

УДК 539.3

Л.М. Кривоблоцька, доц., канд. фіз.-мат. наук*Кіровоградський національний технічний університет, м.Кропивницький, Україна
E-mail: igor_givi@list.ru*

Сингулярні ітерації в задачах газової динаміки

В статті викладено результати аналізу досліджень задач газової динаміки з метою встановити, з яким типом сингулярності зустрічаються механіки і математики при розв'язуванні ітераційними методами нелінійних проблем, які були запропоновані методи для нівелювання цих сингулярностей. Виявилось, що ці методи приводять до громіздких обчислень і штучних припущень при розв'язанні нелінійних задач; щоб покращити "добротність" ітеративних схем, потрібно у самі рівняння або в їх розв'язки у вигляді рядів або послідовностей певним чином вводити довільні функції і параметри, за допомогою яких можна впливати на прискорення збіжності ітераційних процесів. В статті запропоновано розв'язання задачі Лайтхілла на основі цього підходу.

ударна хвиля, збурене середовище, задача Лайтхілла, сингулярні ітерації, регуляризація розв'язків**Л.Н. Кривоблоцкая, доц., канд. фіз.-мат. наук***Кировоградский национальный технический университет, г. Кропивницкий, Украина*

Сингулярные итерации в задачах газовой динамики

В статье изложены результаты анализа исследований задач газовой динамики с целью установить, с каким типом сингулярности встречаются механики и математики при решении итерационными методами нелинейных проблем, какие методы были предложены для нивелирования этих сингулярностей. Оказалось, что эти методы приводят к громоздким вычислениям и искусственным предположениям при решении нелинейных задач; чтобы улучшить "добротность" итеративных схем, нужно в те же уравнения или в их решения в виде рядов или последовательностей определенным образом вводить произвольные функции и параметры, с помощью которых можно влиять на ускорение сходимости итерационных процессов. В статье предложено решение задачи Лайтхилла на основе этого подхода.

ударная волна, возмущенная среда, задача Лайтхилла, сингулярные итерации, регуляризация решений

Постановка проблеми. Ітераційні методи знайшли широке застосування при розв'язуванні нелінійних задач в різних областях фізики, математики, механіки, астрономії, машинобудування, зокрема, сільськогосподарського машинобудування, де багато деталей та агрегатів мають форму пластин з отвором та без нього. Особливо плідно ці методи використовуються при дослідженні нелінійних задач газової динаміки і абсолютно твердих тіл. За допомогою теорії збурень можна одержувати певне число наближень, проте ці наближення у багатьох випадках дозволяють одержати придатний, в практичному розумінні, розв'язок задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В задачах з вказаних областей механіки сингулярні ітерації зустрічаються порівняно часто і вони доставляють дослідникам значних клопотів. Тут можна назвати статті оглядового плану [1], в яких є посилання на задачі з аерогідрогазодинаміки, де знайдені методами ітерації розв'язки містять нерегулярні складові; вказані деякі методи їх регуляризації. Ці методи пізніше дістали назву метода Пуанкаре-Лайтхілла-Го (ПЛГ). В статті запропоновано розв'язання задачі Лайтхілла методом, ідеї якого викладені в працях [4], [5], [6], де досліджувався напружено-деформований стан пластини з отвором з врахуванням геометричної нелінійності. Розв'язки геометрично нелінійних задач мають на

«нескінченності» особливості, тобто вони необмежено зростають. Так, наприклад, якщо $\alpha_1 = \rho$, $\alpha_2 = \varphi$ – полярні координати, отвір L – круглий, то вже лінійне наближення для прогинів має особливості ρ^2 , $\ln \rho$; моменти не мають особливостей. При $k = 2, 3, \dots$ розв’язки задач для цієї пластини та обчислені на їх основі силові характеристики мають при $\rho \rightarrow \infty$ ці та інші особливості вже більш високих порядків.

В процесі пошуку цих методів виникло непросте питання: де знайти, почерпнути вихідні ідейні принципи? В цьому значну допомогу надав проведений огляд вказаних наукових досліджень з ряду областей механіки. З’явилась така загальна ідея: вводити певним чином в самі початкові рівняння або в ітеративні схеми їх розв’язування довільні функції, параметри, варіюючи їх конкретним вибором, значеннями “гасити” небажані типи сингулярностей.

Зрозуміло, що реалізація на практиці цієї ідеї – задача не проста. В цій статті викладено конкретну реалізацію вказаної загальної ідеї.

