УДК 623.55.021

П.Е. Трофименко, В.И. Макеев

Сумской государственный университет, Сумы

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В статье исследовано влияние поля тяготения Земли на движение артиллерийских снарядов (мин), рассмотрены две модели поля силы тяжести («однородное» поле и «центральное»), определены их точностные характеристики и диапазон применения, описана система дифференциальных уравнений, которая характеризует движение центра масс снаряда в плоскости стрельбы.

Ключевые слова: *поле тяготения Земли, сила притяжения, однородное поле, центральное поле, система дифференциальных уравнений.*

Введение

Поддержание высокой готовности ракетных войск и артиллерии к выполнению боевых задач в современных условиях требует качественного выполнения мероприятий их боевого обеспечения. Известно, что основным содержанием применения артиллерии в бою есть огонь, обеспечивающий успех общевойсковым частям и подразделениям при выполнении боевых задач как в обороне, так и в наступлении. От точности его подготовки и своевременности нанесения зависит степень поражения объектов (целей) противника. Точность огня зависит от полноты и качества комплекса проводимых мероприятий на основе метода полной подготовки данных для стрельбы. Этот метод позволяет заранее рассчитать все установки для стрельбы и нанести внезапный огневой удар по противнику без пристрелки. При этом минимизируется время нахождения артиллерии на огневой позиции, что ограничивает возможности противника по ее вскрытию. В то же время, метод полной подготовки требует высокого уровня подготовки артиллеристов и понимания сущности всех учитываемых этим методом явлений и процессов. Одним, из которых есть влияние поля тяготения Земли на полет снарядов (мин).

С принятием на вооружение артиллерийских систем с большими дальностями стрельбы (до 70км.) расчет Таблиц стрельбы без учёта влияния поля тяготения Земли, как это делалось ранее [1, 2], будет приводить к значительным ошибкам в расчёте поправочных граф Таблиц стрельбы.

Целью данной статьи является получение системы дифференциальных уравнений движения центра масс снаряда, которая бы учитывала влияние поля тяготения Земли на полёт летательных аппаратов (ЛА).

Основная часть

Сила тяжения (G) какого-либо тела, в частности снаряда, есть равнодействующая двух сил: силы земного притяжения ($F_т$), с которой тело притягивается к Земле в соответствии с законом всемирного тяготения и силы инерции переносного движения (F_e) (центробежной силы инерции), вызываемой вращением притягивающего тела (Земли), т.е.:

$$G = F_т + F_e \qquad (1)$$

В любых задачах баллистики сила тяжения входит в число учитываемых сил, так как в каждый момент движения ЛА находится под действием поля тяготения Земли. Следовательно, чем больше дальность стрельбы, тем точнее необходимо учитывать действие силы тяжести.

Если принять Землю за материальную точку с массой, равной массе Земли, то в соответствии с законом тяготения Ньютона на ЛА будет действовать сила притяжения:

$$F_т = f\frac{M_з m}{r^2},$$

где f – гравитационная постоянная, $f = 6.672 \bullet 10^{-11}\, Н \bullet м^2 / кг^2$; $M_з$-маса Земли, $M_з = 5,975 \bullet 10^{24}$ кг ; m – масса летального аппарата; r – расстояние между рассматриваемыми телами.

Проекции силы притяжения ($F_т$) на оси сферической системы координат r, $\varphi_г$, λ определяется по следующим формулам:

$$F_{тr} = -\frac{\partial \Pi_t}{\partial r} = -f\frac{M_з m}{r^2};$$

$$F_{т\varphi гц} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_т}{\partial \varphi_{гц}} = 0; \qquad (2)$$

$$F_{т\lambda} = -\frac{1}{r\cos\varphi_{гц}}\frac{\partial \Pi_т}{\partial \lambda} = 0,$$

где $\Pi_т - \text{потенциал} = -f\frac{M_з m}{r}$

Покажем теперь, что переносная центробежная сила инерции (F_e) также является потенциальной силой и её потенциал удовлетворяет условию:

$$\Pi_e = -\frac{1}{2}\Omega_з{}^2 r^2 \cos^2\varphi_{гц}, \qquad (3)$$

Действительно, переносная центробежная сила инерции (F_e) действующая на материальную точку О, перпендикулярна к оси вращения Земли и её модуль определяется по формуле:

$$F_e = m\Omega_з{}^2 r\cos\varphi_{гц}\,, \qquad (4)$$

где $\varphi_{гц}$ – геоцентрическая широта; $\Omega_З$ – угловая скорость вращения Земли.

