L зависимости собственных частот колебаний системы от угла намотки φ носят сложный характер.

ВЫВОДЫ

С помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной, анизотропной поврежденной цилиндрической оболочки из стеклопластика с вязкой жидкостью под действием внешнего давления. Построены кривые зависимости параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней и от угла намотки. А также уточнено влияние повреждаемости на частоту колебаний систем. Учет повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. С увеличением отношений модулей упругости материала оболочки частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем после жлстижения количеством определенного значения начинают уменьшаться. При малых значениях отношений радиуса оболочки к ее длине собственные частоты колебаний системы слабо зависят от угла намотки. С увеличением этого отношения зависимость собственных частот колебаний системы от угла намотки носит сложный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Босьяков С. М., Чживэй В. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 3(16). С. 24–27.
2. Алыев Ш. Ш. Свободные колебания усиленных продольными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, с протекающей жидкостью. *Теоретическая и прикладная механика*. 2014. № 1-2. С. 136–142.
3. Латифов Ф. С., Искандеров Р. А., Алыев Ш. Ш. Свободные колебания усиленных поперечными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика, с протекающей жидкостью. *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. 2015. Вып. 24. С. 123–130.
4. Latifov F. S., Iskanderov R. A., Alyev Sh. Sh. Free oscillations of flowing liquid-filled anisotropic cylindrical shell strengthened with crossed systems of ribs. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*. 2015. Issue 24, Vol. 7, No. 3. P. 63–67.
5. Latifov F. S., Seifullaev F. A., Alyev Sh. Sh. Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, No. 4. P. 709–713.
6. Latifov F. S., Iskanderov R. A., Alimamedov R. K. Parametric oscillations of a laterally strengthened, orthotropic, damaged, viscous fluid-filled shell. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*. 2015. Vol 7, No. 4. P. 70–74.
7. Latifov F. S., Cafarova I. T. Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells strengthened by annular ribs. *Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences*. 2005. X. No. 4. P. 135–140.
8. Ахундов М. Б., Гулиев Р. С. Распространение ударной волны в повреждающемся наследственно упругом цилиндрическом теле. *Труды ИММ АН Азербайджан*. 1997. Т. IV(XIV). С. 208–212.
9. Ахундов М. Б., Суворова Ю. В., Садыхов Ф. М. Распространение волн деформаций и напряжений в кусочно однородном вязкоупругом стержне конечной длины с учетом повреждаемости материала. *Известия РАН, МТТ*. 1994. № 5. С. 113–120.
10. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Москва: Наука, 1979. 320 с.

REFERENCES

1. Bosyakov, S. M. & Chziway, V. (2011). Analysis of free oscillations of a cylindrical shell made of glass-reinforced plastic at boundary conditions. *Mekhanika mashin mekhanizmov i materialov*, No. 3(16), pp. 24–27.
2. Alyev, Sh. Sh. (2014). Free vibrations of a flowing-fluid-filled anisotropic cylindrical shell made of glass-reinforced plastic strengthened with longitudinal systems of ribs. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, No. 1-2, pp. 136-142.
3. Latifov, F. S., Iskanderov, R. A. & Alyev, Sh. Sh. (2015). Free vibrations of a flowing-fluid-filled anisotropic cylindrical shell made of glass-reinforced plastic strengthened with lateral systems of ribs. *Problemy vichisliternoï mekhaniki i prochnosti konstruksiy*, issue 24, pp. 123-130.
4. Latifov, F. S., Iskanderov, R. A. & Alyev, Sh. Sh. (2015). Free oscillations of flowing liquid-filled anisotropic cylindrical shell strengthened with crossed systems of ribs. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*, Issue 24, Vol. 7, No. 3, pp. 63-67.
5. Latifov, F. S., Seifullaev, F. A. & Alyev, Sh. Sh. (2016). Free vibrations of an anisotropic cylindrical fiberglass shell reinforced by annular ribs and containing fluid flow/ F.S.Latifov. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 57, No. 4, pp. 709-713.
6. Latifov, F. S., Iskanderov, R. A. & Alimamedov, R. K. (2015). Parametric oscillations of a laterally strengthened, orthotropic, damaged, viscous fluid-filled shell. *International Journal on "Technical and Physical Problems of Engineering"*, Vol. 7, No. 4, pp. 70-74.

7. Latifov, F. S. & Cafarova, I. T. (2005). Asymptotic investigations of eigen vibrations of medium-filled cylindrical shells sellaaityb by annular ribs. Sciences of Azerbaijan Transactions of Academy. Series of physical-technical and mathematical sciences, X, No. 4, pp. 135-140.
8. Akhundov, M. B. & Guliyev, R. S. (1997). Propagation of impact wave in damaged hereditary elastic cylindrical body. Trudy IMM AN Azerbaijan, Vol. IV(XIV), pp. 208-212.
9. Akhundov, M. B., Suvorova, Yu. V. & Sadykhov, F. M. (1994). Propagation of stress and strain waves in piecewise homogeneous bar of finite length with regard to material damageability. Izvestiya RAN, MTT, No. 5, pp. 113-120.
10. Volmir, A. S. (1979). Shells in fluid and gas flow. Moscow: Nauka.

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-07

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО БИМАТЕРИАЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Криворучко А. Г., аспирант, Шевелёва А. Е., д. ф.-м. н., доцент,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., профессор

*Днепро́вский национальный университет имени Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49000, Украина*

93anna.kr@gmail.com

Рассмотрена антиплоская задача для включения (электрода) на границе раздела пьезоэлектромагнитных материалов. Получены формулы для нахождения скачка компонент тензора напряжений и векторов электрической и магнитной индукции. Найдены аналитические выражения для определения значений компонент на верхнем и нижнем берегах электрода. Для различных значений электрического и магнитного потоков, направленных параллельно включению, проиллюстрировано поведение электромагнитно-механических факторов по длине электрода.

Ключевые слова: пьезоэлектромагнитный материал, включение, антиплоская задача.

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО БІМАТЕРІАЛУ З ВКЛЮЧЕННЯМ НА МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Криворучко А. Г., аспірант, Шевельова А. Є., д. ф.-м. н., доцент,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпро́вський національний університет імені Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49000, Україна*

93anna.kr@gmail.com

Розглянуто антиплоску задачу для включення (электрода) на межі поділу п'єзоелектромагнітних матеріалів. Вважається, що електрод є абсолютно жорстким і до того ж електричний і магнітний потенціали на ньому дорівнюють нулю. Припускається також, що на віддаленні від електрода задані зсувна деформація і електричне та магнітне поля, які паралельні до поверхні електрода. З використанням методу комплексних потенціалів отримані представлення механічних, електричних та магнітних факторів через кусково-аналітичні вектор-функції, з використанням яких сформульовано векторну задачу лінійного спряження з відповідними умовами на нескінченості. Точний розв'язок цієї задачі представлено в аналітичному вигляді. На його основі отримано формули для знаходження стрибка компонент тензора напружень і векторів електричної та магнітної індукції при переході через електрод. Знайдені також аналітичні вирази для знаходження значень вказаних компонент на верхньому та нижньому берегах електрода. Показано, що дотичне напруження і компоненти векторів електричної та магнітної індукції мають кореневу особливість при підході до кінців електрода. Проведена чисельна ілюстрація