

УДК 536.2: 539.3:624.042.5

Решение стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов

¹Гераймович Ю. Д., канд. техн. наук, ²Евзеров И. Д., д-р техн. наук,
¹Марченко Д. В.

¹Группа компаний ЛИРА, ООО ПРАЙМ КАД, Украина,
²Группа компаний ЛИРА, ООО ВЕГА КАД, Украина

Аннотация. Изложены основные соотношения и возможные варианты граничных условий для стационарной задачи теплопроводности. Получено интегральное тождество, аналогичное принципу возможных перемещений для применения метода конечных элементов. Выполнено сравнение результатов расчета на основе программной реализации и аналитического решения для плоского кольца с заданными постоянными значениями температуры на внутренней и внешней окружностях. Для фрагмента строительных ограждающих конструкций здания для различной степени дискретизации расчетной области выполнено сопоставление результатов расчета на основе программной реализации и расчета по программе Tempreg-3D.

Ключевые слова: программный комплекс ЛИРА 10, стационарная задача теплопроводности, метод конечных элементов, конечные элементы теплообмена, граничные условия.

В современном строительстве уровень термического сопротивления ограждающих конструкций – важный параметр наряду с их несущей способностью. Тепловой анализ играет важную роль при проектировании многих конструкций. В частности, в гидротехническом строительстве – расчет температурного режима бетонных массивно-контрфорсных и гравитационных плотин [1], в мостостроении – проблемы регулирования теплового режима бетона при ускоренном возведении железобетонных пилонов [4], в промышленном и гражданском строительстве – расчет ограждающих конструкций в условиях переменных тепловых воздействий (теплоизоляция зданий, печей, трубопроводов) [2]. Как правило, интерес представляют распределения температуры и теплового потока. Решение температурной задачи для подобных конструкций является достаточно трудоемким ввиду сложной пространственной формы конструкции и влияния многих факторов. На сегодняшний день наиболее полный учет всех факторов при решении температурной задачи возможен только с применением метода конечных элементов (МКЭ).

Рассматривается стационарная задача:

$$- \operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad}(T)) = q, \quad (1)$$

где T – температура, q – плотность источников тепла, K – коэффициент теплопроводности (теплофизическая характеристика материала).

Коефіцієнт теплопроводности определяется экспериментально и характеризует способность материала проводить тепло.

Уравнение (1) получено из закона сохранения энергии и закона Фурье:

$$Q = -K \cdot grad(T),$$

где Q – тепловой поток.

Для применения МКЭ нужно интегральное тождество, аналогичное принципу возможных перемещений. Его получаем из (1) и формулы Грина путем интегрирования по частям [3]:

$$\int_{\Omega} q \cdot t \cdot d\Omega = \int_{\Omega} -div(K \cdot grad(T)) \cdot t \cdot d\Omega = \int_{\Omega} K \cdot grad(T) \cdot grad(t) \cdot d\Omega - \int_{\Gamma} K \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot t \cdot d\Gamma, \quad (2)$$

здесь t – вариация T .

Возможны три варианта граничных условий:

- 1) на части границы Γ_1 задана температура $T = T_0$;
- 2) на части границы Γ_2 задан тепловой поток $Q = Q_0$, т. е. извне подводится или отводится тепло;
- 3) на части границы Γ_3 происходит теплообмен с окружающей средой по закону $Q + k \cdot (T - T_1) = 0$, T_1 – температура окружающей среды, k – коэффициент теплообмена, характеризующий интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Граничное условие 1) аналогично заданным перемещениям. Граничное условие 2) аналогично нагрузке по поверхности или линии. Граничное условие 3) реализуется аналогично упругой опоре с жесткостью k , кроме того, добавляется нагрузка $k \cdot T_1$. Разработаны специальные конечные элементы (КЭ) поверхностного теплообмена. Для плоских расчетных схем – это одноузловой и двухузловой элементы поверхностного теплообмена КЭ 151 и КЭ 168, для пространственных расчетных схем – трех-, четырех-, шести- и восьмиузловые пластины поверхностного теплообмена КЭ 162, 164, 163 и 165.