Постановка завдання. Розглядається лише одна задача – задача Лайтхілла, на якій проілюстровано аналітичну природу сингулярних ітерацій і суть метода ПЛГ. Розглядаємо нескінченний двовимірний простір, який заповнений незбуреним ідеальним газом. Припускаємо, що у початку інерціальної системи координат Oxy є наявним кільце “нескінченно” малого радіусу з дуже розтягнутого полімерного матеріалу. Вважається, що кільце під дією внутрішнього зростаючого тиску починає розширюватись з певною швидкістю $\varepsilon \alpha_0$, де ε – малий параметр, α_0 – швидкість звуку у незбуреному газі. При його русі повітря буде збурюватись і спереду кільця побіжить ударна хвиля з швидкістю $M \alpha_0$, де $M = \frac{v}{\alpha_0}$ – число Маха. Вибір системи

координат, необхідні позначення представлені на рис.1. Припускається, що позаду фронту ударної хвилі має місце адіабатичний процес. Ставиться задача: знайти поле швидкостей і тисків у області рухомого газу, яка обмежена радіусами $\varepsilon a_0 t \leq r \leq M a_0 t$.

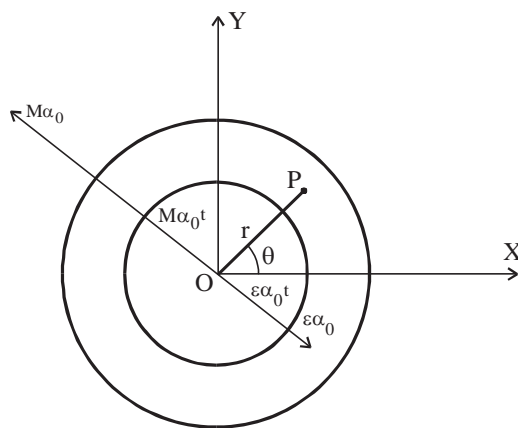


Рисунок 1 – Вибір системи координат для задачі Лайтхілла

Виклад основного матеріалу. Оскільки задача осесиметрична, то потенціал швидкостей $\varphi(r, t)$ Лайтхілл пропонує знаходити у такому виді

$$\varphi = a_0^2 t f\left(\frac{r}{a_0 t}\right) = a_0^2 t f(x), \quad x = \frac{r}{a_0 t}. \quad (1)$$

Значить, в кінцевому рахунку, задача зводиться до знаходження функції $f(x)$ на відрізьку $[\varepsilon, M]$.

Для цього використовуються рівняння рідин (газів) в полярних (циліндричних) координатах [2].

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2)$$

де $\rho = \rho(r, t)$ – густина газу, $p = p(r, t)$ – функція тиску. У цьому рівнянні три невідомі функції: $v_r(r, t)$, $\rho(r, t)$, $p(r, t)$, дописуємо рівняння нерозривності [2]

$$a^2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0. \quad (3)$$

З врахуванням (3) рівняння руху (2) можна перетворити до виду

$$a^2 \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (4)$$

де $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ – швидкість звуку у збуреному газі; $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}$.

Оскільки $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$, $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, то з (4) одержуємо

$$a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \quad (5)$$

Використовуємо інтеграл Лагранжа-Коші [3],

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) у рівняння (5), одержуємо рівняння Лайтхілла для визначення функції $\varphi(r, t)$:

$$a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \quad (7)$$

Якщо прийняти до уваги вираз (1), то після громіздких обчислень отримуємо:

$$\frac{a^2}{a_0^2} \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) \right] = [x - f'(x)]^2 f''(x). \quad (8)$$

Згідно [2] знаходимо, що швидкість звуку пов'язана з потенціалом φ таким відношенням

$$\frac{a^2}{\varkappa - 1} + a_0^2 \left[f(x) - x f'(x) + \frac{1}{2} f'^2(x) \right] = f_0(t), \quad (9)$$

де \varkappa – показник адиабати.

Вважаємо, що на лінії течії існує точка, в якій газ адиабатично гальмується. Тоді можна встановити, що

$$f_0 = \frac{a_0^2}{\varkappa - 1} = \text{const.}$$

Остаточно одержимо рівняння для визначення функції $f(x)$ в області $x \in [\varepsilon, M]$:

$$\left[1 - (\alpha - 1) \left(f - x f' + \frac{1}{2} f'^2 \right) \right] \left(f'' + \frac{1}{x} f' \right) = [x - f'(x)]^2 f''(x). \quad (10)$$

При $x = \varepsilon$ швидкості руху точок ободу кільця повинні співпадати з швидкістю руху матеріальних частинок, що до нього “прилипають”. Тоді

