

Харьковская национальная академия городского хозяйства

## О ЗАДАЧЕ УЧЕТА ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**Введение.** Действие вихревых токов в машине постоянного тока связано с весьма важными для машины процессами, такими как ее коммутация, добавочные потери, перенапряжения. Вихревые токи возникают в электропроводящих массивных элементах и связаны с нестационарными процессами, протекающими в этих элементах. К этим процессам можно отнести следующие:

- возникновение вихревого тока в пазовой части;
- вихревые токи в коммутирующих секциях якорной обмотки [1];
- вихревые токи в станине [2, 3, 4].

Актуальность решения задач распределения вихревых токов, обладающих общностью постановки, не вызывает сомнений.

**Постановка задачи.** Действие вихревого тока в участках электрической машины связано с неравномерностью распределения на рассматриваемом участке силовых линий магнитного поля. Решение задачи распределения линий напряженности магнитного поля  $H_n$  по сечению участка с вихревым током является дуальным решением задачи о распределении плотности вихревого тока  $j$  по рассматриваемому сечению. Решения задачи распределения вихревых токов в перечисленных выше случаях могут быть найдены как численными, так и аналитическими методами, что предлагается в настоящей статье

**Результаты работы.** В аналитической постановке задачи участки магнитопровода с вихревыми токами входят составляющими в рассматриваемую магнитную цепь, которая представляется приведенной схемой замещения.

В общем случае, исходной основой для анализа является система уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Ниже будет показана важность корректной постановки задачи расчета, поэтому приведем систему уравнений в интегральной и дифференциальной форме с комментариями, относящимися к рассматриваемому кругу задач.

Основными векторами, определяющими электромагнитное поле, являются:

- вектор электрического смещения  $\vec{D}$  и связанный с ним вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Вектора  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  связаны соотношением удельной электрической проницаемости  $\epsilon$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1)$$

где физическая константа  $\epsilon_0 = 8,856 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;

- вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  и связанный с ним вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Вектора  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  связаны соотношением удельной магнитной проницаемости  $\mu$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (2)$$

где физическая константа  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$ .

- вектор плотности тока  $\vec{j}$  (в рассматриваемых случаях это вектор плотности вихревого тока) связан с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление участка с вихревым током.

Четыре уравнения Максвелла приводятся в интегральной и дифференциальной формах.

Первое уравнение представляет закон полного тока.

<i>Интегральная форма</i>	<i>Дифференциальная форма</i>	
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H_n \cdot dl = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s},$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}.$	(4)

В (4) отсутствует составляющая "тока смещения"  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в силу условий рассматриваемой задачи.

Второе уравнение представляет закон электромагнитной индукции.

<i>Интегральная форма</i>	<i>Дифференциальная форма</i>	
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{z} = \oint E_n \cdot dz = -\frac{d\Phi}{dt},$	$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$	(5)

Величина магнитного потока в (5) определена как поток вектора магнитной индукции  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B_n \cdot ds.$

Третье и четвертое уравнения выражают тот факт, что полем источников является лишь электрическое поле, а источников у магнитного поля не бывает.

<i>Интегральная форма</i>	<i>Дифференциальная форма</i>	
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q,$	$\text{div } \vec{D} = q.$	(6)

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0,$	$\text{div } \vec{B} = 0.$	(7)
---------------------------------------	----------------------------	-----

Здесь величина  $Q$  представляет суммарный электрический заряд, заключенный в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ , а величина  $q$  представляет плотность объемного электрического заряда. Уравнения (6) и (7) говорят о природе электрического поля как поля источников и магнитного поля как поля вихрей и выражают известную теорему Гаусса. Интегральная форма уравнений (6) и (7) представляет поток вектора. Дифференциальная форма уравнений (6) и (7) получается при помощи предельного перехода из интегральной при  $S \rightarrow 0$ . Замкнутый характер поверхности  $S$

позволяет однозначно провести указанный предельный переход, который собственно и дает понятие векторной операции дивергенции.