Стационарная задача теплопроводности была реализована в программном комплексе ЛИРА версии 10.6 (ПК ЛИРА 10.6). В ПК ЛИРА 10.8 эта реализация получила дальнейшее развитие: добавлен одноузловой конечный элемент теплообмена с указанием температуры окружающей среды, стало возможным решение нелинейных и нелинейных монтажных задач

с моделированием фильтрации в насыщенном влагой грунте и задачи расчета температурного поля. После решения стационарной задачи теплопроводности, в пределах загрузки, выполняется определение напряженно-деформированного состояния (НДС) от этого температурного поля.

ПК ЛИРА 10.8 позволяет задавать источники тепла в элементах, на ребрах и гранях элементов и в отдельных узлах расчетной модели. Также реализованы трапециевидная нагрузка и нагрузка по функции на группы объектов (узлы, стержни, пластины) в виде заданной температуры или заданного теплового потока (источника тепла).

Чтобы задача расчета температурного поля была поставлена корректно, необходимо задать граничные условия: значение заданной температуры (хотя бы в одном узле расчетной схемы) или установить конечный элемент теплообмена. После определения температурного поля и расчета НДС конструкции доступны следующие результаты:

1. для температурного поля:
 - 1.1. мозаики, изополя и изолинии распределения температуры по узлам;
 - 1.2. мозаики распределения температуры в элементах;
 - 1.3. мозаики, изополя и изолинии значений теплового потока в элементах с возможностью наложения вектора направления;
2. для НДС конструкции от воздействия температурного поля:
 - 2.1. перемещения узлов;
 - 2.2. усилия/напряжения в элементах;
 - 2.3. главные и эквивалентные напряжения в элементах;
 - 2.4. узловые реакции.

Выполнено сравнение результатов расчета на основе программной реализации описанного подхода с аналитическим решением, полученным в работе [3]. Рассчитано кольцо (рис. 1) с заданными постоянными значениями температуры на внутренней и внешней окружностях.

Геометрические размеры кольца: внутренний радиус $R_1 = 20$ см, внешний радиус $R_2 = 40$ см, толщина и коэффициент теплопроводности материала роли не играют. Температура на внутренней окружности $T_1 = 20^\circ\text{C}$ и на внешней – $T_2 = 40^\circ\text{C}$.

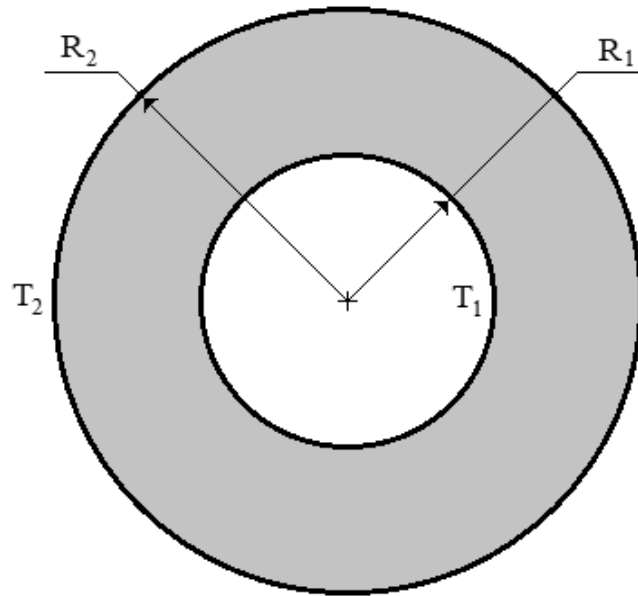


Рис. 1. Кольцо с постоянными значениями температуры на внутренней и внешней окружностях

Температура на внутренней и внешней окружностях задавалась в виде граничного условия 1).

Аналитическое выражение для температуры вдоль радиуса имеет вид:

$$T(R) = T_1 + \frac{\ln\left(\frac{R}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}(T_2 - T_1). \quad (3)$$

На рисунке 2 показаны результаты расчета по ПК ЛИРА 10.8. В таблице 1 выполнено сравнение результатов расчета по ПК ЛИРА 10.8 с аналитической зависимостью. Как видно из таблицы 1, полученные результаты очень хорошо согласуются с аналитическим решением. Максимальная погрешность в результатах не превышает 0,0012 %.

Таблиця 1.

