УДК 531.31

Є.Г. Хомяков

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ ДОВІЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА

Для складання рівнянь динаміки довільного руху твердого тіла незмінної системи матеріальних точок літального апарату, підпорядкованих ідеальним і голономним в'язям, запропоновано простий і універсальний метод зі застосуванням формули Ейлера, перетвореною автором статті.

Ключові слова: *тверде тіло, формула Ейлера, узагальнені координати, рівняння Лагранжа другого роду, ідеальні голономні в'язі, кінетична енергія, формула автора.*

Вступ

При складанні рівнянь довільного руху твердого тіла (далі просто тіло) вводяться наступні системи координат (рис. 1):

$Ax_д y_д z_д$ – нерухома;

$Ox_1 y_1 z_1$ – рухома, яка здійснює рух разом з полюсом O, вісі котрої зберігаються паралельними осям системи координат $Ax_д y_д z_д$;

$Oxyz$ – рухома, яка незмінно зв'язана з тілом і обертається разом з тілом навколо полюса O.

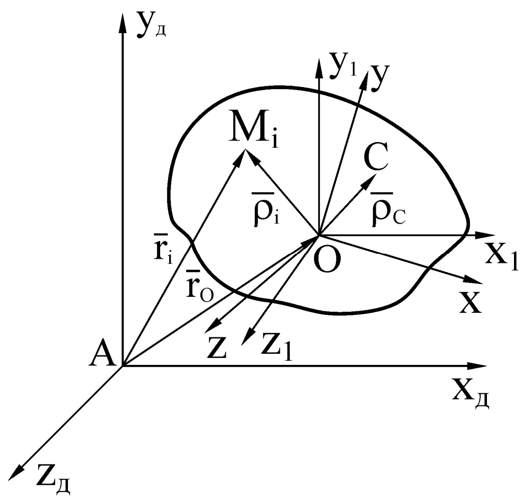

Рис. 1. Системи координат

Постановка проблеми

Раніше [1] було розглянуто приведення рівнянь Лагранжа другого роду (далі просто рівняння Лагранжа) до єдиної узагальненої форми.

Відомо [2, 3] також, що при складанні рівнянь динаміки руху тіла з декілька ми ступенями вільності із ідеальними і голономними в'язами користуються безпосередньо за допомогою тільки кінетичної енергії тіла та кінематичних рівнянь Ейлера-Крилова.

Рівняння Лагранжа другого роду у загальній формі мають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\,,\ (i=1,2\ldots S), \qquad (1)$$

де T – кінетична енергія тіла, в узагальнених координатах q_i; $\dot{q}_i$ – узагальнена швидкість; Q_i – узагальнена сила; S – кількість ступенів вільності. У нашому випадку при русі у просторі тіло має шість ступенів вільності. Тому вибираємо у якості узагальнених координатах q_i координати полюса O – $q_1=x_0$, $q_2=y_0$, $q_3=z_0$ і кути Ейлера-Крилова – $q_4=\gamma$ – крену, $q_5=\psi$ – рискання, $q_6=\upsilon$ – тангажу.

Для вибраних узагальнених координат x_0, y_0, z_0, γ, ψ і v рівняння (1) перетворюються до наступного вигляду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_{0x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_0}=Q_x\,;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_{0y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_0}=Q_y\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_{0z}}\right)-\frac{\partial T}{\partial z_0}=Q_z\,;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\right)-\frac{\partial T}{\partial \gamma}=Q_\gamma\,; \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_y}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}=Q_\psi\,;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_z}\right)-\frac{\partial T}{\partial v}=Q_v\,.$$

Тут позначені: $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ – проекції швидкості $\bar{V}_0$ на осі координат $Oxyz - V_{0x}$, V_{oy}, V_{oz}, відповідно ω_x, ω_y, ω_z – проекції швидкості $\bar{\omega}_0$ обертання тіла навколо полюса O на осі системи координат $Oxyz$.

Кутові швидкості ω_x, ω_y, ω_z визначаються за допомогою кінематичних рівнянь Ейлера-Крилова [2, 3], які мають наступний вигляд:

$$\omega_x=\left(\dot{\psi}\sin\upsilon+\dot{\gamma}\right);$$
$$\omega_y=\left(\dot{\psi}\cos\upsilon\cos\gamma+\dot{\upsilon}\sin\gamma\right); \qquad (3)$$
$$\omega_z=\left(-\dot{\psi}\cos\upsilon\sin\gamma+\dot{\upsilon}\cos\gamma\right).$$

Якщо осі системи координат $Oxyz$ є головними осями, то кінетична енергія тіла в узагальненій формі визначається за формулою [2]:

$$T=\frac{m}{2}\left(V_{0x}^2+V_{0y}^2+V_{0z}^2\right)+m\begin{vmatrix}V_{0x} & V_{0y} & V_{0z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}+ \qquad (4)$$
$$+\frac{1}{2}I_x\omega_x^2+\frac{1}{2}I_y\omega_y^2+\frac{1}{2}I_z\omega_z^2,$$

де m – маса тіла; I_x, I_y, I_z – осьові моменти інерції тіла відносно осей системи координат $Oxyz$.

