УДК 629.33:628.33

АВЕРЬЯНОВ В.С., ст. преподаватель
ХУДА Ж.В., к.физ.-мат.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ФИЛЬТРОВАЛЬНОЙ УСТАНОВКЕ

Введение. Проведенные исследования показывают, что в общем случае струя жидкости может иметь три характерные части: компактную, частично раздробленную и распыленную (рис.1) [1].

В пределах компактной части струи сохраняется сплошность движения жидкости. В пределах частично раздробленной части струи жидкости сплошность потока нарушается, причем струя жидкости постепенно расширяется. Наконец, в пределах распыленной части струи происходит окончательный распад потока жидкости на отдельные капли.

Разрушение компактности струи жидкости на протяжении второго и третьего участков объясняется ее аэрацией. Аэрация струи жидкости обусловливается совместным смешением между воздушной и водной средами.

Постановка задачи. Для поддержания оптимальной производительности очистки жидкости необходимо знать скорость струи жидкости. Для этого рассмотрим движение жидкости в компактной части струи, где целесообразно устанавливать фильтровальную перегородку в устройствах для бескамерной очистки жидкости от механических примесей.

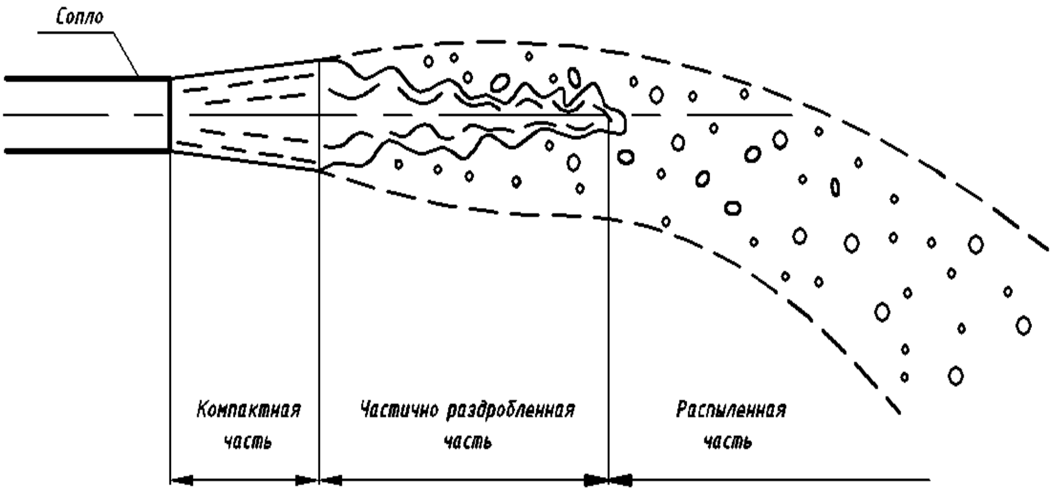

Рисунок 1 – Схема незатопленной свободной струи жидкости.

Материалы и результаты исследований. Рассмотрим компактную часть струи жидкости в цилиндрической системе координат (*z, r, φ*). При этом координаты $q_1 = z$, $q_2 = r$, $q_3 = \varphi$, а скорости обозначим, соответственно: $\upsilon_1 = \upsilon_{oc}$, $\upsilon_2 = \upsilon_r$, $\upsilon_3 = \upsilon_\tau$.

Выражение функции тока потока жидкости можно представить в виде [2]:

$$\psi = r\int_0^\infty F(\lambda, z)\ \ J_1(\lambda, r)d\lambda, \quad (1)$$

где $F(\lambda, z)$ – функция, связывающая скорости υ_{oc} и υ_r;

λ – отношение угловой скорости к линейной скорости жидкости;

$J_1(\lambda, r)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка.

Осевую составляющую скорости движения жидкости можно определить из уравнения [100]:

$$\upsilon_{oc} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \int_0^\infty \lambda\left(\frac{Q}{2\pi} + \frac{kC}{k^2-\lambda^2}\right)\cdot \cos\sqrt{k^2-\lambda^2}\cdot z - \frac{kC}{k^2-\lambda^2}\cdot J_0(\lambda r)d\lambda\,, \qquad (2)$$

где $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка при $n = 0$;

Q – расход жидкости;

k – коэффициент однородности потока жидкости;

С – постоянная.

Найдем функцию Бесселя как решение уравнения Бесселя. Данное уравнение имеет следующий вид [3, 4]:

$$x^2\cdot y'' + x\cdot y' + (x^2-\nu^2)\cdot y = 0\,, \qquad (3)$$

где под функцией y мы понимаем $J_\nu(x)$.

