ется точной. Кроме того, построен пример функции $g(t)$ и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$, для которых полученное неравенство является строгим, и показано, что в этом случае экстремальная функция $f(t)$ не монотонна на полупериоде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П.Корнейчук – М.: Наука, 1976. – 320с.
2. Корнейчук Н.П. С.М.Никольский и развитие исследований по теории приближения в СССР / Н.П.Корнейчук // УМН. – 1985. – Т. 40. – С.71-131.
3. Багдасаров С.К. Экстремальные функции интегральных функционалов в $H^{\omega}[a,b]$ / С.К.Багдасаров // Известия РАН. Серия математическая. – 1999. – Т. 63, №3. – С.3-62.
4. Доронин В.Г. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / В.Г.Доронин, А.А.Лигун // Докл. АН СССР. – 1980. – 251, №1. – С.16-19.
5. Лигун А.А. Точное решение некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / А.А.Лигун, В.Г.Доронин // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005. – №6. – Вип. 10. – С.64-70.
6. Дерец Е.В. Об оптимизации квадратурных формул для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / Е.В.Дерец // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005. – №6. – Вип. 10. – С.43-57.
7. Дерец Е.В. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определенных мажорантой интегрального модуля непрерывности / Е.В.Дерец // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010.– №6/1. – Т. 18 – С.102-109.
8. Дерец Е.В. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определенных мажорантой модуля непрерывности / Е.В.Дерец // International Conference Approximation Theory and Applications In memory of N.P. Korneichuk (June 14-17, 2010, Dnepropetrovsk, Ukraine). – Днепропетровск, 2010. – С.47.

Поступила в редколлегию 26.09.2014.

УДК 519.6

ХУДА Ж.В., к.фіз.-мат.н., доцент
ТОНКОНОГ Є.А., асистент

Дніпродзержинський державний технічний університет

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ВИКОРИСТАННЯМ КВАЗІІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ

Вступ. Залишається актуальним питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач і задач Коші. Дослідженню шляхів підвищення точності розв'язків крайових задач присвячено чимало робіт, серед них варто відзначити праці Ю.С.Зав'ялова, В.Л.Мірошниченко, С.Б.Стечкина, Ю.М.Субботіна, А.О.Лигуна, Т.В.Крилової. Найбільш ефективним засобом у вирішенні питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач і задач Коші стало використання сплайн-колокаційних схем, заснованих на використанні різних узагальнень сплайнів, зокрема L-сплайнів. Побудова узагальнених майже інтерполяційних L-сплайнів розглянута в роботах Ж.В.Худої [2, 3]. Доцільно розглянути використання таких сплайнів при розв'язанні крайових задач з різними граничними умовами.

Постановка задачі. Дана робота присвячена питанням відшукання наближеного розв'язку крайової задачі виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,; \tag{1}$$

$$y'(a) = y'_a\,,\ y'(b) = y'_b\,, \tag{2}$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – двічі неперервно диференційовані функції. Цей розв'язок потрібно знайти з більш високою точністю в порівнянні з розв'язками знайденими існуючими методами. Для вирішення цього питання розроблена сплайн-коллокаціонная схема, яка базується на використанні L-сплайнів порядку три, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку.

Результати роботи. Пропонується шукати наближений розв'язок задачі (1)-(2) за допомогою коллокаціонной схеми, а в якості наближеного рішення можна використовувати сплайни виду

$$S_3(y,x) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i B_{3,i}(x-ih) \qquad (i = 0,1,\dots,N), \tag{3}$$

які, в свою чергу, на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ є розв'язками рівнянь виду

$$S_3^{(4)} + P_i S_3^{(3)} + Q_i S_3'' = 0\,, \qquad (i = 0,1,\dots,N)\,. \tag{4}$$

В якості коефіцієнтів $P_i;Q_i$ можуть бути обрані значення функцій $p(x)\,, q(x)$ в точках розбиття $\Delta_{N[a,b]}$. Сплайни (3) є узагальненими L-сплайнами порядка три.