Слід помітити, що в [1] зверталась увага на особливості рівнянь Лагранжа, яка дає можливість складати ці рівняння за допомогою тільки (3) і (4). Але виникає проблема для рівняння відносно тільки кута рискання ψ, яка пов'язана тільки з частинною похідною $\frac{\partial T}{\partial \psi}$. Мова йде про безпосереднє складання рівнянь Лагранжа (2) за допомогою тільки (3) і (4) і без інших додаткових співвідношень.

Примітка. Подібний випадок має місце для кута крену γ, якщо визначати ω_x, ω_y, ω_z в проекціях на нерухомі осі координат, наприклад, $Ax_ä y_ä z_ä$. У цьому разі кут рискання ψ входить як аргумент в кінематичні рівняння Ейлера-Крилова, а кут крену γ – не входить.

Причина можливо полягає в тому, що у першому випадку і у другому, має місце загальний недолік, а саме, кут ψ не входить в рівняння (3) в (4) як аргумент і може бути узагальненою координатою тому, що він є циклічною координатою.

Тому, для усунення подібних проблем, які виникають при складенні рівнянь динаміки твердого тіла, автор цієї статті пропонує застосувати формулу Ейлера [5].

Аналіз досліджень

Виходячи з того, що кінетична енергія тіла є однорідною функцією швидкостей зі степеню однорідності рівної “2”, Ейлер запропонував формулу, якою встановлює співвідношення між мірами механічного руху, а саме, між кінетичною енергією T, кількістю руху тіла $\bar{Q}_i$, кінетичним моментом $\bar{K}_0$, обчисленого відносно вибраного полюса O.

Ця формула має наступний вигляд [1]:

$$2T\left(V_{0x}, V_{0y}, V_{0z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = \\ = \frac{\partial T}{\partial V_{0x}} \cdot V_{0x} + \frac{\partial T}{\partial V_{0y}} \cdot V_{0y} + \frac{\partial T}{\partial V_{0z}} \cdot V_{0z} + \\ + \frac{\partial T}{\partial \omega_x} \cdot \omega_x + \frac{\partial T}{\partial \omega_y} \cdot \omega_y + \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \cdot \xi_z. \quad (5)$$

Із цієї формули видно, що в праву частину входять тільки однорідні швидкості, а за змістом вона нагадує рівняння Лагранжа (2).

Для застосування цієї формули для складання універсальних рівнянь динаміки руху твердого тіла, необхідно зробити деякі перетворення формули (5). Для цього застосуємо теорему про те, що сума скалярних добутків вектору кількості руху $\bar{Q}$ тіла на вектор швидкості $\bar{V}_0$ полюса O і скалярного добутку вектору кінетичного моменту $\bar{K}_0$, обчисленого відносно полюса O, на вектор кутової швидкості $\bar{\omega}_0$ обертання тіла навколо того ж полюсу, дорівнює подвійній кінетичній енергії [4]

$$2T = \bar{Q} \cdot \bar{V}_0 + \bar{K}_0 \cdot \bar{\omega}_0 \quad (6)$$

або

$$2T = Q_x \cdot V_{0x} + Q_y \cdot V_{0y} + Q_z \cdot V_{0z} + \\ + K_x \cdot \omega_x + K_y \cdot \omega_y + K_z \cdot \omega_z. \quad (7)$$

Порівнюючи (5) і (7), дістанемо:

$$Q_x = \frac{\partial T}{\partial V_{0x}}; \; Q_y = \frac{\partial T}{\partial V_{0y}}; \; Q_z = \frac{\partial T}{\partial V_{0z}}; \\ K_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}; \; K_y = \frac{\partial T}{\partial \omega_y}; \; K_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_z}. \quad (8)$$

Методика складання рівнянь динаміки довільного руху твердого тіла за допомогою формули Ейлера (5) полягає у наступному.