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = a_0 f' \left(\frac{r}{a_0 t} \right) \Big|_{r=\varepsilon a_0 t} = \varepsilon a_0 \Rightarrow f'(\varepsilon) = \varepsilon. \quad (11)$$

У збуреному газі розповсюджується три типи поверхонь: поверхня уявного кільця S_0 , спереду його рухається акустична хвиля з фронтом S_a , і спереду S_a рухається ударна хвиля з фронтом S_y , взаємне розміщення цих поверхонь вказуємо на рис. 2

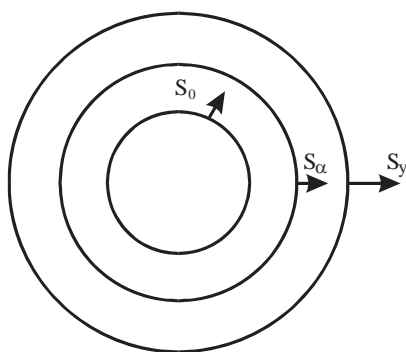


Рисунок 2 – Взаємне розміщення поверхонь S_0, S_a, S_y

Величини, які відносяться до збуреного ударного хвилею середовища, будемо тут і надалі позначати “*”.

На поверхні S_a повинно бути неперервне спряження потенціалів швидкостей для дозвукового і надзвукового руху газу; маємо

$$\varphi(r, t) \Big|_{r=a_0 t} = \varphi^*(r, t) \Big|_{r=a_0 t}. \quad (12)$$

Приймаючи до уваги формулу (1), одержуємо з (12) другу граничну умову

$$f(x) \Big|_{x=1} = f^*(x) \Big|_{x=1}. \quad (13)$$

Третю і четверту граничні умови одержимо, якщо “вийдемо” на поверхню ударної хвилі S_y . При переході через поверхню не повинні терпіти стрибків потоки маси, енергії і кількості руху. В результаті одержують на S_y умови Гюгоніо-Ренкіна [3]. Потенціал швидкостей при переході через поверхню розриву повинен бути неперервним. Тоді

$$\varphi^*(r, t) = a_0^2 t f^* \left(\frac{r}{a_0 t} \right) \Big|_{r=a_0 M t} = a_0^2 t f^*(M) = 0 \Rightarrow f^*(M) = 0. \quad (14)$$

$$\frac{\theta_+}{\theta_-} \Big|_{r=M a_0 t} = \frac{(\varepsilon + 1)M^2}{(\varepsilon - 1)M^2 + 2} \Rightarrow \frac{M a_0}{M a_0 - a_0 f'(M)} = \frac{(\varepsilon + 1)M^2}{(\varepsilon - 1)M^2 + 2}. \quad (15)$$

В цій формулі θ_+, θ_- – швидкості ударної хвилі відносно газу спереду і позаду фронту хвилі S_y ; можна встановити, що $\theta_+ = M\alpha_0$, $\theta_- = M\alpha_0 - \alpha_0 f'(x)$.

Приймаючи до уваги (15), маємо четверту граничну умову

$$f'(M) = \frac{2(M^2 - 1)}{(\varepsilon + 1)M}. \quad (16)$$

Встановлено, що для розв'язування поставленої задачі необхідно основне (ключове) рівняння (10) представити у такому виді:

$$(1 - x^2)f'' + \frac{1}{x}f' = (2a_1f - 2a_2xf' + a_2f'^2)f'' + \left[\frac{2a_1}{x}f - 2a_1f' + \frac{a_1}{x}f'^2 \right]f'. \quad (17)$$

Бачимо, що тут $x=1$ – особлива точка, тому рівняння (17) необхідно розглядати для $x < 1$ – в області акустичних збурень і для $x > 1$ – в області збурень від ударної хвилі.

Значить, повинні розглядати два рівняння:

а) $x < 1$

$$Lf = L_1fN_2f + L_2fN_1f + a_2(Nf)^2N_2f + \frac{a_1}{x}(Nf)^3; \quad (18)$$

б) $x > 1$

$$L^*f = -L_1^*fN_2^*f - L_2^*fN_1^*f - a_2(N^*f)^2N_2^*f - \frac{a_1}{x}(N^*f)^3. \quad (19)$$

У цих рівняннях L, L, L_1, L_2, N_1, N_2 – лінійні диференціальні оператори наступного виду

$$L = (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}; L^* = (x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx}; N_1 = \frac{d}{dx}, N_2 = \frac{d^2}{dx^2}; \quad (20)$$

$$L_1 = 2a_1 - 2a_2x\frac{d}{dx}; L_2 = \frac{2a_1}{x} - 2a_1\frac{d}{dx}; a_1 = \frac{1}{2}(-1); a_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon + 1).$$