Решение уравнения Бесселя (3) можно представить в виде ряда:

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\cdot x^{\nu+j}\,. \qquad (4)$$

Тогда

$$x\cdot y' = \sum_{j=0}^{+\infty}(\nu+j)\cdot a_j\cdot x^{\nu+j}\,, \qquad (5)$$

$$x^2\cdot y'' = \sum_{j=0}^{+\infty}(\nu+j)\cdot(\nu+j-1)\cdot a_j\cdot x^{\nu+j}\,, \qquad (6)$$

$$(x^2-\nu^2)\cdot y = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\cdot x^{\nu+j+2} - \nu^2\cdot\sum_{j=0}^{+\infty} a_j\cdot x^{\nu+j} = \sum_{j=2}^{+\infty} a_{j-2}\cdot x^{\nu+j} - \nu^2\cdot\sum_{j=0}^{+\infty} a_j\cdot x^{\nu+j}\,, \qquad (7)$$

$$x^2\cdot y'' + x\cdot y' + (x^2-\nu^2)\cdot y = \sum_{j=0}^{+\infty}[(\nu+j)^2-\nu^2]\cdot a_j\cdot x^{\nu+j} + \sum_{j=2}^{+\infty} a_{j-2}\cdot x^{\nu+j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} j\cdot(2\cdot\nu+j)\cdot a_j\cdot x^{\nu+j} + \sum_{j=2}^{+\infty} a_{j-2}\cdot x^{\nu+j}\,. \qquad (8)$$

Следовательно, приходим к требованию:

$$(2\cdot\nu+1)\cdot a_1\cdot x^{\nu+1} + \sum_{j=2}^{+\infty}[j\cdot(2\cdot\nu+j)\cdot a_j + a_{j-2}]\cdot x^{\nu+j} = 0\,. \qquad (9)$$

или к бесконечной системе уравнений:

$$\begin{cases}(2\cdot\nu+1)\cdot a_1 = 0,\\ j\cdot(2\cdot\nu+j)\cdot a_j + a_{j-2} = 0\end{cases} \qquad (j = 2,3,4\ldots)\,, \qquad (10)$$

которая распадается на две системы:

$$\begin{cases}(2\cdot\nu+1)\cdot a_1 = 0,\\ 3\cdot(2\cdot\nu+3)\cdot a_3 + a_1 = 0,\\ 5\cdot(2\cdot\nu+5)\cdot a_5 + a_3 = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \qquad \begin{cases}2\cdot(2\cdot\nu+2)\cdot a_2 + a_0 = 0,\\ 4\cdot(2\cdot\nu+4)\cdot a_4 + a_2 = 0,\\ 6\cdot(2\cdot\nu+6)\cdot a_6 + a_4 = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}. \qquad (11)$$

Первая из них удовлетворяется, если принять, что $a_1 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0.$ Во второй системе уравнений a_0 является произвольной константой. Тогда $a_2, a_4, a_6, \ldots$ однозначно выражаются через a_0, если ν не является целым отрицательным числом.

Принимая

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu} \cdot \Gamma(\nu+1)}, \tag{12}$$

определим последовательно:

$$a_2 = -\frac{a_0}{4 \cdot (\nu+1)} = -\frac{1}{2^{\nu+2} \cdot (\nu+1) \cdot \Gamma(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{\nu+2} \cdot 1! \Gamma(\nu+2)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 2 \cdot (\nu+2)} = -\frac{1}{2^{\nu+4} \cdot 2! (\nu+2) \cdot \Gamma(\nu+2)} = -\frac{1}{2^{\nu+4} \cdot 2! \Gamma(\nu+3)}, \tag{13}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{4 \cdot 3 \cdot (\nu+3)} = -\frac{1}{2^{\nu+6} \cdot 3! (\nu+3) \cdot \Gamma(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{\nu+6} \cdot 3! \Gamma(\nu+4)},$$

и в качестве решения уравнения (3) получим ряд:

$$y = \frac{1}{2^{\nu} \cdot \Gamma(\nu+1)} \cdot x^{\nu} - \frac{1}{2^{\nu+2} \cdot 1! \Gamma(\nu+2)} \cdot x^{\nu+2} + \frac{1}{2^{\nu+4} \cdot 2! \Gamma(\nu+3)} \cdot x^{\nu+4} - \ldots =$$

$$= \frac{(x/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{(x/2)^{\nu+2}}{1! \Gamma(\nu+2)} + \frac{(x/2)^{\nu+4}}{2! \Gamma(\nu+3)} - \ldots = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \cdot \frac{(x/2)^{\nu+2 \cdot j}}{j! \Gamma(\nu+j+1)}. \tag{14}$$

Этот ряд сходится для всех положительных значений x и, следовательно, является решением уравнения (4) в области $0 < x < +\infty$.

