На рис.2 при различных значениях макродеформации $<\varepsilon_{11}>$ сплошными линиями показаны кривые зависимостей макронапряжения $<\sigma_{11}>/\mu$ от времени $\bar{t}$ для линейно упрочняющегося материала при дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (16). Графики показывают, что для малых значений времени $\bar{t}$ физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние также и на его напряженное состояние. При достаточно больших значениях времени $\bar{t}$ влияние нелинейности на напряженное состояние материала несущественно.

Выводы. Предложена теория длительной повреждаемости для физически нелинейных однородных материалов. Процесс повреждаемости материала моделируется образованием в нем стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, обусловленной зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, что характеризует кратковременную прочность по критерию Гувера-Мизеса, которая принимается случайной функцией координат. Для произвольного момента времени сформулировано уравнение баланса поврежденности (пористости) физически нелинейного материала. Построены алгоритмы вычисления микроповрежденности материала от времени, макронапряжений от времени, а также соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности материала на кривые его макродеформирования и повреждаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость / Хорошун Л.П. // Прикладная механика. – 1998. – №10. – С.120-127.
2. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 2. Длительная повреждаемость / Хорошун Л.П. // Прикладная механика. – 2007. – № 2. – С.108-121.

Поступила в редколлегию 10.04. 2014.

УДК 539.3

ХОМА И.Ю., д.физ.-мат.н.
ДАШКО О.Г., к.физ.-мат.н.
КОВАЛЕНКО И.Г., мл.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Введение. Проблеме концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах уделяется достаточно внимания. На этом классе граничных задач апробируются разные подходы и методы. Широко известен метод однородных решений, асимптотический, разложения по толщине и др. Для решения краевых задач в [1], [2] используется метод разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины. Относительно коэффициентов разложений, как функций двух независимых переменных, составляется система дифференциальных уравнений и естественные граничные условия. Излагается метод представления общего аналитического решения. Используя методику возмущения формы границы [3], в данной работе рассматривается задача о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины с эллиптическим отверстием, граничная поверхность которого подкреплена тонкой несжимаемой по образующей пленкой; вдали от отверстия пластина находится в поле всестороннего растяжения.

Постановка задачи и метод решения. Предположим, что пластина толщиной $2h$ $(h = const)$, занимающая область $\Omega = S\times[-h,h]$ трехмерного пространства, отнесена к декартовой системе координат x_i $(i=1,2,3)$, в которой переменные x_1, x_2 расположены на плоскости S, а $x_3\in[-h,h]$. Представим, следуя [4], компоненты вектора перемещений $u_j(x_1,x_2,x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$ в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ координаты толщины

$$\left\{u_j(x_1,x_2,x_3),\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)\right\} = \sum_{k=0}^{N}\left\{u_j^{(k)}(x),\sigma_{ij}^{(k)}(x)\right\}P_k(\xi), \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2)\in S$, $\xi = h^{-1}x_3\in[-1,1]$; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые моментами, N – натуральное число, которое предполагается четным, т.е. $N=2n$ $(n=0,1,2,...<\infty)$. Относительно коэффициентов разложений, как функций двух независимых переменных, получаем систему уравнений равновесия и соответственные граничные условия. Общее решение системы уравнений при симметричном (относительно плоскости S) деформировании пластины имеет вид [2]

$$\begin{gathered}
c_{66}\,u_+^{(0)} = k^{\cdot}\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi^{'}(z)} - \overline{\psi(z)} + h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)}\,\partial_{\bar z}V_m\,;\\
c_{66}\,u_+^{(2)} = k_2^{\cdot}\,h^2\,\overline{\varphi^{''}(z)} + h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2)}\,\partial_{\bar z}V_m + ih\sum_{s=1}^{n} b_s^{(2)}\,\partial_{\bar z}W_s\,;\\
c_{66}\,u_+^{(2k)} = h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)}\,\partial_{\bar z}V_m + ih\sum_{s=1}^{n} b_s^{(2k)}\,\partial_{\bar z}W_s\quad\left(k=\overline{2,n}\right);\\
c_{66}\,u_3^{(1)} = -k_1^{\cdot}\,h\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right] + \sum_{s=1}^{2n} c_m^{(1)}\,V_m\,;\\
c_{66}\,u_3^{(2k-1)} = \sum_{s=1}^{2n} c_m^{(2k-1)}\,V_m\quad\left(k=\overline{2,n}\right),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – произвольные голоморфные функции; V_m и W_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2}V_m = 0,\quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2}W_s = 0\,; \tag{3}$$

$k^{\cdot}$, $k_1^{\cdot}$, $k_2^{\cdot}$ и $a_m^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_m^{(2k-1)}$ – безразмерные константы.