Враховуючи (8), перетворимо формулу Ейлера (5) до вигляду

$$T = \frac{\partial}{\partial V_{0x}} \frac{Q_x \cdot V_{0x}}{2} + \frac{\partial}{\partial V_{0y}} \frac{Q_y \cdot V_{0y}}{2} + \\ + \frac{\partial}{\partial V_{0z}} \frac{Q_z \cdot V_{0z}}{2} + \frac{\partial}{\partial \omega_x} \frac{K_x \cdot \omega_x}{2} + \\ + \frac{\partial}{\partial \omega_y} \frac{K_y \cdot \omega_y}{2} + \frac{\partial}{\partial \omega_z} \frac{K_z \cdot \omega_z}{2}. \quad (9)$$

Далі, диференціюючи всі додатки (9) по часу, дістанемо перші додатки лівих частин рівнянь Лагранжа (1) або (2), до котрих додамо відповідні праві додатки із (9), одержимо всі ліві частини рівнянь Лагранжа (2), які дорівнюють відповідним узагальненим силам Q_i. Таким чином, рівняння Лагранжа (2) приймають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_{0x}}\right) + \omega_y \frac{\partial T}{\partial V_{0z}} - \omega_z \frac{\partial T}{\partial V_{0y}} = Q_x;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_{0y}}\right) + \omega_z \frac{\partial T}{\partial V_{0x}} - \omega_x \frac{\partial T}{\partial V_{0z}} = Q_y;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial V_{0z}}\right) + \omega_x \frac{\partial T}{\partial V_{0y}} - \omega_y \frac{\partial T}{\partial V_{0x}} = Q_z;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\right) + \omega_y \frac{\partial T}{\partial \omega_z} - \omega_z \frac{\partial T}{\partial \omega_y} = Q_\gamma;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_y}\right) + \omega_z \frac{\partial T}{\partial \omega_x} - \omega_x \frac{\partial T}{\partial \omega_z} = Q_\psi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_z}\right) + \omega_x \frac{\partial T}{\partial \omega_y} - \omega_y \frac{\partial T}{\partial \omega_x} = Q_v. \quad (10)$$

Таким чином, рівняння (10) є результатом перетворення формули Ейлера в універсальні рівняння динаміки довільного руху твердого тіла, котрі співпадають з рівняннями Лагранжа другого роду, приведених до узагальненої форми [3].

Три перших рівняння (10) відзначають поступальну частину руху тіла, а три інших – описують обертальну частину руху навколо полюса O.

За допомогою рівнянь (10) можна розв'язувати першу та другу основні задачі динаміки твердого тіла з ідеальними, голономними і двосторонніми в’язями.

Метою цієї статті є обґрунтовування методу перетворення автором формули Ейлера (5), для складання універсальних рівнянь динаміки довільного руху твердого тіла (або літального апарата), незмінної матеріальної системи тощо, підпорядкованих голономним ідеальним і двостороннім в’язям, за єдиною методикою, незалежно від кількості ступенів вільності, які можна складати і по формі Лагранжа другого роду, і по формі метода загальних теорем динаміки.

Результати досліджень

Завдяки перетворенням формули Ейлера (5) до виду (9) і застосуванню співвідношень (9), було зведено формулу Ейлера (5) до рівнянь динаміки (10), які повністю співпадають з рівняннями Лагранжа другого роду в узагальненій формі [3], що підтверджує правильність вибору автором подібного методу складання рівнянь динаміки довільного руху тіла за допомогою тільки формули Ейлера, кінетичної енергії і кінематичних рівнянь Ейлера-Крилова.

Розглянемо як просто складаються рівняння (10), наприклад літака, за допомогою загальних теорем динаміки.

У цьому випадку в якості полюса приймаємо центр мас літака, а осі систем координат $Cxyz$ вважаємо головними і центральними вісями інерції, тоді координати центра мас $x_c = y_c = z_c = 0$ і кінетична енергія (4) буде визначатися за формулою

$$T = \frac{1}{2} m \left(V_{cx}^2 + V_{cy}^2 + V_{cz}^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} I_x \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_z \cdot \omega_z^2 . \qquad (11)$$

У польоті на літак діють наступні зовнішні сили: $\bar{P}$ – сила тяги двигуна, $\bar{G}$ – сила тяжіння літака, $\bar{R}_a$ – повна аеродинамічна сила, $\bar{M}_c^a$ – головний момент аеродинамічних сил, M_c^y – управляючи моменти.

Враховуючи (8), замінимо у рівняннях (10) всі частинні похідні на проекції вектора кількості руху $\bar{Q}_c$ літака і проекції кінетичного моменту $\bar{K}_c$ на осі системи координат $Cxyz$, відповідно.

В результаті заміни частинних похідних рівняння (10) приймають наступний вигляд:

$$\frac{dQ_x}{dt} + \omega_y Q_z - \omega_z Q_y = R_x^a + P_x + G_x ;$$

…………….

$$\frac{dKz}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x = M_{cx}^0 . \qquad (12)$$

Порівняння (10) і (12) показує, що ліві частини їх однакові, тому повинні співпадати між собою праві частини. Звідси маємо, що відповідні узагальнені сили Q_i являють собою алгебраїчні суми проекцій зовнішніх сил на осі координат $Cxyz$ або алгебраїчні суми моментів аеродинамічних сил.