С уравнениями (4) и (7) связаны граничные условия векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , представляющие соотношения непрерывности линий вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и источников вектора  $\vec{H}$  на границе двух сред:

$$B_{n1} = B_{n2}; \quad (8)$$

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (9)$$

Граничное условие (9) справедливо при отсутствии токового слоя на границе.

Более внимательного рассмотрения требует предельный переход в (4) и (5), который производится по теореме Стокса. Для закона полного тока эта теорема представляет выражение

$$\int_S (\text{rot } \vec{H})_z ds = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (10)$$

Сам предельный переход осуществляется в соответствии с выражением

$$\text{rot}_z \vec{H} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint H_n \cdot dl}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int j_z \cdot ds}{S}. \quad (11)$$

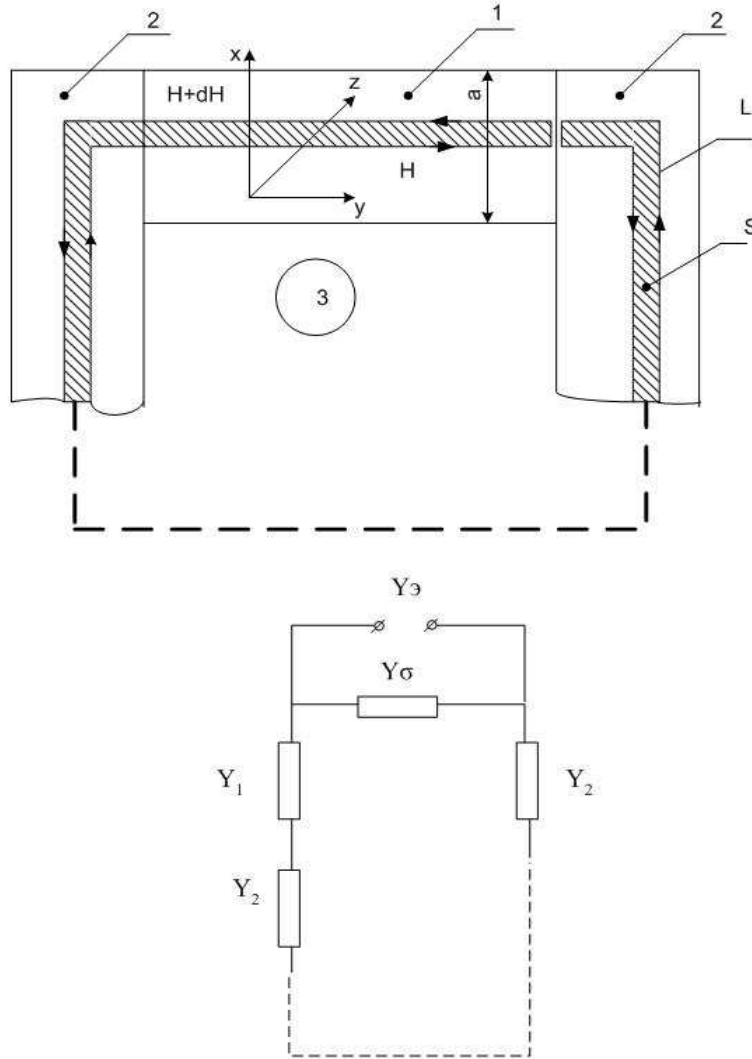
Здесь  $S$  – площадь рассматриваемой поверхности, внутри которой протекает полный ток с плотностью  $\vec{j}$  в направлении вектора  $d\vec{z}$ . Сам же ток ограничен замкнутым контуром обхода  $L$ . Таким образом, контур  $L$  и соответствующая ему площадь  $S$  неразрывно связаны. В общем случае предельный переход связан с понятием циркуляции вектора. Циркуляция вектора  $\vec{H}$  может приниматься по любому замкнутому контуру.