Граничні умови рівнянь (18), (19) будуть мати такий вид:

$$\begin{aligned} Nf \Big|_{x=\varepsilon} &= 0; f(x) = f^*(x) \text{ при } x = 1; \\ f^*(x) \Big|_{x=M} &= 0; N_1f^* \Big|_{x=M} = \frac{2(M^2 - 1)}{(\varepsilon + 1)M} \end{aligned} \quad (21)$$

Розв'язок поставленої задачі представляємо у такому виді:

$$f = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p f_p(x); f^* = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m f_m^*(x). \quad (22)$$

З аналізу наведених досліджень бачимо:

- сингулярності породжуються коефіцієнтами вихідного ключового рівняння;
- в перших і вищих наближеннях порядки цих сингулярностей типу

$(1 - x^2)^{-\alpha_k^{(m)}}$, $(x^2 - 1)^{-\beta_k^{(m)}}$, де $\{\alpha_k^{(m)}\}, \{\beta_k^{(m)}\}$ – множини додатних чисел, які збільшуються зі збільшенням номера ітерації k ;

– застосування методу ПЛГ до порівняно простої осесиметричної задачі приводить до громіздких обчислень і штучних припущень; при застосуванні метода ПЛГ до розв’язку неосесиметричних задач труднощі і певного типу невизначеності істотно зростають.

Ця задача є яскравим підтвердженням необхідності і актуальності пошуку більш простих і ефективних методів регуляризації сингулярних ітерацій, рядів.

Обчислення наближень нелінійної задачі. Для визначення функцій f_p, f_m^* одержуємо послідовність таких лінійних диференціальних рівнянь:

а) область $x < 1$

$$L f_1 = 0; \tag{23}$$

$$L f_2 = L_1 f_1 N_2 f_1; \tag{24}$$

.....

$$L f_k = \sum_{n=1}^{k-1} (L_1 f_{k-n} N_2 f_n + L_2 f_{k-n} N_1 f_n) + \sum_{q=1}^{k-2} \left[\left(\sum_{n=1}^{k-q-1} N_1 f_{k-q-n} N_1 f_n \right) N_2 f_q + \frac{a_1}{x} \sum_{n=1}^{k-q-1} N_1 f_{k-q-n} N_1 f_n N_1 f_q \right]; \quad (k = 3, 4, 5, \dots); \tag{25}$$

б) область $x > 1$:

$$L_1^* f_1^* = 0; \tag{26}$$

$$L^* f_2^* = -L_1^* f_1^* N_2^* f_1^*; \tag{27}$$

.....

$$L^* f_k^* = -\sum_{n=1}^{k-1} (L_1^* f_{k-n}^* N_2^* f_n^* + L_2^* f_{k-n}^* N_1^* f_n^*) - \sum_{q=1}^{k-2} \sum_{n=1}^{k-q-1} (N_1^* f_{k-q-n}^* N_1^* f_n^* N_2^* f_q^* + \frac{a_1}{x} N_1^* f_{k-q-n}^* N_1^* f_q^*). \quad (k = 3, 4, 5, \dots). \tag{28}$$

До вказаних систем диференціальних рівнянь можна написати відповідні граничні умови, використовуючи (21).

Можна встановити, що загальні розв’язки рівнянь (23) – (28) можна представити у такому загальному вигляді:

а) $\varepsilon \leq x \leq 1$

$$f_k = C'_k \varphi_1(x) + C'_{k+1} + \int_{\varepsilon}^x \frac{x_1}{(1-x_1^2)^{3/2}} [\varphi_1(x) - \varphi_1(x_1)] F_k(f_1, \dots, f_{k-1}; f'_1, \dots, f'_{k-1}; f''_1, \dots, f''_{k-1})_{x=x_1} dx_1; \tag{29}$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

б) $1 \leq x \leq M$

$$f_k^* = \tilde{C}_k^* \psi_1(x) + \tilde{C}_{k+1}^* + \int_1^x \frac{x_1}{(x_1^2-1)^{3/2}} [\psi_1(x) - \psi_1(x_1)] \Phi_k(f_1^*, f_2^*, \dots, f_{k-1}^*; f_1'^*, \dots, f_{k-1}'^*; f_1''^*, f_2''^*, \dots, f_{k-1}''^*)_{x=x_1} dx_1; \tag{30}$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{x^2-1} - \arctg \sqrt{x^2-1}; \quad (k = 2, 3, \dots).$$

У цих рівняннях функції $F_k(\dots)$, $\Phi_k(\dots)$ – праві частини диференціальних рівнянь відповідно (23) – (25) і (26) – (28) для k -го наближення. \tilde{N}'_k , C'_{k+1} , \tilde{C}_k^* , \tilde{C}_{k+1}^* – сталі інтегрування. Уже з загального виду формул (29), (30) бачимо канал появи сингулярностей в ітераціях і зростання їх порядку з зростанням номера наближення.

