УДК 517.5 ДАВИДЧИК А.Н., к.ф.-м. н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Введение. Обозначим через $H^{\alpha,\beta}$ класс 2π – периодических функций $f(x,y)$ удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left|f(x',y')-f(x'',y')\right|\le M\left|x'-x''\right|^{\alpha}+N\left|y'-y''\right|^{\beta}, \tag{1}$$

$$\left|f(x',y')-f(x',y'')-f(x'',y')+f(x'',y'')\right|\le L\left|x'-x''\right|^{\alpha}\cdot\left|y'-y''\right|^{\beta}, \tag{2}$$

где $0<\alpha,\ \beta\le 1,\ M,\ N,\ L$ – константы.

Известно, что интерполяционный тригонометрический полином порядка (m,n), который совпадает с функцией $f(x,y)$ в точках (x_k, y_l), где

$$x_k=\frac{2k\pi}{2m+1};\quad k=0\pm 1,\pm 2,\ldots\pm m;\qquad y_l=\frac{2l\pi}{2n+1};\quad l=0\pm 1,\pm 2,\ldots\pm n,$$

выражается формулой

$$\tilde{S}_{mn}(f;x,y)=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n}f(x_k,y_l)D_m(x-x_m)D_n(y-y_n),$$

где $D_v(t)$ – ядро Дирихле порядка υ.

Постановка задачи. Положим

$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)}=C_{mn}^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{S}_{mn};H^{(\alpha,\beta)};x,y\right)=\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}}\left|f(x,y)-\tilde{S}_{mn}(f;x,y)\right|.$$

А.С.Безлюдный получил следующее асимптотическое равенство:

$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\frac{M\ln(m+1)}{\pi^{1-\alpha}(m+1)^{\alpha}}\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\right|+\frac{N\ln(n+1)}{\pi^{1-\beta}(n+1)^{\beta}}\left|\sin\frac{2n+1}{2}y\right|+O\left(n^{-\beta}\right)+O\left(m^{-\alpha}\right).$$

Г.П.Губанов уточнил эту оценку. Устраняя некоторые опечатки в публикации, его результат можно записать в таком виде:

$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\frac{M\ln(m+1)}{\pi^{1-\alpha}(m+1)^{\alpha}}\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\right|+\frac{M\pi^{\alpha}A(\alpha,u)}{(m+1)^{\alpha}}+\frac{M\alpha}{2\pi^{1-\alpha}}+$$
$$\frac{\ln(m+1)}{(m+1)^{\alpha+1}}\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\right|+\frac{N\ln(n+1)}{\pi^{1-\beta}(n+1)^{\beta}}\left|\sin\frac{2n+1}{2}y\right|+\frac{N\pi^{\beta}B(\beta,v)}{(n+1)^{\beta}}+\quad,$$
$$+\frac{N\beta\ln(n+1)}{2\pi^{1-\beta}(n+1)^{\beta+1}}\left|\sin\frac{2n+1}{2}y\right|+O\left(m^{-1-\alpha}\right)+O\left(n^{-1-\beta}\right)+O\left(\frac{\ln m\ln n}{m^{\alpha}n^{\beta}}\right)$$

где величина $A(\alpha,u)$, $B(\beta,v)$, имеющие по аргументам x,y периоды h,g – соответственно, точно выраженные через α,β и u,v.

$$h=\frac{2\pi}{2m+1};\qquad g=\frac{2\pi}{2n+1};\qquad u=\frac{\bar{x}}{h};\ v=\frac{\bar{y}}{h};$$
$$\bar{x}=\min_{-m\le k\le m}\left|x-x_k\right|,\quad \bar{y}=\min_{-n\le l\le n}\left|y-y_l\right|.$$

Результаты работы. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Для $0<\alpha,\beta\le 1$ при $m\to\infty$, $n\to\infty$ равномерно относительно *x*, *y* имеет место асимптотическое равенство