*Задачи, сочетающие уравнения поля со схемами замещения.* Схему замещения следует представлять как некоторую модель реального поля. Пользуясь понятиями модели, следует обозначить основные особенности указанной модели в рамках рассматриваемой задачи. Главными особенностями есть предположения о сосредоточенности поля в рамках магнитопровода, соответственно в ветвях схемы, и о характере представления поля в рамках ветвей схемы. Магнитное поле в рамках схемы замещения представим в виде "нитей" магнитного потока замкнутых по контурам ветвей схемы.

Последнее представление физически определяет и характер поля, и особенности граничных условий (8), (9). Условие о тангенциальной составляющей напряженности поля (9) вообще не рассматривается, поскольку в рамках представленной модели тангенциальной составляющей поля вообще не существует, а условие (8) равенства нормальной составляющей магнитной индукции на границе раздела сред следует принимать как непрерывность "нитей" потока.

Такого рода ограничения жестко определяют единственно возможный вид контура циркуляции вектора поля в виде контура  $L$  на рис.1, то есть контура, охватываемого замкнутыми "нитьями" потока. Например, контур, замыкающийся только по одному участку или части участков магнитопровода, выбирать невозможно по причине условия о тангенциальной (поперечной) составляющей поля.

Неучет формы контура циркуляции может приводить к расчетной ошибке, заключающейся в применении уравнений поля в дифференциальной форме для участков модели поля в рамках схемы замещения. Типичный пример возникновения этой ошибки можно рассмотреть на примере простой модели магнитной цепи электромагнита, показанной на рис.2.



1 – рассматриваемый участок; 2 – участки магнитопровода; 3 – область рассеивания

Рисунок 1– Массивный участок в составе неоднородной магнитной цепи

Рассмотрим массивный участок прямоугольного сечения со сторонами  $a$  и  $b$  длиной  $l_1$  в составе магнитной цепи электромагнита с воздушным зазором величиной  $\delta$  при мгновенном отключении внешнего источника МДС (рис.2). Удельное электрическое сопротивление рассматриваемого участка  $\rho$ , а магнитная проницаемость составляет  $\mu_1$ . Начальное значение магнитного потока на момент отключения МДС составляет  $\Phi_0$ .

Для среды с вихревым током плотностью  $j$  используем в дифференциальной форме первое и второе уравнения Максвелла (4) и (5), а также закон Ома (3), откуда, применяя операцию ротора к (3), имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{j}) &= \frac{1}{\rho} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot rot}(\vec{B}) &= \text{rot}(\mu_1 \vec{j}) = -\Delta(\vec{B}) + \text{grad div}(\vec{B}) = \mu_1 \text{rot}(\vec{j}). \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta$  – оператор лапласиана. В последнем преобразовании использовано четвертое уравнение Максвелла (7),  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ , поэтому

$$\Delta(\vec{B}) = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\begin{cases} \nabla^2 B_x(x, y) = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \nabla^2 B_y(x, y) = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial t}. \end{cases} \quad (12)$$

