

**Висновки.** Для тіла з при поверхневою тріщиною отримані критичні параметри руйнування для малих значень відносних відстаней між тріщиною та вільною поверхнею аж до  $10^{-9}$ . Показано, що при малих  $\beta$  різниця між критичними напруженнями для приповерхневої дископодібної тріщини і критичними напруженнями для жорстко закріпленої пластини, якою моделюють матеріал з тріщиною в наближених розрахункових схемах для всіх типів розглянутих потенціалів менше 1% для відстаней менших 0.01.

З аналізу отриманих результатів можна визначити критерії застосовності наближених розрахункових схем як з точки зору тонкостінності елемента, що відокремлюється: – наближені розрахункові схеми працюють для  $\beta < 0.01$ , так і з точки зору умов закріплення: – в наближених розрахункових схемах для приповерхневої дископодібної тріщини необхідно обирати жорстке закріплення.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Obreimoff I.W. The splitting strength of mica / Obreimoff I.W. // Proc. Roy. Soc. of London. – 1930. – 127 A. – P. 290–297.
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А.Н. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
3. Гузь А.Н. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Высокоэластичные материалы / Гузь А.Н., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 1989 – 25, №9. – С 3–32.
4. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / Гузь А.Н., Довжик М.В., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 2011. – 47, №6. – С. 28 – 37.
5. Довжик М.В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / Довжик М.В. // Прикл. механика. – 2012. – 48, №3. – С. 79 – 88.

Поступила в редколлегию 08.02.2013

УДК 519.6

ТОНКОНОГ Е.А. ассистент  
ХУДАЯ Ж.В. к.физ.-мат.н., доцент  
СТЕБЛЯНКО П.А. д.физ.-мат.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

### ПОСТРОЕНИЕ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

**Введение.** Рассматривается задача о движении тела с вязким трением. Сила вязкого трения пропорциональна скорости относительного движения тела. При увеличении скорости тела меняется сопротивление. Рассмотрим ситуацию, когда с увеличением скорости сопротивление уменьшается, а когда скорость достигает определенного значения ситуация меняется. Скорость начинает падать, а сила сопротивления начинает увеличиваться. Моделью описанного процесса является задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, характеризующими состояние динамического объекта. На первом этапе находится решение задачи, в которой слагаемое характеризующее

силу трения представляет собой убывающую функцию. При этом вводится дополнительное условие - ограничение скорости. В момент времени, когда скорость достигает нужного предела, мы переходим ко второму этапу. Снова решаем задачу Коши, но теперь слагаемое, характеризующее силу трения, представляет собой возрастающую функцию, а в качестве начальных условий используем значения, полученные на предыдущем этапе.

**Постановка задачи.** Рассматривается модель колебательного процесса вида

$$x'' - p(t)x' + q(t)x = f(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad (2)$$

где  $p(t), q(t), f(t)$  - дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Нужно найти приближенное решение данной задачи до момента  $t^*$ , когда скорость достигает определенного значения

$$x'(t^*) = x'_*. \quad (3)$$

Далее вычислить значение  $t^*$ , для которого выполнено условие (3), а затем найти приближенное решение задачи

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad (4)$$

$$y(t^*) = x(t^*), \quad y'(t^*) = x'_*. \quad (5)$$

Идея построения метода нахождения решения поставленной задачи, изложена в работах [1], [2]. Для решения этого вопроса разработана сплайн-коллокационная схема, позволяющая найти приближенное решение в аналитическом виде в произвольной точке области определения уравнений (1), (4) и при этом повысить точность найденного решения по сравнению с классической коллокационной схемой.

**Результаты работы.** Приближенное решение задачи (1) – (2) будем искать в виде кубического сплайна по равномерному разбиению  $\Delta$   
 $\Delta = \{t_i | t_i = ih, \quad h > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$

$$S_3(t) = \sum_{i=-1}^{\infty} C_i B_3\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad (6)$$

где  $B_3\left(\frac{t}{h} - i\right)$  – нормализованный кубический В-сплайн.