Тогда получим функцию Бесселя первого рода с индексом ν:

$$J_{\nu}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \cdot \frac{(x/2)^{\nu+2 \cdot j}}{j! \Gamma(\nu+j+1)}. \tag{15}$$

Она является одним из решений уравнения Бесселя (3). В случае целого неотрицательного индекса n получим:

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \cdot \frac{(x/2)^{n+2 \cdot j}}{j! (n+k)!}, \tag{16}$$

и, в частности,

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \cdot \frac{(x/2)^{2 \cdot j}}{(j!)^2}. \tag{17}$$

Подставив уравнение (17) в (2) получим дифференциальное уравнение для определения осевой составляющей скорости движения жидкости:

$$\upsilon_{oc} = \int_0^{\infty} \lambda \left(\frac{Q}{2\pi} + \frac{kC}{k^2 - \lambda^2} \right) \cdot \cos\sqrt{k^2 - \lambda^2} \cdot z - \frac{kC}{k^2 - \lambda^2} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \cdot \frac{(\lambda/2)^{2 \cdot j}}{(j!)^2} d\lambda. \tag{18}$$

Чтобы найти максимальное значение υ_{oc} из формулы (18), разложим функцию $\Omega(\lambda,z)=\left(\frac{Q}{2\pi}+\frac{kC}{k^2-\lambda^2}\right)\cdot\cos\sqrt{k^2-\lambda^2}\cdot z-\frac{kC}{k^2-\lambda^2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки λ = 0.

Тогда получим:

$$\Omega(\lambda,z)=\left(\frac{Q}{2\pi}+\frac{C}{k}\right)\cdot\cos(k)\cdot z-\frac{C}{k}+\left(\left(\left(\frac{\left(\frac{Q}{2\pi}+\frac{C}{k}\right)\cdot\sin(k)\cdot k}{2k^2}+\frac{C\cdot\cos(k)}{k^3}\right)\cdot z-\frac{C}{k^3}\right)\cdot\lambda^2+\right.$$
$$\left.+\left(\left(\left(\frac{Q}{2\pi}+\frac{C}{k}\right)\cdot\left(\frac{\sin(k)\cdot k}{8k^4}-\frac{\cos(k)}{8k^2}\right)+\frac{C\cdot\cos(k)}{k^5}+\frac{C\cdot\sin(k)\cdot k}{2k^5}\right)\cdot z-\frac{C}{k^5}\right)\cdot\lambda^4+O(\lambda^5)\right). \quad (19)$$

Подставляя полученное равенство (19) и функцию Бесселя (17) в формулу осевой скорости движения жидкости (2), проинтегрируем его в пределах от 0 до r. В результате получим:

$$\upsilon_{oc}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\cdot\left(\frac{1}{2}r\right)^{2j}\cdot\left(\frac{A+B+D+E}{(j\ )^2}+O(r^5)\right), \quad (20)$$

где $A=\frac{r^{2+2j}\cdot(\cos(k)\cdot z\cdot k\cdot\psi_0+z\cdot C\cdot\cos(k)-C)}{k(2+2j)}$;

$$B=\frac{0{,}5r^{4+2j}\cdot(\sin(k)\cdot z\cdot k^2\cdot\psi_0+z\cdot C\cdot\sin(k)\cdot k+2z\cdot C\cdot\cos(k)-2C}{k^3(4+2j)};$$

$$D=\frac{0{,}125r^{6+2j}\cdot(\sin(k)\cdot z\cdot k^2\cdot\psi_0-\cos(k)\cdot z\cdot k^3\cdot\psi_0-\cos(k)\cdot z\cdot C\cdot k^2}{k^5(6+2j)};$$

$$E=\frac{\sin(k)\cdot z\cdot k\cdot C+8\cos(k)\cdot z\cdot C+4\sin(k)\cdot z\cdot C\cdot k-8C)}{k^5(6+2j)}.$$

Выводы. Определена максимальная величина осевой составляющей скорости движения потока жидкости перед фильтровальной перегородкой, что позволяет определить величину производительности фильтровальной установки и выбирать материал фильтровальной перегородки с целью предотвращения его повреждения в процессе фильтрования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1 / Седов Л.И. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – 528с.
2. Васильев О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков / Васильев О.Ф. – М.: Государственное энергетическое изд-во, 1998. – 144с.
3. Янге Е. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Янге Е., Эмде Ф., Леш Ф. – М.: Наука, 1994. – 344с.
4. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции / Олвер Ф. – М.: Наука, 2000. – 528с.

Поступила в редколлегию 26.09.2014.