$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\frac{M\ln(m+1)}{\pi^{1-\alpha}(m+1)^{\alpha}}\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\right|+\frac{M\alpha\ln(m+1)}{2(m+1)^{1+\alpha}\pi^{1-\alpha}}+\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\right|+$$
$$+\left[(1-u)^{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\pi u\left\{\ln\left(\frac{4}{\pi}\right)-\frac{1}{2}\psi(u)-\frac{1}{2}\psi(1-u)+\frac{1}{u}\left(u^{\alpha}-(1-u)^{\alpha}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\int_0^1\frac{t^u}{1+t}dt\left((1-u)^{\alpha}-u\alpha\right)\right\}\right]\frac{M\pi^{\alpha}}{(m+1)^{\alpha}}+\frac{N\ln(n+1)}{\pi^{1-\beta}(n+1)^{\beta}}\left|\sin\frac{2n+1}{2}y\right|+$$
$$+\frac{N\beta\ln(n+1)}{2(n+1)^{1+\beta}\pi^{1-\beta}}\left|\sin\frac{2n+1}{2}y\right|\left[(1-v)^{\beta}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\pi v\left\{\ln\frac{4}{\pi}-\frac{1}{2}\psi(v)-\right.\right.\quad, \tag{3}$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\psi(1-v)+\frac{1}{v}\left(v^{\beta}-(1-v)^{\beta}\right)+\int_0^1\frac{t^v}{1+t}dt\left((1-v)^{\beta}-v^{\beta}\right)\right\}\right]\frac{N\pi^{\beta}}{(n+1)^{\beta}}+$$
$$+\frac{L\ln(n+1)\ln(m+1)}{(m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta}\pi^{2-\alpha-\beta}}\left|\sin\frac{2m+1}{2}x\sin\frac{2n+1}{2}y\right|+$$
$$O\left(\frac{1}{m^{1+\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{1+\beta}}\right)+O\left(\frac{\ln m+\ln n}{m^{\alpha}n^{\beta}}\right),$$

где $\psi(t)=\dfrac{d(\ln\Gamma(t))}{dt}=-C+\displaystyle\int_0^1\frac{1-z^{t-1}}{1-z}dz$, C – постоянная Эйлера

Доказательство. В силу очевидных соображений верхнюю грань $C_{mn}^{(\alpha,\beta)}$ мы можем рассматривать на классе $H_{x,y}^{(\alpha,\beta)}$ функций, удовлетворяющих (1), (2) и для которых $f(x,y)=0$, и считать $0\le x\le\frac{h}{2}$, $0\le y\le\frac{g}{2}$. Таким образом, нужно оценить величину

$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)}=\sup_{f\in H_{x,y}^{(\alpha,\beta)}}\left|\tilde{S}_{mn}(f;x,y)\right|,\quad 0\le x\le\frac{h}{2},\ 0\le y\le\frac{g}{2}. \tag{4}$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$D_k=D_m(x-x_k);\ D_c=D_n(y-y_c);\ f_{k,l}=f(x_k,y_c);\ \Delta_x f_{\pm k,l}=f_{\pm k,c}-f_{(k-1),l},$$
$$\Delta_y f_{k,\pm l}=f_{k,\pm l}-f_{k,\pm(l-1)},\ \Delta^2 f_{\pm k,\pm l}=f_{\pm k,\pm l}-f_{\pm(k-1),\pm l}-f_{\pm k,\pm(l-1)}+f_{\pm(k-1),\pm(l-1)},$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm m,\quad l=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm n,$$

$$d_k^m=\sum_{i=k}^{m}D_m(x-x_i);\quad d_{-k}^m=\sum_{i=-m}^{-k}D_m(x-x_i);\quad k=1,2,\ldots m,$$
$$d_l^n=n\sum_{j=l}^{m}D_n(y-y_j);\quad d_{-l}^n=\sum_{j=-n}^{-l}D_n(y-y_i);\quad l=1,2,\ldots n,$$