При построении дискретной модели будем руководствоваться условиями совпадения приближенного решения  $S_3(t)$  с точным решением задачи (1) – (2) в узлах равномерного разбиения  $\Delta$ . Тогда дискретную модель можно записать в виде

$$\begin{cases} S(0) = y_0, \quad S'(0) = y'_0 \\ S''(t_i)\left(1 + \frac{h^2}{12}\eta_i\right) + S'(t_i)\left(p_i + \frac{h^2}{12}\alpha_i\right) + \\ + S(t_i)\left(q_i + \frac{h^2}{12}\beta_i\right) = f_i + \frac{h^2}{12}\theta_i; \quad (i \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

где  $p_i = p(t_i), q_i = q(t_i), f_i = f(t_i),$

$$\begin{aligned} \eta_i &= \mu_i(p_i^2 - 2p_i' - q_i); \quad \alpha_i = \mu_i(p_i q_i + p_i p_i' - p_i'' - 2q_i'); \\ \beta_i &= \mu_i(q_i' p_i - q_i''); \quad \theta_i = \mu_i(p_i f_i' - f_i''), \quad (i \geq 1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mu_1 = \frac{11}{6}; \quad \mu_2 = \frac{4}{6}; \quad \mu_3 = \mu_4 = \dots = 1.$$

Целесообразность выбора добавок (8) обоснована в работе [2]. Для определения коэффициентов сплайна (6) используем известные значения В-сплайна и его производных в узлах разбиения  $\Delta$ . Поскольку сплайн (6) является решением дискретной модели (7), то после подстановки значений В-сплайна и его производных в узлах приходим к расчетной схеме относительно коэффициентов сплайна

$$\begin{cases} C_{-1} + 4C_0 + C_1 = y_0, \\ C_1 - C_{-1} = 2hy'_0, \\ C_1 - 2C_0 + C_{-1} = h^2(f_0 - q_0y_0 - p_0y'_0), \\ (1 + \eta_i \frac{h^2}{12}) \frac{C_{i-1} - 2C_i - C_{i+1}}{h^2} + (p_i + \alpha_i \frac{h^2}{12}) \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2h} + \\ + (q_i + \beta_i \frac{h^2}{12}) \frac{C_{i+1} + 4C_i + C_{i-1}}{6} = f_i + \theta_i \frac{h^2}{12}; \quad (i \geq 1) \end{cases} \quad (9)$$

где добавки  $\eta_i, \alpha_i, \beta_i, \theta_i$  вычисляются по формулам (8).

Для удобства вычисления коэффициентов  $C_i$  сплайна (6) вместо системы (9) предлагается использовать схему типа Адамса:

$$C_0 = y_0 - \frac{h^2}{6}(f_0 - q_0y_0 - p_0y'_0),$$

$$C_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{3}y''_0,$$

$$C_{i+1} = K_i \cdot C_i - M_i C_{i-1} + G_i, \quad (i \geq 1), \quad (10)$$

где

$$K_i = \frac{2 + \frac{1}{6}\eta_i h^2 - \frac{2}{3}q_i h^2 - \beta_i \frac{h^4}{18}}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (11)$$

$$M_i = \frac{1 - \frac{1}{2}p_i h + \frac{1}{6}q_i h^2 + \frac{1}{12}\eta_i h^2 - \frac{1}{24}\alpha_i h^3 + \frac{1}{72}\beta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (12)$$

$$G_i = \frac{f_i h^2 + \frac{1}{12}\theta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (13)$$

Преимущество предложенной нами схемы в том, что, обладая той же устойчивостью, что и схемы типа Адамса она имеет более высокую точность.

Подставляя значения коэффициентов  $C_i$  сплайна (6), найденные по схеме (10)-(13) и явный вид В-сплайнов на каждом участке  $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , учитывая, что

$z = \frac{t}{h} - \nu$ , ( $z \in [0, 1]$ ), сплайн-решение (6) запишем в виде

$$S(t) = C_\nu \left( \frac{2}{3} - z^2 + \frac{z^3}{2} \right) + C_{\nu+1} \left( \frac{2}{3} - (1-z)^2 + \frac{(z-1)^3}{2} \right) + C_{\nu+2} \cdot \frac{z^3}{6} + C_{\nu-1} \cdot \frac{(1-z)^3}{6}. \quad (14)$$

Вычислив производную сплайна (14) и приравняв ее заданному значению скорости  $x'$ , находим искомое значение  $t^*$ , при достижении которого переходим к решению задачи (4)-(5).