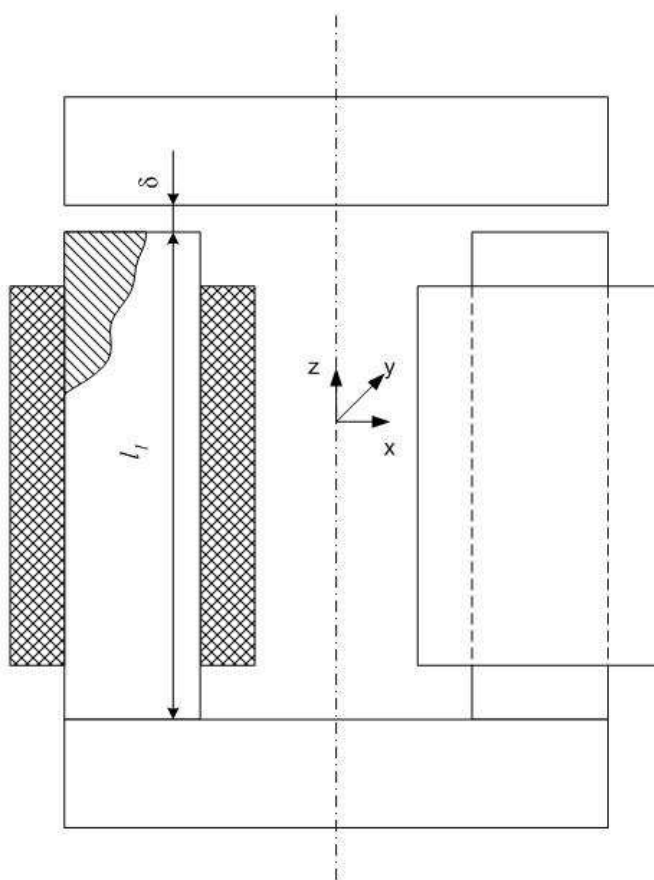


Рисунок 2 – Электромагнит с неоднородной магнитной цепью

Уравнения (12) записаны в декартовой системе координат, дифференциальный оператор  $\nabla^2 B_x(x, y) = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}$ .

Система уравнений (12), записанная относительно составляющих вектора магнитной индукции, является уравнением типа "теплопроводности". Его начальными условиями могут быть

$$B_x(0) = B_y(0) = \frac{\Phi_0}{ab}.$$

Граничные условия определяются соотношениями (8) и (9) для непрерывной среды. Применение уравнений (12) для массивного участка  $l_1$  приведет к ошибке, поскольку пути прохождения потока на рис.2 ограничены границами магнитопровода, фактически рамками схемы замещения, и среда уже не является непрерывной, а дискретной. В одномерной постановке (для плоскопараллельного поля) граничные условия относятся сугубо к участку  $l_1$  и выражаются нулевым суммарным током через участок и отсутствием вихревого тока в середине:

$$\int_0^a j(x)dx = 0, \quad j(a/2) = 0. \quad (13)$$

Совместно с уравнениями (12) решение для участка  $l_1$  получается "самодостаточным", и настораживает тот факт, что в нем отсутствует такой важный параметр магнитной цепи, как величина зазора  $\delta$ .

К сожалению, такие подходы встречаются в литературе ([5, 6]). Иное решение рассматриваемой задачи приведено в статье [1] и работах Р.Рюденберга в виде:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \sum_{m,n=1,3,5\dots} \frac{1}{m^2 n^2} e^{-t/T_{mn}}, \quad (14)$$

$$T_{mn} = \frac{\mu_0}{\rho} \cdot \frac{l_1}{\delta} \times \frac{a^2 b^2}{\pi^2 (m^2 b^2 + n^2 a^2)}.$$

Решение (14) учитывает факторы формы магнитопровода – длину демпфирующего участка  $l_1$  и величину воздушного зазора  $\delta$  электромагнита.

*Предельный переход для первого уравнения Максвелла. Эквивалентная магнитная проницаемость.* Аналитические приближения оценки вихревых токов в неоднородных магнитопроводах, как правило, связаны с применением схем замещения. В общем случае, постановку задачи показывает рис.1. Участок 1 является массивным электропроводящим элементом сложного магнитопровода. При изменениях магнитного потока  $\Phi(t)$  в нем возникает вихревой ток с распределенной плотностью  $j(x)$  в указанной системе координат. Вихревой ток замыкается в направлении координаты  $z$ , соответственно длину участка 1 в этом направлении будем обозначать  $L_1$ . В составе магнитопровода рассматриваются  $n$  последовательных участков с порядковой нумерацией, а также область 3, соответствующая магнитному рассеиванию. Эскизу магнитопровода соответствует его эквивалентная схема замещения, элементами которой являются последовательно включенные магнитные проводимости участков магнитопровода  $Y_i$  и проводимость рассеивания  $Y_\sigma$ , включенная в схему замещения параллельно. Значения магнитных проводимостей определяются соотношением

$$Y_i = \mu_i \frac{S_i}{l_i}, \quad (15)$$

где величины  $\mu_i, S_i, l_i$  – соответственно магнитная проницаемость, площадь сечения и длина магнитной силовой линии  $i$ -го участка. Для участка рассеивания магнитная проницаемость равна  $\mu_0$ .