Моменты напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ в полярной системе координат r, ϑ определяются формулами

$$\sigma_{\theta r}^{(0)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(0)} = 4\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right] + 2h^{-1}\sum_{m=1}^{2n} d_m^{(0)}V_m\,;\quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1}\sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(0)}V_m\,;$$

$$\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} = 4e^{-2i\theta}\left[-z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)}\partial_{\bar z}^2 V_m\right];$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)}+\sigma_{\theta\theta}^{(2k)}=2h^{-1}\sum_{m=1}^{2n}d_m^{(2k)}V_m\,;\ \sigma_{33}^{(2k)}=h^{-1}\sum_{m=1}^{2n}d_{3m}^{(2k)}V_m\ \left(k=\overline{1,n}\right);\tag{4}$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)}-\sigma_{\theta\theta}^{(2k)}+2i\sigma_{r\theta}^{(2k)}=4he^{-2i\theta}\left[\mu^{(2k)}h\overline{\varphi'''(z)}+\sum_{m=1}^{2n}a_m^{(2k)}\partial_{\bar z}^2V_m+i\sum_{s=1}^{n}b_s^{(2k)}\partial_{\bar z}^2W_s\right];$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)}+i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)}=2e^{-i\theta}\left[\sum_{m=1}^{2n}p_m^{(2k-1)}\partial_{\bar z}V_m+i\sum_{s=1}^{n}q_s^{(2k-1)}\partial_{\bar z}W_s\right].$$

Отсюда получаем краевые условия на контуре L_0 кругового отверстия радиуса R на срединной плоскости S. Пусть цилиндрическая поверхность $R\times[-h,h]$ полости пластины свободна от напряжений и не деформируется вдоль образующих. Тогда на кривой L_0 граничные условия будут иметь вид

$$\left.\left|\sigma_{rr}^{(2k)}(r,\theta)+i\sigma_{r\theta}^{(2k)}(r,\theta)\right|\right._{r=R}=0\ \left(k=\overline{0,n}\right);\ \left.u_3^{(2k-1)}(r,\theta)\right|_{r=R}=0\ \left(k=\overline{1,n}\right).\tag{5}$$

Для бесконечной области S, ограниченной контуром L_0, голоморфные функции $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$ примем в виде

$$\varphi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}\,;\ \psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}\,,\tag{6}$$

где a_n, b_n $(n>0)$ – произвольные постоянные; a_0, b_0 – константы, определяемые напряжениями, заданными на бесконечности, т.е.

$$a_0+\bar a_0=\frac14\left(\sigma_{11}^{(0)\infty}+\sigma_{22}^{(0)\infty}\right);\ b_0=\frac14\left(\sigma_{22}^{(0)\infty}-\sigma_{11}^{(0)\infty}+2i\sigma_{12}^{(0)\infty}\right).$$

Вид метагармонических функций V_m зависит от значений корней k_m характеристического уравнения, которые могут быть вещественными положительными

$$V_l=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n^{(l)}K_n\left(rh^{-1}\sqrt{k_l}\right)e^{in\theta}\ ,\ l\in[1,2n_l]\tag{7}$$

и комплексно-сопряженными

$$V_{2l+1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^{(l)}H_n^{(1)}\left(rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+1}}\right)e^{in\theta};\ V_{2l+2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}D_n^{(l)}H_n^{(2)}\left(rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+2}}\right)e^{in\theta}\ ,\ l\in[n_l,n-1].\tag{8}$$

Здесь K_n, $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода. Аналогичные представления имеют функции W_s.

Результаты числовых исследований. Подставляя значения функций (6), (7), (8) в равенства (2), (4) и учитывая граничные условия (5), найдем решение задачи для пластины с круговой полостью. Предположим, что пластина ослаблена полостью в виде эллиптического цилиндра, контур L которого на плоскости S незначительно отличается от кругового L_0. В этом случае для решения задачи воспользуемся методом возмущения формы границы, предложенного А.Н. Гузем в работе [3]. Будем считать, что гладкий криволинейный контур L описывается уравнениями

$$x_1=R\left(\cos\vartheta+\varepsilon\cos m\vartheta\right);\ x_2=R\left(\sin\vartheta-\varepsilon\sin m\vartheta\right),\tag{9}$$

где ε и m – параметры, характеризующие форму отверстия. При определенных значениях m и ε получаем соответствующие формы отверстия: эллиптического, квадратного и треугольного с закругленными углами. Функция, конформно отображающая внешнюю область единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (9), задается формулой

$$z = x + iy = \omega(\varsigma) = \varsigma + \varepsilon f(\varsigma), \tag{10}$$

в которой $z = re^{i\theta}$, $\varsigma = \rho e^{i\vartheta}$, $f(\varsigma) = \varsigma^{-m}$, ρ и ϑ – ортогональные криволинейные координаты. Для эллиптического отверстия функция $f(\varsigma)$ и его параметры имеют вид [5]

$$f(\varsigma) = \varsigma^{-1};\ R = (a+b)/2;\ \varepsilon = (a-b)/(a+b),$$

где a и b – полуоси эллипса.