Сплайни (3) можуть бути введені по рівномірному розбиттю $\Delta_N[a,b]$ відрізка $[a,b]$ на частини ($\Delta_N[a,b] = \{x_i | x_i = a + ih, h > 0, i = 0,1,\dots,N\}$), а $B_{3,i}(x)$ – базисні функції з мінімальним носієм $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, які також задовольняють рівнянню (4) і нормовані умовою: $B_{3,i}(x_{i+1}) + B_{3,i}(x_i) + B_{3,i}(x_{i-1}) = 1$. Узагальнені базисні функції $B_{3,i}(x)$ побудовані та наведені в роботах [2, 3].

Оскільки підібрати єдине рівняння виду (4), яке найкращим чином описує наближений розв'язок задачі (1)-(2) на кожному проміжку дуже складно, то доводиться вдатися до рівняння, коефіцієнти якого змінюються від відрізка до відрізка. При цьому в якості коефіцієнтів P_i, Q_i можуть бути обрані значення функцій $p(x), q(x)$ в точках разбиття $\Delta_N[a,b]$. Таким чином, ми можемо підбирати вид сплайна $S_3(x)$ для кожного конкретного рівняння виду (1). Побудувавши один раз базисні функції, а потім, змінюючи тільки вид $p(x)\,, q(x)$, можна очікувати, що отримаємо сплайн (3), параметри якого підібрані таким чином, що цей сплайн, краще (в сенсі мінімізації ухилення від точного рішення) описує поведінку шуканого розв'язку моделі, ніж поліноміальні сплайни.

Наближений розв'язок задачі (1)-(2) будуємо у вигляді сплайну (3), де параметри сплайну вибираються на підставі умов

$$\begin{cases} S'(a) = y'_a, \\ S'(b) = y'_b, \\ S''_i + p_i S'_i + q_i S_i = f_i, \end{cases} \qquad (i = \overline{0,N}) \tag{5}$$

де $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$ $(i = \overline{-1, N+1})$ на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$; $S_i = S(x_i)$.

Використовуючи явний вигляд базисних функцій $B_{3,i}(x)$ $(i = \overline{-1, N+1})$ і значення цих функцій та їх похідних у вузлах колокації, отримаємо систему з трьохдіагональною матрицею відносно коефіцієнтів сплайна (3) $C_{3,i}$ $(i = \overline{-1, N+1})$

$$\begin{cases} C_{-1}\alpha_0 + C_1\alpha_1 = y'_\alpha h, \\ C_{i-1}(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + C_i(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + \\ + C_{i+1}(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}) = f_i, \\ C_{N-1}\alpha_{N-1} + C_{N+1}\alpha_N = y'_b h, \qquad (i = 1, N-1) \end{cases} \tag{6}$$

де $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$, $\beta_i = B'_{3,i}(x_i)$, $\theta_i = B''_{3,i}(x_i)$, $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, а $B_{3,i}(x)$ – базисні функції, що задовольняють рівнянню (4).

Доведемо, що порядок точності такої схеми складає $O(h^4)$ в довільній точці розбиття для сплайнів виду (3).

Теорема. Нехай $q(x)$, $f(x) \in L^4_\infty[a, b]$, $p(x) \in L^5_\infty[a, b]$, $q(x) < 0$ для $x \in [a, b]$ і h таке, що для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ виконуються умови

$$\begin{gathered} \frac{2}{h^2} - \frac{5q_i}{6} - \frac{p^2{}_i}{12} > 0, \\ \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} - \frac{p_i{}^2}{6} + \frac{q_i}{12} + \frac{h}{24}(q'_i - p_i q_i - p'_i p_i) > 0, \\ \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h} + \frac{p_i{}^2}{12} + \frac{q_i}{12} - \frac{h}{24}(q'_i - p_i q_i - p'_i p_i) > 0, \\ q_i - h^2\left(\frac{(p'_i)^2}{12} - \frac{p'_i q_i}{24} + \frac{p_i{}^4}{192} + \frac{q''_i}{24} - \frac{p''_i p_i}{24} - \frac{p^2{}_i q_i}{96}\right) < 0, \end{gathered} \tag{7}$$

