высокоточной портативной восьмиканальной аппаратуры LMS SCADAS Mobile (Бельгия). Разработанная методика может быть использована для исследования различных процессов: статическое и квазистатическое, а также динамическое тензометрирование, регистрация сигналов с частотой дискретизации до 204,8 кГц по каждому каналу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидроди- намических явлений. - М.: Наука, 1966. - 687 с.
2. Ударные трубы / Под ред. Х.А. Рахматулина и С.С. Семёнова.– М.: ИЛ, 1962. – 699 с.
3. Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Nonstationary deformation of an elastic Plate with a Notch under Action of a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, № 11. – P. 1264 -1269.
4. И.И. Аникьев, М.И. Михайлова, Е.А. Сущенко. Реакция упругой системы «консольная пластина – стержень» на действие ударной волны // Прикл. мех. − **48,** № 6. - 2012. − С.135-141.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 681.3

ДЕГТЯРЬ С.В. [1], к. фіз.-мат. н.
ДЕГТЯРЬ В.Г. [2], к. фіз.-мат. н.

[1]Національний економічний університет, Київ
[2]Національний транспортний університет, Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СІМ'Ї РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Вступ. Прикладні задачі математики, зокрема проблеми стабілізації систем управління, побудови оптимального управління спонукають до вивчення систем диференціальних рівнянь, що залежать від випадкових процесів. Проста стохастична модель односекторної економіки розглядалась в роботі [2]. Мета роботи дослідити асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу зі зчисленною множиною станів [1].

Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(Y(t),X(t)), \quad dimY(t) = m, \tag{1}$$

де $X(t)$ – напівмарковський випадковий процес зі зчисленою множиною станів $\theta_1, \theta_2 \dots$. Припустимо, що частинні системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dY_k(t)}{dt} = F_k(Y_k(t)), \quad F_k(Y) \equiv F(Y,\theta_k), \quad (k = 1,2,\dots), \tag{2}$$

мають розв'язки, які можна продовжити при $t > 0$. Розв'язок системи (2) у формі Коші позначимо через

$$Y_k(t) \equiv R_k(t, Y(u)), \quad R_k(u, Y(u)) \equiv Y(u), \quad (k = 1,2,\dots). \tag{3}$$

Нехай $\tau = inf\{t \ge 0; X(t) \ne X(0)\}$ – момент першого стрибка процесу $X(t), t \ge 0$. Введемо умовні математичні сподівання випадкового розв'язку

$$M_k(t,Y) = P\{Y_k(t) \mid Y_k(0) = Y, X(0) = \theta_k\}, k = 1,2,... \tag{4}$$

Зафіксуємо $k \in \{1,2,...\}$ і покладемо

$$f_k(t,Y) = M_k(t,Y),$$

$$g_k(t,Y) = P_k\{Y_k(t) \mid Y_k(0)\} I_{\{0 \le t < \tau\}} = R_k(t,Y) P_k\{t < \tau\},$$

$$G_{ks}(dt) = P_k\{X(\tau) = \theta_s, \tau \in dt\},$$

де $P_k(...) = P(... \mid X(0) = \theta_k), k = 1,2,...$.

Покажемо, що має місце векторне рівняння відновлення

$$f(t,Y) = g(t,Y) + \int_0^t G(du) f(t-u,Y),$$

де $G(du)$ – матриця з елементами $G_{ks}(du)$, $f(t,Y)$ і $g(t,Y)$ – вектори-стовпці з компонентами $f_k(t,Y)$ і $g_k(t,Y)$ відповідно.

Дійсно за формулою повної ймовірності дістанемо систему інтегральних рівнянь

$$M_k(t,Y) = R_k(t,Y) P_k\{t < \tau\} + \int_0^t \sum_{s=1}^{\infty} P_k(X(\tau) - \theta_s, \tau \in du) M_s(t-u, R_k(u,Y)), \tag{5}$$

яка очевидно еквівалентна наведеному векторному рівнянню відновлення.

Якщо система рівнянь (1) лінійна і має вигляд

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(X(t))Y(t), \quad A_k = A(\theta_k) \quad (k = 1,2,...), \tag{6}$$

то система рівнянь (5) набуває такого вигляду

$$M_k(t)Y = e^{A_k t} Y P_k\{t < \tau\} + \int_0^t \sum_{s=1}^{\infty} P_k(X(\tau) = \theta_s, \tau \in du) M_s(t-u) e^{A_k u} Y. \tag{7}$$

Результати роботи. Для розв'язання поставленої задачі застосуємо аналітичний апарат – теорему марковського відновлення [2]. Припустимо, що напівмарковський випадковий процес залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$. Перепозначимо

$$X(t) = X_\varepsilon(t), \quad \tau = \tau^\varepsilon, \quad Y(t) = Y_\varepsilon(t).$$

Нас цікавитиме асимптотична поведінка умовних математичних сподівань випадкового розв'язку системи (1) при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$.