Приближенное решение задачи (4) – (5) будем искать в виде кубического сплайна по равномерному разбиению  $\Delta$  ( $\Delta = \{t_i | t_i = t^* + ih, h > 0, i = 0, 1, 2, \dots\}$ )

$$\tilde{S}_3(t) = \sum_{i=-1}^{\infty} \tilde{C}_i B_3 \left( \frac{t-t^*}{h} - i \right), \quad (15)$$

где  $B_3 \left( \frac{t-t^*}{h} - i \right)$  – нормализованный кубический В-сплайн.

Проводя аналогичные рассуждения, как и для задачи (1) – (2) приходим к системе

$$\begin{cases} \tilde{S}(0) = S(t^*), \quad \tilde{S}'(0) = x'_*, \\ \tilde{S}''(t_i) \left( 1 + \frac{h^2}{12} \eta_i \right) + \tilde{S}'(t_i) \left( p_i + \frac{h^2}{12} \alpha_i \right) + \\ + \tilde{S}(t_i) \left( q_i + \frac{h^2}{12} \beta_i \right) = f_i + \frac{h^2}{12} \theta_i; \quad (i \geq 1) \end{cases} \quad (16)$$

где добавки  $\eta_i, \alpha_i, \beta_i, \theta_i$  вычисляются по формулам (8), а  $p_i = p(t^* + ih), q_i = q(t^* + ih), f_i = f(t^* + ih)$ ,

Откуда коэффициенты сплайна вычисляются по следующей схеме

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= S(t^*) - \frac{h^2}{6} (f_0 - q_0 S(t^*) + p_0 x'_*), \\ \tilde{C}_1 &= S(t^*) + h x'_* + \frac{h^2}{3} (f_0 - q_0 S(t^*) + p_0 x'_*), \\ \tilde{C}_{i+1} &= \tilde{K}_i \cdot \tilde{C}_i - \tilde{M}_i \tilde{C}_{i-1} + \tilde{G}_i, \quad (i \geq 1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } \tilde{K}_i = \frac{2 + \frac{1}{6} \eta_i h^2 - \frac{2}{3} q_i h^2 - \beta_i \frac{h^4}{18}}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (18)$$

$$\tilde{M}_i = \frac{1 - \frac{1}{2} p_i h + \frac{1}{6} q_i h^2 + \frac{1}{12} \eta_i h^2 - \frac{1}{24} \alpha_i h^3 + \frac{1}{72} \beta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (19)$$

$$\tilde{G}_i = \frac{f_i h^2 + \frac{1}{12} \theta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (20)$$

Подставляя значения коэффициентов  $\tilde{C}_i$  сплайна (15), найденные по схеме (17)-(20) и явный вид В-сплайнов на каждом участке  $[t_v, t_{v+1}]$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ , учитывая,

что  $z = \frac{t-t^*}{h} - v$ , ( $z \in [0, 1]$ ), сплайн-решение (6) запишем в виде

$$\tilde{S}(t) = \tilde{C}_v \left( \frac{2}{3} - z^2 + \frac{z^3}{2} \right) + \tilde{C}_{v+1} \left( \frac{2}{3} - (1-z)^2 + \frac{(z-1)^3}{2} \right) + \tilde{C}_{v+2} \cdot \frac{z^3}{6} + \tilde{C}_{v-1} \cdot \frac{(1-z)^3}{6}. \quad (21)$$

Таким образом, получено аналитическое решение на втором этапе решения задачи. Вычислив производную от (21) мы можем проследить за изменением скорости, а так же за изменением силы сопротивления.

Рассмотрим примеры применения предложенных схем. Приведем графическую визуализацию результатов решения.