Наведемо розв'язки поставленої задачі у двох наближеннях. Після проведення громіздких обчислень для області $\varepsilon \leq x \leq 1$ одержуємо

$$f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \dots \quad (31)$$

Тут введені такі позначення:

$$f_1(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varphi_1(x) + \frac{2\sqrt{M^2-1}}{\varepsilon(x+1)} \left(\arctg \sqrt{M^2-1} - \sqrt{M^2-1} \right); \quad (32)$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

$$f_2(x) = -\varphi_1(x) R_\varepsilon^{(1)}(x) + R_\varepsilon^{(2)} - R_\varepsilon^{(1)}(1) + R_1^{(2)}(M), \quad (33)$$

де функції $R_\varepsilon^{(1)}(x)$, $R_\varepsilon^{(2)}(x)$ мають наступну аналітичну структуру

$$R_\varepsilon^{(1)}(x) = -\frac{2C_1^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2C_1^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{a_1 C_1^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{a_1 C_1^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{2} a_1 C_1^2 \frac{x^2}{1-x^2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} a_1 C_1^2 \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \ln \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad (34)$$

$$R_\varepsilon^{(2)}(x) = -2C_1^2 \left(-\ln \sqrt{1-x^2} + \ln \sqrt{1-\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) - a_1 C_1^2 \left[-\frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} \left(\ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \left(\ln \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 2 \ln x^2 + 2 \ln \varepsilon^2 + 4 \ln \sqrt{1-x^2} - 4 \ln \sqrt{1-\varepsilon^2} \right] - 2a_1 C_1 C_2 \times \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x^2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \ln \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right). \quad (35)$$

Можна встановити, що потенціал швидкостей $\varphi(x)$ для $x \in [\varepsilon, 1]$ є неперервна функція. Інша справа з виразом для швидкостей матеріальних частинок газу, які знаходяться в околі поверхні $x=1$.

Маємо

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = a_0 f'(x) = a_0 [\varepsilon f'_1(x) + \varepsilon^2 f'_2(x) + \dots]; \quad (36)$$

$$f'_1(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varphi'_1(x); \quad f'_2(x) = -\varphi'_1(x) R_\varepsilon^{(1)}(x) - \varphi_1(x) \frac{dR_\varepsilon^{(1)}}{dx} + \frac{dR_\varepsilon^{(2)}}{dx}.$$

Громіздкими обчисленнями можна встановити, що

$$v_r = a_0 \left[\varepsilon f_1'(x) + \varepsilon^2 f_2'(x) + \dots + \varepsilon^k f_k(x) + \dots \right], \quad (37)$$

$$\text{де } f_k'(x) = h_k(x, \varepsilon) + \sum_{m=1}^{N_k} \frac{h_k^{(m)}(x, \varepsilon)}{(1-x^2)^{\alpha_k^{(m)}}} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Тут введені позначення: $h_k(x, \varepsilon)$ і $h_k^{(m)}(x, \varepsilon)$ – регулярні на відрізку $[\varepsilon \leq x \leq 1]$ функції; N_k – деяке ціле число; $\{\alpha_m^{(k)}\}$ – множина (скінченна для заданого k) додатних цілих або дробових чисел.

На основі одержаного числа наближень бачимо, що у функції v_r вже на перших кроках ітераційного процесу появляється особливість типу $(1-x^2)^{-\beta}$ ($\beta > 0$ – ціле додатне або дробове число).

Можна встановити, що з ростом номера наближень порядок цієї особливості катастрофічно збільшується. Тим самим неможливо обчислювати значення швидкості частинки газу в околі акустичної хвилі $x=1$.