Проекции силы инерции F_e на оси сферической системы координат (рис. 1) определяется выражениями:

$$F_{er} = m\Omega_з{}^2 r\cos\varphi_{гц}\,; \qquad (5)$$

$$F_{e\varphi\,гц} = -m\Omega_з{}^2 r\cos\varphi_{гц}\sin\varphi_{гц}\,;$$

$$F_{e\lambda} = 0\,.$$

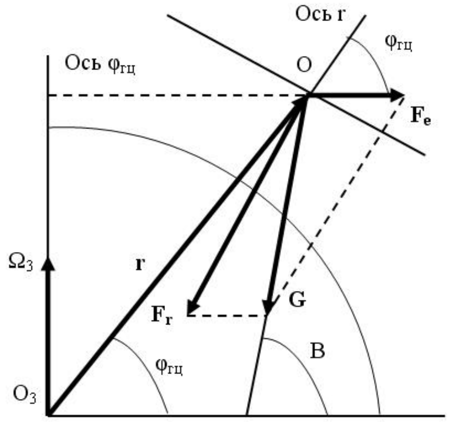

Рис. 1. Сила тяжести и её составляющие

Из рис. 1 видно, что потенциал силы тяжести (G) равен сумме потенциалов силы притяжения ($F_т$) и центробежной силы инерции F_e, т.е.:

$$\Pi = \Pi_т + \Pi_e \qquad (6)$$

А теперь рассмотрим ускорение силы тяжести, и как оно определяется. Ускорение силы тяжести по аналогии с равенством (1) можно определить по формуле:

$$g = a_т + a_e \qquad (7)$$

где g – ускорение силы тяжести, $g = G/m$; $a_т$ – ускорение силы притяжения, $a_т = F_т/m$; a_e – ускорение центробежной силы инерции, $a_e = F_e/m$

Проекции ускорения силы тяжести на оси сферической системы координат r, $\varphi_{гц}$, λ будут удовлетворять условиям:

$$g_r = -f\frac{M_З}{r^2} + \Omega_з{}^2 r\cos^2\varphi_{гц}\,;$$

$$g_{\varphi\,гц} = -\Omega_з{}^2 r\cos\varphi_{гц}\sin\varphi_{гц}\,;$$

$$g_\lambda = 0\,; \qquad (8)$$

$$a_{тr} = -f\frac{M_З}{r^2};$$

$$a_{тr} = 0;$$

$$a_{т\lambda} = 0; \qquad (9)$$

$$a_{er} = \Omega_з{}^2 r\cos^2\varphi_{гц}\,;$$

$$a_{e\varphi\,гц} = -\Omega_з{}^2 r\cos\varphi_{гц}\sin\varphi_{гц}\,;$$

$$a_{e\gamma} = 0\,. \qquad (10)$$

Произведем ориентировочные оценки слагаемых в формуле (7), используя зависимости (8), (9),(10) и принимая, что Земля имеет форму сферы радиусом $R_З$= 6371км. В этом случае на поверхности Земли:

ускорение силы притяжения можно определить по зависимости:

$$a_т = f\frac{M_З}{R_З{}^2} = 6,672\cdot10^{-11}\cdot\frac{5,975\cdot10^{24}}{(6,371\cdot10^6)^2} = 9,822\,м/c^2$$

;

Максимальное значение ускорения центробежной силы инерции определяется по формуле:

$$a_{e\max} = \Omega_З{}^2 R_З = (7,292\cdot10^{-5})^2\cdot6,371\cdot10^6 = 0,034\,м/c^2.$$

При этом ускорение силы тяжести ($g_э$) на экваторе ($\varphi_г$= 0):

$$g_э = a_т - a_{e\max} = 9,822 - 0,034 = 9,788\,м/c^2;$$

а ускорение силы тяжести на полюсе ($g_п$) ($\varphi_г$= 90°):

$$g_п = a_т = 9,822\,м/c^2$$

Из полученных данных следует, что максимальное значение центробежного ускорения составляет примерно 0.4% от значения ускорения силы притяжения на поверхности Земли, что соизмеримо с ускорением силы тяжести (g_o) на Земле до $9,8м/c^2$.

В нашей стране и во многих странах за рубежом для определения силы тяжести на поверхности Земли (общего земного эллипсоида) применяется формула:

$$g_0 = 9,78049(1 + 0,0052884\sin^2\varphi_{гц} - -0,0000059\sin^2 2\varphi_{гц}),\,м/c^2 \qquad (11)$$

Следует отметить, что во внешней баллистике [3, 4] используется несколько моделей поля силы тяжести, выбор которых определяется требуемой точностью расчетов и рассматриваемыми интервалами дальностей стрельбы. Рассмотрим две модели: «однородного поля» и «центрального поля».

«Однородное поле»

В этой модели ускорение силы тяжести принимается на всех точках траектории постоянным по величине и направлению, т.е.:

$$g = g_0;$$

где g_0 – ускорение ЛА в точке вылета.

Проекции вектора g на оси нормальной земной системы координат $O_0X_gY_gZ_g$ имеют вид:

$$g_{Xg} = 0;$$

$$g_{Yg} = -g_0; \qquad (12)$$

$$g_{Zg} = 0\,.$$

«Однородное поле» используется при расчетах траектории на малых дальностях стрельбы (до 20км.), как это делалось ранее [1, 2].