Контур циркуляции вектора  $\vec{H}$  обязан строго соответствовать замкнутой обозначенной магнитной силовой линии (контур  $L$ ) с соблюдением первого граничного условия (8).

Предельный переход, соответствующий теореме Стокса, состоит в устремлении  $dx \rightarrow 0$ , при этом соответствующая поверхность  $S$ , ограниченная контуром  $L$ , будет стягиваться не в точку, как это имело место для общего случая среды, а в бесконечно тонкую полосу. Векторная операция ротора относится в рассматриваемом нами случае к циркуляции вектора не по бесконечно малому контуру, а по бесконечно тонкому контуру. В соответствии с интегральной формой уравнения (4)

$$\sum_{i=1}^n dH_i \times l_i = j(x) l_1 dx. \quad (16)$$

Из непрерывности линий магнитной индукции и величины магнитного потока  $\Phi$  (7), (8) следует

$$H_i = \frac{\mu_1}{\mu_i} \cdot \frac{S_1}{S_i} \times H_1. \quad (17)$$

С учетом значений (15) и (17) дифференциальная форма первого уравнения Максвелла в рассматриваемом случае окончательно принимает вид:

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{1}{Y_1 \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}} \times j(x).$$

Последнее выражение верно для "полезного" потока, т.е. той части магнитного потока, который проходит собственно по магнитопроводу. Для потока рассеивания может быть получено аналогичное выражение:

$$\frac{dH_{1\sigma}}{dx} = \frac{Y_\sigma}{Y_1} \times j(x).$$

Согласно принципу суперпозиции, справедливому для схемы замещения, окончательный вид дифференциальной формы закона полного тока для участка 1 имеет вид:

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{Y_\sigma}{Y_1} \times j(x), \quad (18)$$

где  $Y_\sigma$  – эквивалентная магнитная проводимость всей магнитной цепи, показанная на схеме замещения рис.1, и равная

$$Y_\sigma = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}} + Y_\sigma \right). \quad (19)$$

Первое слагаемое в выражении (19) представляет суммарную проводимость последовательно соединенных участков магнитопровода.

Выражения (18) и (19) позволяют ввести понятие "эквивалентной среды", в которой действует вихревой ток в массивном участке 1, входящем в схему замещения. Соотношения магнитной проницаемости этой эквивалентной среды  $\mu_\sigma$  с реальной магнитной проницаемостью массивного участка  $\mu_1$  имеет вид:

$$\frac{\mu_\sigma}{\mu_1} = \frac{Y_\sigma}{Y_1}. \quad (20)$$

*Уравнение для вихревого тока в массивном участке.* Дифференциальная форма закона полного тока (18) позволяет записать уравнение в частных производных как для распределенной плотности вихревого тока по сечению участка 1 в виде  $j(x, t)$ , так и для распределения поля в виде векторов  $H(x, t), B(x, t)$ .

Согласно закону Ома (3) и интегральной форме закона электромагнитной индукции (5) для произвольного контура протекания вихревого тока справедливо соотношение

$$\begin{aligned} E(x) \times L_1 - E(0) \times L_1 &= -\frac{d\Phi_x}{dt}, \\ E(x) &= \rho_1 j(x). \end{aligned} \quad (21)$$

здесь  $\rho_1$  – удельное электрическое сопротивление рассматриваемого участка.

Величина магнитного потока, сцепленного с контуром вихревого тока, определяется как

$$\Phi_x = \mu_1 L_1 \int_0^x H_1(x) dx = \mu_1 L_1 \left[ x H_1(x) - \int_0^x x dH_1(x) \right]. \quad (22)$$

В последнем преобразовании применено правило интегрирования по частям. Выражение (22) позволяет выразить поток  $\Phi_x$  через распределение вектора напряженности  $H_1(x)$ . Связь вектора поля и плотности тока в виде (18) и (20) позволяет выразить поток  $\Phi_x$  через распределенную плотность вихревого тока:

$$\Phi_x = \mu_2 L_1 \left[ \int_0^x x j(x) dx - x \int_0^x j(x) dx \right]. \quad (23)$$