Для області $1 < x \leq M$ маємо:

$$v_r = \alpha_0 \left[\varepsilon f_1^*(x) + \varepsilon^2 f_2^*(x) + \dots \right], \quad (38)$$

де

$$\left. \begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{2\sqrt{M^2-1}}{\delta(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}; \\ f_2'(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \Psi_1(x) [R_1^{(1)}(x) - R_1^{(1)}(M)] - [R_1^{(1)}(x) + R_1^{(2)}(M)] \right\}; \end{aligned} \right\}; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} R_1^{(1)}(x) &= 2C_1^* \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Big|_{x=1} \right) - aC_1^{*2} \left(\frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{x^2-1} - \frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \Big|_{x=1} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Big|_{x=1} \Big) + aC_1^* C_2^* \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1} \Big|_{x=1} \right); \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} R_1^{(2)}(x) &= 2C_1^{*2} \left(\ln x - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \arctg \sqrt{x^2-1} \right) + 2a_1 C_1^{*2} \left[2 \frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2} \frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \Big|_{x=1} + \frac{1}{2} \left(\arctg \sqrt{x^2-1} \right)^2 \right] - 2a_1 C_1^* C_2^* \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Big|_{x=1} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2} \frac{\arctg \sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \Big|_{x=1} + \frac{1}{2} \arctg \sqrt{x^2-1} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

В загальному випадку

$$f_k^*(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon, M) + \sum_{m=1}^{M_k} \frac{h_k^{(m)}(x, \varepsilon, M)}{(x^2-1)^{\beta_k^{(m)}}}. \quad k = (2, 3, \dots) \quad (42)$$

У формулах (40), (41) символічне позначення $r(x) \Big|_{x=1}$ слід розуміти в тому сенсі, що обчислюється значення функції при значеннях x близьких (але не рівних) до

1. Зміст функцій $h_k^*(x, \varepsilon)$, $h_k^{*(m)}(x, \varepsilon, M)$ у виразі (42) повністю аналогічний змісту відповідних функцій у виразі (37). Зауважимо, що коефіцієнти C_1 , C_2 і C_1^* , C_2^* , які входять в наведені вище вирази, мають вид

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, C_2 = C_2^* = \frac{2\sqrt{M^2-1}}{\varepsilon(\varepsilon+1)} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{M^2-1} - \sqrt{M^2-1} \right); C_1^* = \frac{2}{\varepsilon(\varepsilon+1)} \sqrt{M^2-1}. \quad (43)$$

Бачимо, для області $1 < x < M$ вирази для v_r мають особливість типу $(x^2-1)^{-\alpha}$ (α – ціле або дробове число), порядок цих особливостей значно зростає зі збільшенням номера наближення.

Щоб “гасити” до певної міри порядки вказаних особливостей в одержаних аналітичних розв’язках, Лайтхілл ще на початку етапу розв’язування застосовує метод ПЛГ. Це означає, що пропонується знаходити шукані розв’язки у виді (23), і незалежну змінну x також представляти у вигляді розкладу

$$x = x^{(1)}\varepsilon + x^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

Потім рекомендується підбирати функції $x^{(k)}$ з таким розрахунком, щоб “знищувалися” особливості. Можна впевнитись, що такий підхід має не тільки обмежену область застосування, а і являється супергромідким.

Регуляризація розв’язків задачі Лайтхілла. З одержаних розв’язків задачі Лайтхілла для вказаних інтервалів бачимо, що в загальному розв’язки для швидкості руху матеріальних частинок можна представити такими сингулярними рядами:

а) $\varepsilon \leq x \leq 1$

$$v_r = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[h_k(x, \varepsilon) + \sum_{m=1}^{N_k} \frac{h_k^{(m)}(x, \varepsilon)}{(1-x^2)^{\alpha_k^{(m)}}} \right]; \quad (44)$$

б) $1 \leq x \leq M$

$$v_r = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[h_k^*(x, \varepsilon, M) + \sum_{m=1}^{M_k} \frac{h_k^{*(m)}(x, \varepsilon, M)}{(x^2-1)^{\beta_k^{(m)}}} \right]. \quad (45)$$

Вказані ряди, як бачимо, є розбіжними в околі точки $x=1$ для $\forall \varepsilon \geq 0$. На фронті ударної хвилі, як встановлено на основі умов динамічної сумісності, має місце стрибок значень вказаних швидкостей. Для обчислення значень швидкості в околі фронту хвилі необхідно знаходити велику кількість наближень, що принципово неможливо для цієї осесиметричної задачі. Тому єдиним виходом в даній ситуації є застосування запропонованого в [4], [5] метода. Цей метод застосуємо з таким розрахунком, щоб знизити порядок особливості в околі точки $x=1$, підбираючи певним чином регуляризуючі функції і параметри.

Викладемо схему застосування розробленого методу, наприклад, для рядів типу (44).