Висновки

Висновок А

1. Головним висновком метода перетворень автора статті є зведення формули Ейлера (5) до узагальненої універсальної форми у вигляді (9), котрою автор розкриває у явному вигляді зміст лівих частин рівнянь динаміки довільного руху твердих тіл, що дає змогу дуже просто складати подібні рівняння за єдиною методикою незалежно від того, за допомогою якого методу складаються ці рівняння, чи за допомогою рівнянь Лагранжа (10), чи за допомогою метода загальних теорем динаміки [1], або (12), і незалежно від кількості ступенів вільності і від виду руху тіла.

2. Формула автора (9) показує, що кількість руху $\bar{Q}$ тіла та кінетичний момент $\bar{K}_O$ у своєї сукупності повністю характеризує механічний рух твердого тіла, однозначно пов'язана з кінетичною енергією T тіла і не суперечить вихідній формулі Ейлера (5), якою він встановлює, що кінетична енергія є функцією однорідних швидкостей зі степеню однорідності рівною «2», а це свідчить про те, щоб в лівих частинах рівнянь динаміки руху тіла були тільки доданки, котрі містять однорідні швидкості. Як видно із рівнянь (10), чого не має у вихідних рівняннях Лагранжа (1) або (2).

Висновок Б

1. Відомо [1, 2], що для складання рівнянь динаміки довільного руху твердого тіла методом рівнянь Лагранжа другого роду (1) в узагальнених координатах, достатньо мати тільки формулу кінетичної енергії в узагальнених координатах (4) і кінематичні рівняння Ейлера-Крилова (3) в проекціях на осі координат $Oxyz$ (3), котрі містять кути крену γ и тангажу υ як аргументи, але кут рискання ψ у цих рівняннях не входить як аргумент, тому кут ψ не може бути узагальненою координатою, але проектуючи кутову швидкість на нерухомі осі координат $Ax_д y_д z_д$, вони приймають наступний вигляд:

$$\omega_x = \left(\dot{\gamma} \cos \upsilon \cos \varphi + \dot{\upsilon} \sin \psi \right) ; \ \omega_y = \left(\dot{\psi} + \dot{\upsilon} \sin \gamma \right) ;$$

$$\omega_z = \left(-\dot{\gamma} \cos \upsilon \sin \psi + \dot{\upsilon} \cos \psi \right) , \qquad (13)$$

звідки маємо, що у ці рівняння входять кут ψ і υ як аргументи, але кут крену γ не входить і його не можна вибирати у якості узагальненої координати, в чому причина такого явища автору невідомо.

2. Можливо причина подібного факту полягає в тому, що в лівих частинах рівнянь Лагранжа другого роду (1) є доданки, котрі не являють собою однорідні швидкості, як це вимагає формула автора (9), можливо потрібно замість кутів Ейлера-Крилова застосувати інші параметри, за допомогою котрих можна було повністю визначати положення твердого тіла і складати рівняння динаміки довільного руху твердого тіла, але головне – це встановити причину, чому прийнята узагальнена координата – кут ψ – може бути узагальненою, а з іншого боку – циклічною координатою.

Список літератури

1. Павловский М.А. Теоретическая механика / М.А. Павловский, Т.В. Путята. – К.: Высшая школа, 1985. – 360 с.

2. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1972. – Т. 2. – 380 с.

3. Хомяков Є.Г. Приведення рівнянь Лагранжа другого роду і формули Ейлера до єдиної узагальненої форми / Є.Г. Хомяков // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.: ЦНДІ НіУ, 2010. – Вип. 2 (14). – С. 144-148.

Надійшла до редколегії 27.10.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.В. Тюрев, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Е.Г. Хомяков

Для составления уравнений динамики произвольного движения твердого тела, неизменяемой системы материальных точек, летательного аппарата, подчиненных идеальным и голономным связям, предложен простой и универсальный метод с использованием формулы Эйлера, преобразованной автором статьи.

Ключевые слова: *твердое тело, формула Эйлера, обобщенные координаты, уравнения Лагранжа второго рода, идеальные и голономные связи, кинетическая энергия, формула автора.*

GENERATION OF EQUATIONS OF DYNAMIC OF SOLID BODY ARBITRARY MOTION USING THE EULER FORMULA

E.G. Homyakov

To generate equations of dynamic of solid body arbitrary motion, of invariable system of material points, of aircraft, submitted to ideal constraints and holonomic constraints, the simple and unified method with the use of the Euler formula is given. It was transformed by the author.

Keywords: *solid, Euler formula, generalized coordinates, Lagrange equations of the second class, ideal constraints and holonomic constraints, kinetic energy, the author's formula.*