Нехай випадковий процес $X_\varepsilon(t)$, $t \ge 0$ збігається до деякого випадкового процесу $X_0(t)$, $t \ge 0$ з моментом першого стрибка τ^0 в розумінні

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} P_k\left\{X_\varepsilon(t_1)=\theta_{s_1},\ldots,X_\varepsilon(t_n)=\theta_{s_n},t_1,t_2,\ldots t_n<\tau^\varepsilon\right\}=\\&=P_k\left\{X_0(t_1)=\theta_{s_1},\ldots,X_0(t_n)=\theta_{s_n},t_1,t_2,\ldots t_n<\tau^0\right\}\end{aligned} \qquad (8)$$

в точках неперервності $t_1,t_2,\ldots t_n$ граничного розподілу ймовірностей, $n=1,2,\ldots$; $\theta_{s_i}\in\{\theta_1,\theta_2,\ldots\}, i=1,2,\ldots$ для всіх $k=1,2,\ldots$.

Вважатимемо, що $X_\varepsilon(0)=X(0)$.

Позначимо $m_k=P_k\tau^0$ і вимагатимемо, щоб

$$\sup\int_0^t P_k\left(\tau^\varepsilon\in dt\right)t\underset{T\to\infty}{\to}0, \qquad (9)$$

$$\inf_k m_k>0, \qquad (10)$$

сукупність розподілів ймовірностей

$$P_k\left\{\tau^0\in dt\right\}, \qquad (11)$$

$k=1,2,\ldots$ нерешітчаста.

Припустимо, що існує така матриця $C=\left\|c^{ks}\right\|_{k,s=1}^\infty$, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{P_k\left\{X_\varepsilon\left(\tau^\varepsilon\right)=\theta_k\right\}-1\right\}=c^{kk}, \qquad (12)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{s\neq k}\left\{\frac{1}{\varepsilon}P_k\left\{X_\varepsilon\left(\tau^\varepsilon\right)=\theta_k\right\}-c^{ks}\right\}=0, \qquad (13)$$

$$\sum_s c^{ks}=0,\quad \sup_k\left|c^{kk}\right|<\infty. \qquad (14)$$

Позначимо через $M^\varepsilon(t,Y)$, $R(Y)$ – вектори-стовпчики з компонентами $M_k^\varepsilon(t,Y)$, $R_k(Y)=P_k\int_0^{\tau^0}R_k(u,Y)du$, а через M – діагональну матрицю з елементами m_k на головній діагоналі.

Теорема. *Нехай виконуються умови (8) – (14), тоді*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ t\to\infty\\ \varepsilon t\to u}} M^\varepsilon(t,Y)=e^{u\frac{C}{M}}M^{-1}R(Y)$$

в такому розумінні

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ t\to\infty\\ \varepsilon t\to u}}\left\{M_k^\varepsilon(t,Y)-\sum_{\nu=1}^\infty p_{k\nu}(u)\frac{1}{m_\nu}R_\nu(Y)\right\}=0,$$

для всіх $k=1,2,\ldots,$ *де* $\left\|p_{ks(u)}\right\|_{k,s=1}^\infty=\exp\{uC\}$.

Аналогічно для системи диференціальних рівнянь (6)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ t \to \infty \\ \varepsilon t \to u}} \left\{ M_k^{\varepsilon}(t,Y) - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{k\nu}(u) \frac{1}{m_{\nu}} T_{\nu}(Y) \right\} = 0,$$

де $T_k = P_k \int_0^{\tau^0} M_k(t) e^{A_k t} dt$, $k = 1,2,\ldots$, або

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ t \to \infty \\ \varepsilon t \to u}} M^{\varepsilon}(t,Y) = e^{u\frac{C}{M}} M^{-1} T(Y).$$

T – вектор-стовпчик з компонентами T_k.

Висновки. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних дифференціальних рівнянь з коефіцієнтами, які залежать від напівмарківського процессу з скінченною множиною станів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Валеев К.Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами / К.Г. Валеев, О.Л. Карелова, В.И. Горелов. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 258с.
2. Дегтярь С.В. Перехідні явища в теорії марковського відновлення / С.В. Дегтярь, В.Г. Дегтярь // Вісник НТУ. – 2009. – №19 – С.275 – 278.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

БАБИЧ С.Ю., д.т.н., профессор
ДЕГТЯРЬ С.В., к.физ.-мат.н., доцент
КУЛИК А.Б., к. физ.-мат. н., доцент
ЩЕКАНЬ Н.П., ассистент

Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана

ДВЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Введение. В настоящее время по проблемам, относящимся к смешанным задачам для предварительно напряженных тел (контактные задачи, задачи для трещин), получены результаты по широкому кругу вопросов. Актуальность таких исследований не вызывает сомнений, так как начальные (остаточные) напряжения практически присутствуют во всех элементах конструкций. Как известно, начальные напряжения имеют различную природу. Так они возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении и сборке, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания, в кровеносных сосудах живых организмов. Начальные напряжения необходимо учитывать при решении задач о деформировании грунтов (особенно мёрзлых). Кроме того, в упруго пластических телах также могут присутствовать внутренние остаточные напряжения после снятия нагрузок. Иногда целесообразно преднамеренно создавать начальные напряжения (остаточные и технологические) для компенсации тех напряжений, которые возникают в элементах конструкций в процессе работы, и повышения их прочностных характеристик.