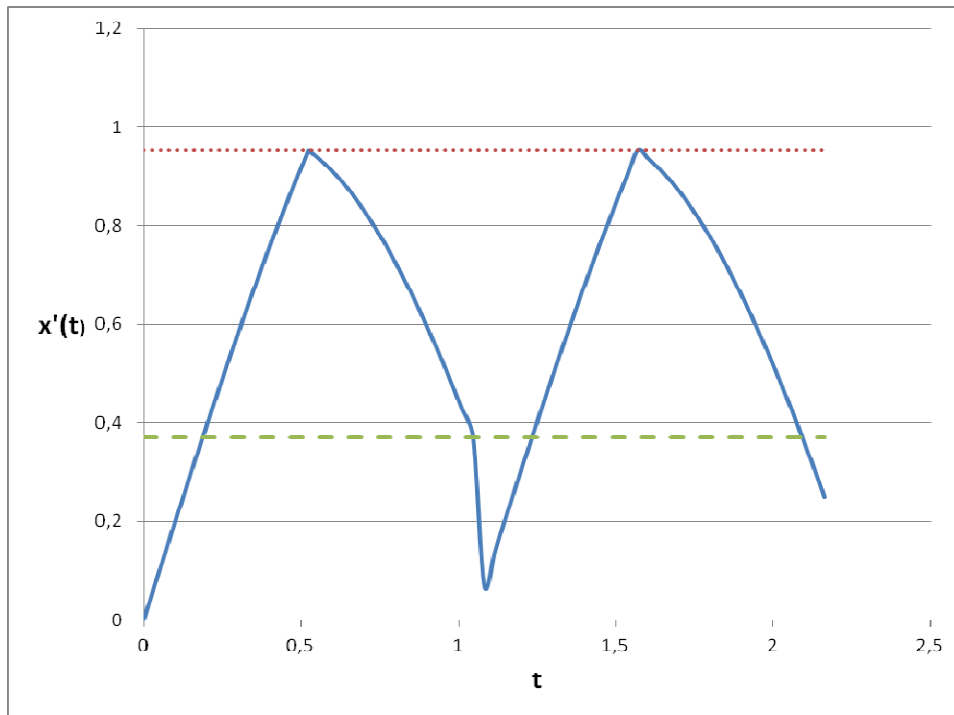
Рассматривается задача Коши

$$x'' - \sin t \cdot x' + \cos t \cdot x = 2 \cos t - t \sin t - \sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

и вводятся ограничения по скорости  $x'(t^*) = 0,9$ ;  $x'_{\min} = 0,37$ .

При достижении  $x'(t)$  значения  $x^*$ , задача меняется, и мы решаем

$$x'' + \sin t \cdot x' + \cos t \cdot x = 2 \cos t - t \sin t - \sin^2 t, \quad x(0,48) = 0,27; \quad x'(0,48) = 0,9.$$



..... максимальное значение скорости  
 - - - - - минимальное значение скорости

Рисунок 1 – График изменения скорости при введении ограничений

**Выводы.** Разработан метод решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, являющейся моделью, описывающей движение с вязким трением. Предложенный метод построен на основе кубических сплайнов. Метод является эффективным и удобным в применении. Он позволяет получить решение в аналитическом виде на всей области определения задачи с более высокой точностью по сравнению с обычными коллокационными методами. Данный метод дает возможность решать задачи, в которых исследуется вопрос об изменении силы сопротивления в зависимости от изменения скорости движущегося тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И.,
2. Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. Худая Ж.В. О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши / Худая Ж.В., Дронов С.Г. // Приближение функций и суммирование рядов. –Д., 1992. – С.29–38.

*Поступила в редколлегию 08.02.2013*

УДК 629.02

САСОВ А.А., к.т.н., доцент  
КУЛЬШЕНКО В.В., магистрант

Днепродзержинский государственный технический университет

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОМПОНЕНТОВ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ ДОРОЖНОГО ПОЛОТНА НА КОРРОЗИЮ ДНИЩА И ЭЛЕМЕНТЫ КУЗОВА АВТОБУСОВ**

**Введение.** Срок службы современных автобусов в значительной степени зависит от коррозионной стойкости кузова, в особенности его днища, так как уже через 2,5...3 года после начала эксплуатации автобуса на нем появляются первые очаги коррозии, а через 4...5 лет начинаются разрушения усилителей днища кузова и мест присоединения несущих стоек. Потери металла от коррозии кузовов легковых автомобилей за период полной эксплуатации составляют 35...40%, а кузовов автобусов за 6...7 лет эксплуатации - 60% от их стоимости.

Основными причинами коррозионных разрушений являются агрессивные загрязнения автомобильных дорог, промышленные отработанные газы, химические средства, применяемые для борьбы с обледенением дорог в зимнее время и т.п.

Практика эксплуатации автобусов показывает, что надежно защищать их кузова от коррозии с помощью применяемых в настоящее время средств не удастся, т.к. все они быстро подвергаются абразивному изнашиванию, растрескиваются и отслаиваются.

Все применяемые для противокоррозионной защиты кузовов автомобилей и автобусов составы имеют повышенное влагопоглощение. В них отсутствуют ингредиенты, вытесняющие частицы влаги и заполняющие микро- и макропоры в высыхающей пленке. Поэтому разработка способов повышения стойкости днищ кузовов автобусов к воздействию агрессивных компонентов загрязнения дорожного