Поскольку в криволинейной системе координат ρ, ϑ основные уравнения (3) будут достаточно сложными и найти их точное аналитическое решение с разделяющимися переменными весьма трудно, то предполагается искать решение в виде рядов по положительным степеням малого параметра ε.

$$u_{j'}^{(k)}(\rho,\vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} u_{j'}^{(k,\tau)}(\rho,\vartheta);\ \sigma_{i'j'}^{(k)}(\rho,\vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} \sigma_{i'j'}^{(k,\tau)}(\rho,\vartheta).$$

В результате такого разложения в каждом из приближений по параметру ε приходим к решению задачи для кругового отверстия. Рассмотрено три приближения по параметру ε и найдены выражения для компонент тензора напряжений. Так, в частности, окружные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ определяются формулой

$$\frac{1}{p}\sigma_{\vartheta\vartheta} = 1 + \frac{1}{\rho^2} - \sum_{k=0}^{N}\left\{t_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(0,2k)} + \varepsilon T_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(1,2k)}\cos 2\vartheta + \varepsilon^2\left[t_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(2,2k)} + T_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(2,2k)}\right]\cos 4\vartheta\right\} P_{2k}(\xi),$$

где $t_{\vartheta\vartheta}^{(j,2k)}$ $T_{\vartheta\vartheta}^{(j,2k)}$ – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

Выводы. Изложены результаты числовых исследований напряженного состояния около эллиптического отверстия в трансверсально-изотропной пластине, находящейся под действием постоянного всестороннего растяжения интенсивности p. Расчеты проведены для пластины с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,25$; $\nu' = 0,15$ и отношениями модулей упругости $E/E' = 0,75$; $E/G' = 5,0$. В работе представлены кривые изменения окружных напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ для двух приближений в точках $\rho = 1$, $\vartheta = 0$ на срединной (кривые 1) и граничной (кривые 2) плоскостях пластины в зависимости от отношения полуосей эллипса a/b. С возрастанием a/b коэффициент концентрации напряжений увеличивается. При этом максимальных значений им достигается на граничной плоскости. Получена связь, характеризующая изменения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ по угловой координате.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хома И.Ю. Об одном способе построения общего решения уравнений равновесия нетонких пластин / Хома И.Ю. // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 4. – С.65-75.
2. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates / Khoma I.Yu. // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – 101, № 6. – P.3577-3584.

3. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках / Гузь О.М. // Прикладная механика. – 1962. – 8, № 6. – С.605-612.
4. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / Векуа И.Н. // Тр. Тбилис. матем. ин-та – 1965. – 30. – С.3-103.
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – К.: Наукова думка, 1980. – 686с. (Методы расчета оболочек: В 5-и томах.; Т. 1).

Поступила в редколлегию 10.04.2014.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед.науч. сотр.
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ (С УЧЕТОМ ОРИЕНТАЦИИ ТРЕЩИНЫ)

Введение. Исследования пространственных задач механики разрушения о напряженном состоянии упругого изотропного тела с дискообразными или эллиптическими трещинами проводились в ряде классических работ и монографий [1-3] и др. Значительно меньшее число работ посвящено изучению распределения напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем плоские трещины круговой или эллиптической формы [4, 5] и др. При этом существенным ограничением в этих работах являлось предположение о расположении плоских трещин в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала. Получение замкнутых решений упомянутых задач основано на известных представлениях общих решений трехмерных уравнений для изотропного и трансверсально-изотропного материалов через гармонические (квазигармонические) функции. Для упругого ортотропного материала такие представления не получены. Также для изотропного и ортотропного материалов фундаментальное решение (функция Грина для бесконечной среды) выражается в явном виде через элементарные функции, что принципиально отличает их от случая упругого ортотропного материала. Дополнительные математические трудности, связанные с упомянутыми обстоятельствами, не позволяют при рассмотрении трехмерных задач теории упругости для ортотропных материалов использовать методы и подходы, успешно применяемые при исследовании пространственных задач механики разрушения для изотропных и трансверсально-изотропных тел с плоскими трещинами.

Задачи о распределении напряжений в ортотропных материалах вблизи круговых или эллиптических трещин, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала, изучены в [6, 7] на основе применения тройного преобразования Фурье, Фурье-образа функции Грина для ортотропной среды, теоремы о вычетах Коши и численного интегрирования на основе квадратур Гаусса. В настоящей работе этот подход усложнен для проведения расчетов напряженного состояния и КИН вдоль фронта эллиптической трещины с учетом ее ориентации в ортотропном материале. Даны рекомендации по применению аналитико-численного алгоритма решения задач при различных отношениях полуосей эллиптической трещины (под внутренним давлением).

Постановка задачи. Пусть ортотропная упругая среда (с осями ортотропии $0x$,