Сравнение результатов расчета радиальных температур

Радиус, см	Температура, °С		Погрешность, %
	Аналитическое значение	Численное решение по ПК ЛИРА 10,8	
20	20	20	0
21	21,40779	21,4077	0,000404
22	22,75007	22,749985	0,000376
23	24,03268	24,032522	0,000646
24	25,26069	25,260462	0,000895
25	26,43856	26,438297	0,001002
26	27,57023	27,569929	0,001101
27	28,65919	28,658861	0,001142
28	29,70854	29,708202	0,001126
29	30,72106	30,720716	0,001113
30	31,69925	31,698912	0,001066
31	32,64536	32,645035	0,001009
32	33,56144	33,561119	0,000951
33	34,44932	34,44902	0,000872
34	35,31069	35,310406	0,000818
35	36,1471	36,146832	0,000737
36	36,95994	36,95969	0,000671
37	37,75051	37,750271	0,000621
38	38,51999	38,519772	0,000562
39	39,26948	39,269302	0,00046
40	40	40	0

В качестве еще одного примера рассмотрим моделирование фрагмента строительных ограждающих конструкций здания, расчет которого выполнен в программе Tempreg-3D [5]. На рисунке 3 приведена расчетная область, ее размеры, температуры внутри и снаружи здания и точка определения температуры, находящаяся во внутреннем угле. На наружной и внутренней границах заданы граничные условия теплообмена (3), на остальных участках границы расчетной области тепловой поток равен нулю.

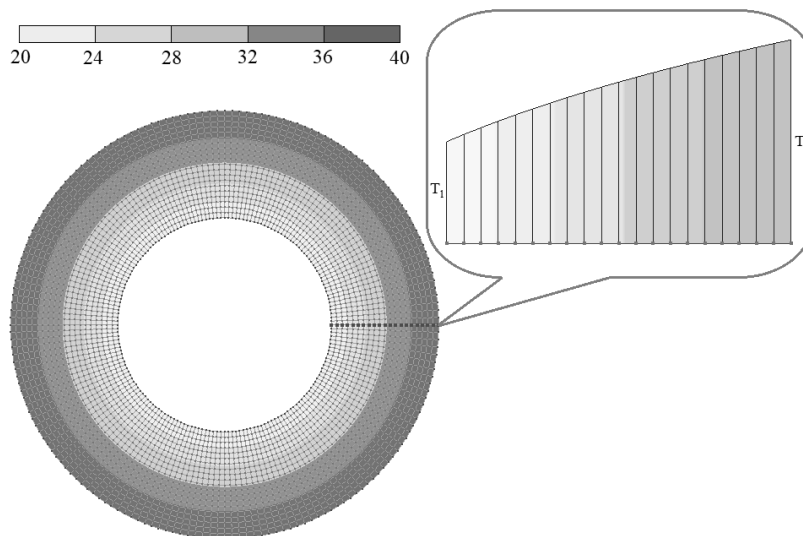


Рис. 2. Изополе температур в узлах расчетной схемы

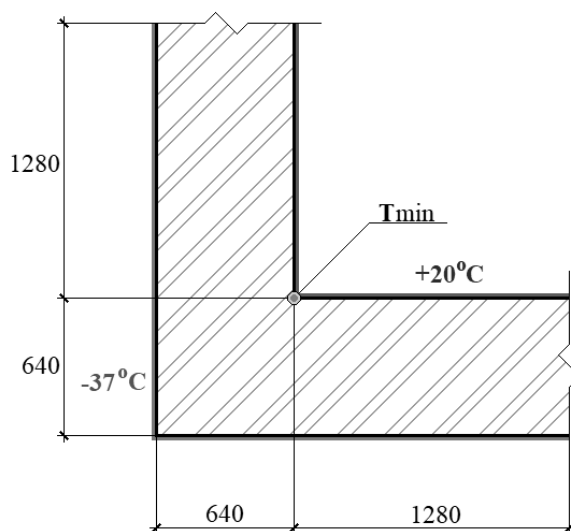


Рис. 3. Фрагмент ограждающих конструкций здания

Коэффициент теплопроводности кирпича был принят $K = 0.35 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}$,

коэффициенты теплообмена: для внутренней поверхности $k_{int} = 8.7 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$;

для наружной поверхности $k_{ext} = 23.0 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$.

Изначально разбивка области 640×640 мм принималась 5×5 КЭ с дальнейшим удвоением разбивки: 10×10 КЭ, 20×20 КЭ и т. д. В [5] задача моделировалась в пространственной постановке, нами же были рассмотрены как двумерная, так и пространственная постановки. На внутренней и наружной поверхностях устанавливались элементы поверхностного теплообмена (граничное условие 3):

- для двумерного случая – КЭ 168;
- для трехмерного – КЭ 164,

на которые задавалась нагрузка, соответствующая температуре окружающей среды (рис. 4).