Розглянемо частинну суму вказаного ряду:

$$v_r^{(N)} = a_0 \sum_{k=1}^N \varepsilon^k H \left(x, \varepsilon, \frac{1}{(1-x^2)^{\alpha_k^{(m)}}} \right). \quad (46)$$

Вводимо в розгляд узагальнені частинні суми:

$$v_r^{*(N)} = a_0 \sum_{k=1}^N \varepsilon^k H \left(x, \varepsilon, \frac{1}{(1-x^2)^{\alpha_k^{(m)}}} \right) \delta_k(N, \sigma, \lambda), \quad (47)$$

де величини σ – функції від незалежної змінної x ($\varepsilon \leq x \leq 1$) і деяких поки ще довільних параметрів $a_1, a_2 \dots$ таких, що $\sigma > 0$.

Оскільки в розглядуваній задачі вдалося по ходу обчислень виділити регулярну та іррегулярну частини в кожному наближенні, то це значно спрощує аналіз і проведення аналітичних перетворень.

Маємо:

$$v_r^{*(N)} = v_{r,N}^{*(r)} + v_{r,N}^{*(ir)}, \quad (48)$$

де

$$v_{r,N}^{*(r)} = a_0 \sum_{k=1}^N \varepsilon^k h_k(x, \varepsilon) \delta_k(N, \sigma, \lambda), \quad (49)$$

$$v_{r,N}^{*(ir)} = a_0 \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \left(\sum_{m=1}^{N_k} \frac{h_k(x, \varepsilon)}{(1-x^2)^{\alpha_k^{(m)}}} \delta_k(N, \sigma, \lambda) \right). \quad (50)$$

Бачимо, що значний вплив на точність обчислень має іррегулярна частина (50). Зрозуміло, що при розв'язанні задачі Лайтхілла, навіть в осесиметричному випадку, можна одержати максимум три наближення в аналітичній формі. Як показали дослідження, на основі цих трьох наближень можна побудувати практично придатні розв'язки з асимптотичною точністю; для цього необхідно підібрати певним чином регуляризуючі функції σ і параметр λ . Покажемо, що у розгляді задачі це принципово можна здійснити.

Згідно розробленого алгоритму підбору цих функцій і параметрів будемо покладати

$$v_{r,3}^{*(ir)} = a_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^k \left(\sum_{m=1}^{N_3} \frac{h_3(x, \varepsilon)}{(1-x^2)^{\alpha_3^{(m)}}} \delta_k(3, \sigma, \lambda) \right). \quad (51)$$

Формулюємо наступну нерівність

$$\left| \varepsilon^3 \left(\sum_{m=1}^{N_3} \frac{h_3(x, \varepsilon)}{(1-x^2)^{\alpha_3^{(m)}}} \delta_k(3, \sigma, \lambda) \right) \frac{\beta^3}{(\beta + \sigma(x, \dots))^3} \right| \leq \xi. \quad (52)$$

Наперед, згідно алгоритму, задаємо ε і ξ – фіксовану (асимптотичну точність обчислень). Припускаємо, що множина чисел $\{\alpha_3^{(N_3)}\}$ утворює зростаючу послідовність, тоді максимальним порядком сингулярності буде величина $\alpha_3^{(N_3)}$. Оскільки

$$\beta = 2\lambda, \quad \lambda > 0, \quad \text{маємо } \frac{\beta}{\beta + \sigma(x, \dots)} = \frac{2\lambda}{2\lambda + \sigma(x, \dots)};$$

покладаємо $\sigma = \frac{a_1}{(1-x^2)^{\frac{\alpha_3^{(N_3)}}{3}}}$, $a_1 > 0$ – довільний параметр.

Тим самим

$$\frac{\beta}{\beta + \sigma(x, \dots)} = \frac{2\lambda(1-x^2)^{\frac{\alpha_3^{(N_3)}}{3}}}{2\lambda(1-x^2)^{\frac{\alpha_3^{(N_3)}}{3}} + a_1}, \quad \left(\frac{\beta}{\beta + \sigma(x, \dots)} \right)^3 = \frac{8\lambda^3(1-x^2)^{\alpha_3^{(N_3)}}}{\left(2\lambda(1-x^2)^{\frac{\alpha_3^{(N_3)}}{3}} + a_1 \right)^3}.$$

Фіксуємо точку x_0 достатньо близьку з заданою точністю до одиниці. Замість нерівності (52) розглядаємо наступну

$$\left| \varepsilon^3 \left(\sum_{m=1}^{N_3} \frac{h_3(x_0, \varepsilon)}{(1-x_0^2)^{\alpha_3^{(m)}}} \delta_k(3, \sigma, \lambda) \right) \frac{8\lambda^3(1-x^2)^{\alpha_3^{(N_3)}}}{\left(2\lambda(1-x^2)^{\frac{\alpha_3^{(N_3)}}{3}} + a_1 \right)^3} \right| \leq \xi.$$

З цієї нерівності знаходимо остаточно значення параметрів підсумовуючої функції λ, a_1 .