Преобразование выражения потока (22) с учетом соотношения (21) приводит к уравнению распределения напряженности на рассматриваемом участке:

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi_x}{dt} &= \rho_1 L_1 [j(x) - j(0)] = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \rho_1 L_1 \times \frac{\partial H_1(x)}{\partial x}, \\ -\frac{\mu_1}{\mu_2} \rho_1 L_1 \times \frac{\partial H_1(x)}{\partial x} &= -\mu_1 L_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[ x H_1(x) - \int_0^x x dH_1(x) \right]. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по координате  $x$  и приводя подобные, окончательно приходим к уравнению для распределения поля:

$$\frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x^2} = \frac{\mu_2}{\rho_1} \times \frac{\partial H_1(x, t)}{\partial t}.$$

Последнее уравнение удобно представлять в виде функции безразмерной относительной координаты  $\xi = \frac{x}{a}$ , которая изменяется в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$ ;  $0 \leq x \leq a$ . Здесь  $a$  – ширина участка 1 по координате  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1(\xi, t)}{\partial \xi^2} &= T \times \frac{\partial H_1(\xi, t)}{\partial t} \quad \text{или} \\ \frac{\partial^2 B_1(\xi, t)}{\partial \xi^2} &= T \times \frac{\partial B_1(\xi, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь постоянная  $T$  представляет постоянную времени вихревых токов и определяется выражением:

$$T = \frac{\mu_2}{\rho_1} \times a^2. \quad (25)$$



Аналогично приведенным преобразованиям выражение для потока (23) позволяет получить уравнение распределения плотности вихревого тока по рассматриваемому участку:

$$-\frac{d\Phi_x}{dt} = \rho_1 L_1 [j(x) - j(0)] = -\mu_\varepsilon L_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^x x j(x) dx - x \int_0^x j(x) dx \right].$$

Дифференцируя это выражение дважды по координате  $x$  и приводя подобные, получим:

$$\frac{\partial^2 j(\xi, t)}{\partial \xi^2} = T \times \frac{\partial j(\xi, t)}{\partial t}. \quad (26)$$

Задание начальных и граничных условий в уравнениях (24) и (26) определяется конкретными условиями решаемых задач. Также следует отметить сравнение полученных уравнений с ранее приведенным уравнением (12), коэффициенты правых частей которых, определяющие постоянные времени вихревого тока  $T$ , отличаются в соотношении  $\mu_\varepsilon / \mu_1$ .

**Выводы.** В основе требуемой корректировки вида уравнений поля лежит допущение о сосредоточении поля в рамках ветвей схемы замещения, нарушающее непрерывность области. Широко применяемые численные методы расчета поля, основанные на разбиении области на конечные элементы, сетку, конечные разности, связывающие всю расчетную область непрерывно граничными условиями (8), (9), в такой корректировке не нуждаются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Калиниченко Ю.С. О вихревом магнитном поле в пазу якоря машины постоянного тока / Ю.С.Калиниченко, С.П.Калиниченко // Техническая электродинамика. – 1988. – №6. – С.23-27.
2. Иоффе А.Б. Тяговые электрические машины / Иоффе А.Б. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 232с.
3. Захарченко Д.Д. Тяговые электрические машины: учебник для вузов ж-д. трансп. / Д.Д.Захарченко, Н.А.Ротанов. – М.: Транспорт, 1991. – 343с.
4. Яковенко В.А. Влияние конструктивных особенностей крупных электродвигателей на коммутацию в нестационарных режимах / В.А.Яковенко, С.П.Калиниченко // Электромашиностроение и электрооборудование: респ. научно-техн. сборник. – К.: Техніка. – 1979. – Вып. 29. – С.82-84.
5. Скобелев В.Е. Двигатели пульсирующего тока / Скобелев В.Е. – М.-Л.: Энергия, 1968. – 231с.
6. Жиц М.З. Переходные процессы в машинах постоянного тока / Жиц М.З. – М.: Энергия, 1974. – 112с.