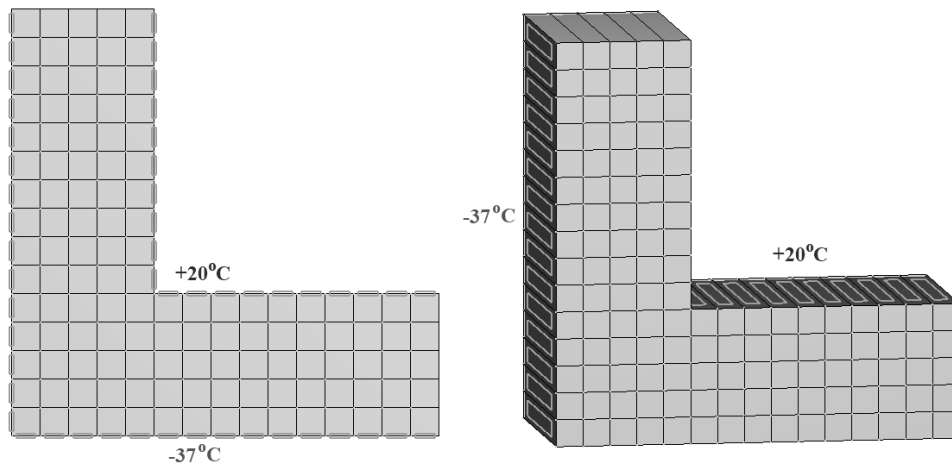


Рис. 4. Расчетные схемы рассматриваемого узла с начальной разбивкой

Результаты расчетов для различной степени дискретизации расчетной области сведены в таблицу 2.

Таблиця 2.

Сравнение результатов расчета температур в контрольной точке

№	Разбивка области	Количество элементов	Размер КЭ, мм	Температура T_{\min} , °C		
				Temper-3D, [5]	ПК ЛИРА 10.8	
					двухмерная	пространственная
1	5 x 5	175	128	11.9099	11.90998	11.90998
2	10 x 10	600	64	11.5756	11.57566	11.57566
3	20 x 20	2200	32	11.4203	11.42072	11.42072
4	40 x 40	8400	16	11.3589	11.35996	11.35996
5	80 x 80	32800	8	11.338	11.33889	11.33889
6	160 x 160	129600	4	11.3317	11.33219	11.33219
7	320 x 320	515200	2	11.3294	11.33019	11.33019
8	640 x 640	2054400	1	11.3281	11.32962	11.32962

На рисунке 5 приведены графики изменения значения температуры в контрольной точке в зависимости от степени дискретизации расчетной области.

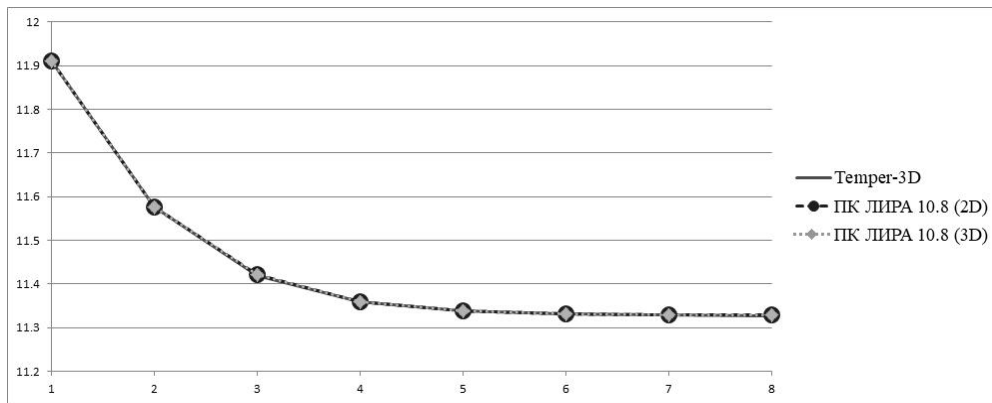


Рис. 5. Графики изменения температуры

Как показывает рисунок 5, графики хорошо согласуются и, начиная с пятой задачи, результат не изменяется – сходимость достигнута.