якщо $y_*(x) \in L^6_\infty[a, b]$ – точний розв’язок задачи (1)-(2), а $S_3(x)$ – сплайн вигляду (3), який задовольняє умовам (4), де $C_i (i = \overline{0, N+1})$ – розв’язки системи (6), тоді при $h \to 0$ виконується нерівність

$$\| y_* - S_3 \|_{C_{[a,b]}} \le Bh^4, \tag{8}$$

де $B = \max\limits_{1 \le i \le N} \left| \frac{1}{24}(y''_i + p_i y'_i + (q_i + p'_i) y_i) + \frac{1}{36}\left(y_i^{(4)} + p_i y_i^{(3)} + q_i y_i{}''\right) \right|$.

Доведення. Для отримання оцінки точності сплайн-розв’язку (3), коефіцієнти якого знайдені з системи (6) використовуємо нерівність

$$|S_3(x) - y_*| \le |S_3(x) - S_3(x, y_*)| + |S_3(x, y_*) - y_*|, \tag{9}$$

де y_* – точний розв'язок задачі (1)-(2), $S_3(x, y_*)$ – узагальнений майже інтерполяційний сплайн. Сплайни $S_3(x, y_*)$ побудовані і наведені в роботі [2].

Такі сплайни мають вигляд

$$S_3(x, y_*) = \sum_{i=-1}^{N+1} \tilde{C}_i B_{3,i}(x - ih). \tag{10}$$

При цьому коефіцієнти $\tilde{C}_i$ розраховані таким чином, що значення сплайна у вузлі майже збігаються зі значеннями інтерпольованої функції y_*, яка в свою чергу є розв'язком задачі (1)-(2). Коефіцієнти $\tilde{C}_i$ мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{C}_i = {} & y_i(1 - \frac{1}{12}p_i' h^2 - \frac{1}{120}h^4(\frac{5}{6}p_i''' + q_i'' - \frac{1}{3}(p_i p_i'' + (p_i')^2) + \\ & + \frac{3}{4}(p_i' q_i + p_i q_i' - p_i^2 p_i') + \frac{1}{42}q_i^2 - \frac{1}{504}q_i p_i^2 - \frac{1}{252}p_i^4)) - \\ & - \Delta y_i(\frac{1}{24}p_i h \quad + (\frac{1}{180}q_i' - \frac{1}{1440}p_i^3 - \frac{11}{1440}p_i p_i' + \frac{1}{480}p_i q_i)h^3) - \\ & - \Delta^2 y_i(\frac{1}{6} + (-\frac{1}{72}p_i' - \frac{1}{45}q_i - \frac{1}{180}p_i^2)h^2 \qquad ,\end{aligned} \tag{11}$$

де $y_i = y(ih)$, $p_i = p(ih)$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}$, $\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$, $(i = \overline{-1, N+1})$.

В роботі [2] доведено, що на кожному з проміжків $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{0, N})$ рівномірно по i та по x буде виконано співвідношення

$$\begin{aligned}\left|S_3(x, y_*) - y_*\right| = {} & \Big|\frac{1}{24}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2\big(y''(x) + p(x)y'(x) + (q(x) + p'(x))y(x)\big) + \\ & + \frac{1}{36}h^4(f_i^{(4)} + p_i f_i^{(3)} + q_i f_i'') + O(h^5)\Big|,\end{aligned} \tag{12}$$

де $u = x - (i - 1/2)h$.

Тобто відхилення майже інтерполяційного сплайну від точного розв'язку задачі (1)-(2) не перевищує $O(h^4)$ в довільній точці. Тобто для доведення теореми нам залишається оцінити різницю $\left|S_3(x) - S_3(x, y_*)\right|$.