«Центральное поле»

В этом поле ускорение силы тяжести в любой точке траектории направлено к центру Земли, и его величина определяется выражением:

$$g = g_0 \frac{R_3^{\ 2}}{r^2} = g_0 \frac{R_3^{\ 2}}{(R_3 + h)^2}, \qquad (13)$$

где g_0 – ускорение силы тяжести в точке вылета; h – высота над поверхностью Земли; R_3 – средний радиус Земли.

«Центральное поле» используется при проведении баллистических расчётов при дальностях стрельбы от 20 до 500 км.

Таким образом, точность баллистических расчётов зависит от допущений, применяемых относительно формы поверхности Земли и поля силы тяжести. При стрельбе на дальность, превышающую 20км, принимать $g_0 = \mathrm{const}$ нельзя, так как это будет приводить к значительным ошибкам в расчётах поправочных граф Таблиц стрельбы (ошибки составят 2 – 3%).

Если принять, что поле силы тяжести является «центральным» а поверхность Земли – сфера, то движение летательного аппарата (снаряда, мины), соответствующее условиям основной задачи, будет описываться системой:

$$\dot{V} = -\frac{X_a}{m} - g_0 \frac{R_3^{\ 2}}{(R_3 + h)^2} \sin\Theta_r;$$

$$\dot{\Theta}_r = -\left[g_0 \frac{R_3^{\ 2}}{(R_3 + h)^2} - \frac{V^2}{R_3 + h} \right] \frac{\cos\Theta_r}{V}; \qquad (14)$$

$$i = \frac{R_3 V \cos\Theta_r}{R_3 + h}; \quad \dot{X} = V\cos\Theta_r; \quad \dot{Y} = V\sin\Theta_r.$$

Отличительной особенностью системы дифференциальных уравнений (14) есть то, что она характеризует движение центра масс снаряда, происходящее в плоскости стрельбы.

Для получения объективных результатов точности подготовки исходных данных для стрельбы 152-мм СГ 2С5 и 203-мм СП 2С7 расчеты проводились с использованием системы дифференциальных уравнений [2], а в последующем – с использованием системы дифференциальных уравнений (14).

Сравнительная оценка результатов показала, что ошибка в расчете поправочных граф Таблиц стрельбы с использованием системы дифференциальных уравнений центра масс [1, 2] без учёта влияния поля тяготения Земли составляет 2 – 3% от их абсолютного значения. Вместе с тем ошибки в расчете поправочных граф Таблиц стрельбы с использованием системы дифференциальных уравнений (14) составляют ~ 0,5% от их абсолютного значения.

Выводы

Как показали расчёты, при стрельбе на дальность, превышающую 20км. необходимо учитывать влияние поля тяготения Земли на полет летательных аппаратов (снарядов и мин). При этом, с целью уменьшения ошибок поправочных граф Таблиц стрельбы, целесообразно принимать модель поля силы тяжести – «центральное поле».

Список литературы

1. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых ракет и снарядов / И.Ф. Равдин. – М.: МО СССР, 1976. – 184 с.

2. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 608 с.

3. Математична модель просторового руху літального апарату на твердому паливі в атмосфері / В.І. Макеєв та ін. // Вісник СумДУ. – 2008. – № 2. – С. 42-47.

4. Баллистика ствольных систем. Справочная библиотека разработчика-исследователя / Л.Н. Лысенко, В.В. Грабин и др. – М.: Машиностроение, 2006. – 461 с.

Поступила в редколлегию 21.10.3010

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Чорноус, Сумской государственный университет, Суммы.

ВПЛИВ ПОЛЯ ТЯЖІННЯ ЗЕМЛІ НА РУХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

П.Є. Трофименко, В.І. Макеєв

У статті досліджено вплив поля тяжіння Землі на рух артилерійських снарядів (мін), розглянуто дві моделі поля сили тяжіння («однорідне» поле і «центральне»), визначено характеристики їх точностні та діапазон застосування, дано опис системи диференціальних рівнянь, яка характеризує рух цонтра мас снаряду у площині стрільби.

Ключові слова: *поле тяжіння Землі, сила притягування, «однорідне» поле, «центральне» поле, система диференційних рівнянь.*

EFFECT OF THE GRAVITATIONAL FIELD EARTH ON THE MOTION OF AIRCRAFT

P.E. Trofimenko, V.I. Makeev

The paper investigated the influence of the gravitational field of Earth to move ordnance (mines), examined two models of the gravity field (odnoordnoe "field and" central "), are defined by their accuracy characteristics and range of application, describes a system of differential equations, which characterizes the motion of the center of mass projectile ploskisti shooting.

Keywords: *earth's gravitational field, gravity, a uniform field, center field, the system of differential equations.*