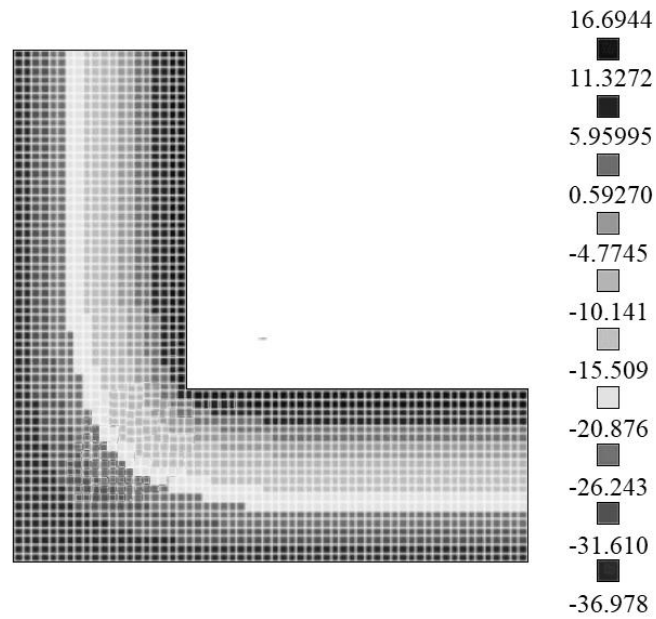


Рис. 6. Температурное поле, полученное по программе Temper-3D

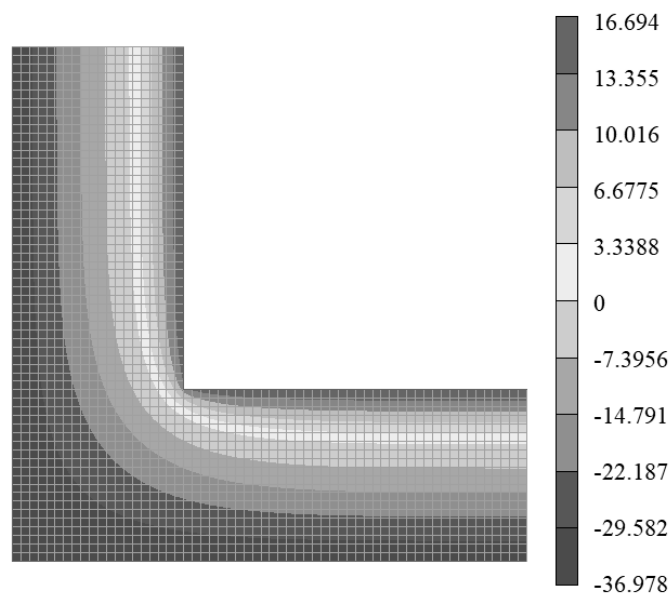


Рис. 7. Температурное поле, полученное по ПК ЛИРА 10.8

На рисунку 6 и 7 показано распределение температур (температурное поле) для пространственной задачи с разбивкой 20×20 , на рисунке 6 – решение по Temp-3D, а на рисунке 7 – решение по ПК ЛИРА 10.8. Распределения температур идентичны и экстремальные значения температуры одинаковы.

На рисунке 8 показано изополе с изолиниями для теплового потока в двумерной задаче с разбивкой 5×5 . Уменьшенная разбивка выбрана для лучшей наглядности отображения направлений теплового потока.