Оскільки обидва сплайни побудовані на основі узагальнених базисних функцій $B_{3,i}(x)$, то питання оцінки відхилення $S_3(x) - S_3(x, y_*)$ може бути зведено до оцінки різниці $\delta_i = \tilde{C}_i - C_i$. Доведемо, що це відхилення порядку $O(h^4)$.

Позначимо оператор

$$L_i(\tilde{C}_i) = \tilde{C}_{i-1}(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + \tilde{C}_i(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + \tilde{C}_{i+1}(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}),$$

де $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$, $\beta_i = B_{3,i}'(x_i)$, $\theta_i = B_{3,i}''(x_i)$.

Підставимо значення δ_i в оператор L_i.

$$L_i(\delta_i) = L(C_i) - L(y_i)\Big(1 - \frac{1}{12}p_i' h^2 - \frac{1}{120}h^4(\frac{5}{6}p_i''' + q_i'' - \frac{1}{3}(p_i p_i'' + (p_i')^2) + \\ + \frac{3}{4}(p_i' q_i + p_i q_i' - p_i^2 p_i') + \frac{1}{42}q_i{}^2 - \frac{1}{504}q_i p_i^2 - \frac{1}{252}p_i^4)\Big) + \\ + \quad L_i(\Delta y_i)\Big(\frac{1}{24}p_i h \quad + (\frac{1}{180}q_i' - \frac{1}{1440}p_i{}^3 - \frac{11}{1440}p_i p_i' + \frac{1}{480}p_i q_i)h^3\Big) + \\ + L\big(\Delta^2 y_i\big)(\frac{1}{6} + (-\frac{1}{72}p_i' - \frac{1}{45}q_i - \frac{1}{180}p_i^2)h^2, \tag{13}$$

де

$$L(y_i) = y_{i-1}(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + y_i(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + y_{i+1}(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}),$$

$$L(\Delta y_i) = (y_i - y_{i-2})(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + (y_{i+1} - y_{i-1})(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + \\ + (y_{i+2} - y_i)(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}), \tag{14}$$

$$L(\Delta^2 y_i) = (y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i)(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + \\ + (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + \\ + (y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i)(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}).$$

Використовуючи в формулах (14) розклад $y_{i-2}, y_{i+2}, y_{i-1}, y_{i+1}$, за формулою Тейлора в точці $x = ih$, отримаємо наступні розвинення

$$L(y_i) = \Big(\frac{q_i}{12}y_i'' - \frac{q_i''}{24}y_i + \frac{q_i^{(4)}}{12}y_i + \frac{p_i{}^2}{12}y_i'' - \frac{q_i'}{12}y_i' + \frac{p_i'' p_i}{24}y_i'' - \frac{(p_i')^2}{12}y_i + \\ + \frac{p_i' p_i}{12}y_i' + \frac{p_i}{6}y_i^{(3)} + \frac{p_i' q_i}{24}y_i + \frac{p_i' q_i}{24}y_i + \frac{p_i q_i}{12}y_i'\Big)h^2 + \\ + y_i'' + p_i y_i' + q_i y_i + O(h^4),$$

$$L(\Delta y_i) = \Big(-\frac{q_i'}{6}y_i'' + \frac{p_i{}^2}{6}y_i^{(3)} - \frac{(p_i')^2}{6}y_i' + \frac{p_i' p_i}{6}y_i'' + \frac{p_i' q_i}{12}y_i' + \frac{p_i'' p_i}{12}y_i' - \frac{q_i''}{12}y_i' + \frac{2p_i}{3}y_i^{(4)} \\ + \frac{p_i q_i}{6}y_i'' + \frac{q_i}{2}y_i^{(3)}\Big)h^3 + 2h\Big(y_i^{(3)} + p_i y_i^{(2)} + q_i y_i'\Big) + O(h^4) \tag{15}$$

$$L(\Delta^2 y_i) = \Big(y_i^{(4)} + q_i y_i'' + p_i y_i^{(3)}\Big)h^2 + O(h^4).$$

Враховуючи, що $L(C_i) = f_i$, а також те, що $y_i'' + p_i y_i' + q_i y_i = f_i$ після підстановки рівностей (15) у формулу (13) отримаємо, що рівномірно по i $(i = \overline{1,N})$ $L_i(\delta_i) = O(h^4)$, тобто

$$\delta_{i-1}(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + \delta_i(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + \\ + \delta_{i+1}(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}) = d_i, \tag{16}$$

де $d_i = O(h^4)$.