В кінцевому рахунку одержимо наступного виду наближені формули для обчислення іррегулярної частини швидкості матеріальних частинок газу на достатньо близькій відстані від фронту ударної хвилі.

$$v_{r,3}^{*(ir)} = a_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^k \left(\sum_{m=1}^{N_3} \frac{h_3(x, \varepsilon)}{(1-x^2)^{\alpha_3^{(m)}}} \right) \delta_k(3, \sigma(x_k, a_1)). \quad (53)$$

де

$$\delta_1 = \frac{\beta}{p} \left[1 + \frac{\sigma}{p} + \frac{\sigma^2}{p^2} \right]; \quad \delta_2 = \frac{\beta^2}{p^2} \left[1 + \frac{2\sigma}{p} \right]; \quad \delta_3 = \frac{\beta^3}{p^3}.$$

У цій формулі слід розуміти, що $\sigma = \sigma(x_0, a_1)$; $p = 2\lambda + \sigma(x_0, a_1)$.

Зрозуміло, що тут відпадає необхідність “гасити” сингулярності, але можна покращити практичну збіжність ряду, частинними сумами якого є (49).

Висновки. Оскільки в диференціальні рівняння Лайтхілла входять лише полілінійні оператори, то після громіздких аналітичних досліджень, обчислень можна показати, що розв’язки типу (53) задовольняють з асимптотичною точністю вихідному рівнянню і граничним умовам.

Можна вказати і інші типи регуляризованих функцій стосовно даної задачі і інші області застосування запропонованого метода в задачах механіки. Запропоновані методи є могутнім механізмом при розв’язанні задач нелінійних коливань, проблем стійкості, плоских і просторових задач теорії пружності, пластичності. На основі проведених конкретних обчислень можна робити ряд висновків, які важливі для інженерної практики.

Список літератури

1. Проблемы механики [Текст] : сб. статей / Под ред. Х. Драйдена, Т. Кармана. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 340 с.
2. Пуанкаре А. Избранные труды в 3 т. Т1 : Новые методы небесной механики [Текст] / А. Пуанкаре . – М.: Наука, 1971. – С. 335-340.
3. Каюк Я.Ф. Метод регуляризации сингулярных итераций в нелинейных задачах изгиба пластин с отверстием [Текст] / Я.Ф. Каюк, Л.Н. Кривоблоцкая // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2002. – Вип. 1. – С. 83-90.
4. Каюк Я.Ф. Концентрация моментов в окрестности круглого отвестия пластины при больших изгибах [Текст] / Я.Ф. Каюк, Л.Н. Кривоблоцкая // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2002.– Вип. 2.– С. 187-191.
5. Каюк Я.Ф. Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений [Текст] / Я.Ф. Каюк, Л.Н. Кривоблоцкая // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 36. – С.98-108.

Larysa Kryvoblotska, Assoc. Prof., PhD phys. & math. sci.

Kirovograd National Technical University, Kropyvnickiy, Ukraine

Singular iteration in gas dynamics problems

The article presents the results of the analysis of gas dynamics research problems to determine with which type of singularity are encountered the Mechanical Engineers and Mathematics in solving of nonlinear problems when applying iteration methods; methods which have been proposed for the leveling of the singularity.

It was found that these methods lead to cumbersome calculations and artificial assumptions in solving of nonlinear problems; in order to improve the "quality factor" of iterative schemes, it is necessary in the same equation or their solutions in the form of series or sequences in a certain way to introduce the arbitrary functions and parameters, with which you can to influence on acceleration of convergence of iterative processes.

The article proposes a solution of Lighthill's problem based on this approach.

shock wave, disturbed environment, Lighthill's problem, singular iteration, regularization of solutions

Одержано 08.11.16

УДК 631.37

В.П. Кувачов, доц., канд. техн. наук

Таврійський державний агротехнологічний університет, м.Мелітополь, Україна

E-mail: kuvachoff@mail.ru

До питання компонування спеціалізованих ширококолієних енерготехнологічних транспортних засобів для колійної системи землеробства

В статті розглядаються питання оптимального компонування спеціалізованих ширококолієних енерготехнологічних транспортних засобів для колійної системи землеробства з позиції їх задовільної стійкості та плавності руху.

мостове та колійне землеробство, стійкість і плавність руху, компонування, амплітудно-частотні характеристики