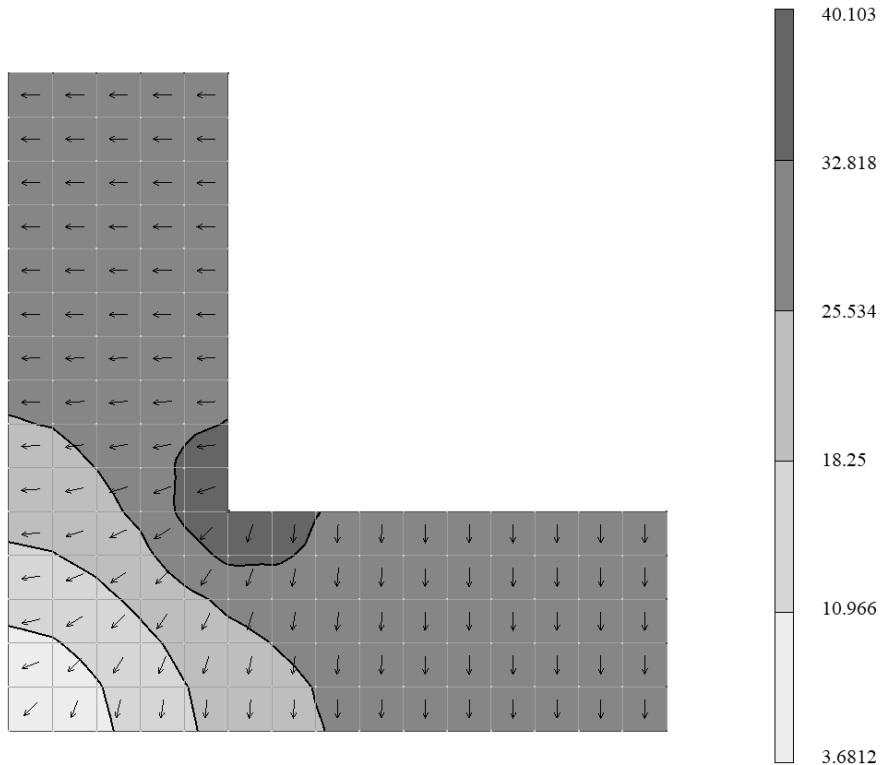


Рис. 8. Изополе с изолиниями для теплового потока в задаче с разбивкой 5×5

Литература

- [1] Анискин Н. А. Температурный режим бетонной массивной плотины с воздушной полостью в суровых климатических условиях / Н. А. Анискин, Н. Хоанг // Весник МГСУ.– М. : – 2012. – №12. – С. 212–218.
- [2] Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.

- [3] Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 560 с.
- [4] Пуляев И. С. Методы регулирования теплового режима бетона при ускоренном возведении железобетонных элементов пилонов вантовых мостов: дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук: спец. 05.23.05 “Строительные материалы и изделия” / И. С. Пуляев. – М., 2010. – 207 с.
- [5] Расчет МКЭ ограждающих конструкций [Электронный ресурс] / С. В. Федоров. – Омск – Теплотехнические расчеты в Temper - 3D. – Режим доступа к странице: <https://www.temper3d.ru/publish/raschet-mke/> – Название с экрана.

Рішення стаціонарної задачі теплопровідності методом скінченних елементів

¹Гераймович Ю. Д., канд. техн. наук, ²Євзеров І. Д., д-р техн. наук,
¹Марченко Д. В.

¹Група компаній ЛІРА, ТОВ ПРАЙМ КАД, Україна,
²Група компаній ЛІРА, ТОВ ВЕГА КАД, Україна

Анотація. Викладено основні співвідношення і можливі варіанти граничних умов для стаціонарної задачі теплопровідності. Отримана інтегральна тотожність, аналогічна принципу можливих переміщень для застосування методу скінченних елементів. Виконано порівняння результатів розрахунку на основі програмної реалізації та аналітичного рішення для плоского кільця з заданими постійними значеннями температури на внутрішній і зовнішній окружностях. Для фрагмента будівельних огорожувальних конструкцій будівлі для різного ступеня дискретизації розрахункової області виконано співставлення результатів розрахунку на основі програмної реалізації і розрахунку за програмою Temper-3D.

Ключові слова: програмний комплекс ЛІРА 10, стаціонарна задача теплопровідності, метод скінченних елементів, скінченні елементи теплообміну, граничні умови.

Solution of stationary heat conduction problem by finite element method

¹Yu. Geraimovich, Cand. Sc. (Eng.), ²I. Yevzerov, Dr. Sc. (Eng.),
¹D. Marchenko

¹Group of Companies LIRA, LTD. PRIME CAD, Ukraine,
²Group of Companies LIRA, LLC VEGA CAD, Ukraine

Abstract. The main relations and possible variants of boundary conditions for stationary heat conduction problem are described. An integral identity analogous to the principle of possible displacements for application of the finite element method is obtained. The results of calculation are compared on the basis of software implementation and analytical solution for a flat ring with given constant temperature values on the inner and outer circumferences. For a fragment of building envelop structures for different degree of

discretization of the calculation area, the calculation results are compared on the basis of the software implementation and calculation according to the Temper-3D program.

Key words: LIRA 10 software package, stationary heat conduction problem, finite element method, finite heat exchange elements, boundary conditions.

Надійшла до редколегії 6.12.2017 р.