Таким чином ми отримали систему (16) з трьохдіагональною матрицею. Скористаємось лемою Адамара. Якщо система $AX = D$ де $A = \{a_{ij}\}_1^N$ -матриця з діагональним переважанням, $D = (d_1, d_2, ..., d_N)$ має єдиний розв'язок, то справедлива оцінка [1]:

$$\max_{1 \le i \le N} |x_i| \le \max_{1 \le i \le N} \frac{|d_i|}{\gamma_i}, \qquad \text{де} \quad \gamma_i = |a_{ii}| - \sum_{j \ne i} |a_{ij}| > 0 \quad (i, j = \overline{1, N}). \tag{17}$$

Доведемо, що матриця системи (16) є матрицею з діагональним переважанням. Для цього розглянемо різницю

$$|q_i \alpha_i + p_i \beta_i + \theta_i| - |\theta_{i+1} + p_i \beta_{i+1} + q_i \alpha_{i+1}| - |\theta_{i-1} + p_i \beta_{i-1} + q_i \alpha_{i-1}| = \gamma_i \; (i, j = \overline{1, N}). \tag{18}$$

Після підстановки явного вигляду значень базисних сплайнів та їх похідних $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$, $\beta_i = B'_{3,i}(x_i)$, $\theta_i = B''_{3,i}(x_i)$, в рівність (18) з урахуванням умов (7) отримаємо

$$\gamma_i = -q_i + h^2 \left(\frac{(p_i')^2}{12} - \frac{p_i' q_i}{24} + \frac{p_i^4}{192} + \frac{q_i''}{24} - \frac{p_i'' p_i}{24} - \frac{p^2{}_i q_i}{96} \right) . > 0 \tag{19}$$

Нерівність (19) доводить, що умова (17) виконана і матриця системи (16) є матрицею з діагональним переважанням. Тоді за лемою Адамара для розв'язків системи (16) справедлива оцінка

$$\max_{1 \le i \le N} |\delta_i| \le \max_{1 \le i \le N} \frac{|d_i|}{\gamma_i},$$

тобто $\max_{1 \le i \le N} \left| \tilde{C}_i - C_i \right| \le O(h^4)$, звідки випливає $\left\| \tilde{S}_3(x) - S_3(x, y_*) \right\|_C = O(h^4)$.

Враховуючи отриману рівність, а також рівність (12), якщо покласти, що

$$B = \max_{1 \le i \le N} \left| \frac{1}{24} \left(y_i'' + p_i y_i' + (q_i + p_i') y_i \right) + \frac{1}{36} \left(y_i^{(4)} + p_i y_i^{(3)} + q_i y_i'' \right) \right|,$$

з урахуванням нерівності (9) отримаємо нерівність (8). Таким чином теорему доведено.

Висновки. Розроблено метод розв'язання крайової задачі, реалізований за допомогою побудованих раніше узагальнених L-сплайнів порядка три. Наведений метод є ефективними та зручним в застосуванні. Він надає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю в порівнянні зі звичайними колокаційними методами. До того ж отриманий майже інтерполяційний сплайн враховує особливості шуканого розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352с.
2. Худая Ж.В. Об одном свойстве L-сплайнов с переменными коэффициентами / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Дн-вськ: ДНУ. – 2006. – С.250-260.
3. Худая Ж.В. Об асимптотике приближения функции L-сплайнами в зависимости от положения точки / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Дн-вськ: ДНУ. – 2007. – С.317-327.

Надійшла до редколегії 11.08.2014.