Из (2) имеем

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_{mn}(f;x,y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\Bigg\{ & d_1^m d_1^n f_{1,l} + d_1^m \sum_{l=2}^{n} d_l^n \Delta_y f_{1,l} + \\
& + d_1^n \sum_{k=2}^{m} d_k^m \Delta_x f_{k,1} + \sum_{k=2}^{m}\sum_{l=2}^{n} d_k^m d_l^n \Delta^2 f_{k,l} + d_0^m d_1^n \Delta^2 f_{k,l} + d_0^m d_1^n f_{0,1} + \\
& + d_0^m \sum_{l=2}^{n} d_l^n \Delta_y f_{0,l} + d_0^n \sum_{k=2}^{m} d_{-k}^m \Delta_x f_{k,1} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=2}^{n} d_{-k}^m d_l^n \Delta^2 f_{k,l} + d_0^n d_1^m f_{1,0} + \\
& + d_0^n \sum_{k=2}^{m} d_k^m \Delta_x f_{k,0} + d_1^m \sum_{l=1}^{n} d_{-l}^n \Delta_y f_{1,-l} + \sum_{k=2}^{m}\sum_{l=1}^{n} d_k^m d_{-l}^n \Delta^2 f_{k,-l} + d_0^n d_0^m f_{0,0} + \\
& + d_0^m \sum_{l=1}^{n} d_{-l}^n \Delta_y f_{0,1} + d_0^n \sum_{k=1}^{m} d_{-k}^m \Delta_x f_{-k,0} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} d_{-k}^m d_{-l}^n \Delta^2 f_{-k,-l} \Bigg\};
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{S}_{mn}(f:x.y)\right| \le \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} & \Big\{ d_1^m d_1^n \left[M(h-x)^\alpha + N(g-y)^\beta\right] + d_1^m d_0^n \times \\
& \times \left[M(h-x)^\alpha + Ny^\beta\right] + d_0^m d_1^n \left[Mx^\alpha + N(g-y)^\beta\right] + d_0^m d_0^n \left[Mx^\alpha + Ny^\beta\right] + \\
& + Mh^\alpha \left(d_1^n + d_0^n\right)\left(\sum_{k=2}^{m}\left|d_k^m\right| + \sum_{k=1}^{m}\left|d_{-k}^m\right|\right) + Ng^\beta\left(d_0^m + d_1^m\right)\left(\sum_{l=2}^{n}\left|d_l^n\right| + \sum_{l=1}^{n}\left|d_{-l}^n\right|\right) + \\
& + Lh^\alpha g^\alpha \left(\sum_{k=2}^{m}\sum_{l=2}^{n}\left|d_k^m\right|\left|d_l^n\right| + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=2}^{n}\left|d_{-k}^m\right|\left|d_l^n\right| + \sum_{k=2}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|d_k^m\right|\left|d_{-l}^n\right| + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|d_{-k}^m\right|\left|d_{-l}^n\right|\right)\Big\} = A
\end{aligned} \tag{6}
$$

Построим теперь непрерывную 2π-периодическую относительно t и z функцию $F(t,z)$ следующим образом: положим: $F(x,y) = 0$ и

$$F(t,z) = MF_1(t) + NF_2(z) + LF_1(t)F_2(z) - Lh^\alpha F_2(z) - Lg^\beta F_1(t),$$

где $F(t)$ определена в узлах x_k следующим образом

$$
F_1(x_k) = \begin{cases}
x^\alpha, & k = 0,-2,\ -4,\ldots -2\left[\dfrac{m}{2}\right], \\
x^\alpha - h^\alpha, & k = -1,-3,\ldots \quad -2\left[\dfrac{m+1}{2}\right]+1, \\
(h-x)^\alpha, & k = 1,\ 3,\ldots \quad -2\left[\dfrac{m}{2}\right]-1, \\
(h-x)^\alpha - h^\alpha, & k = 1,\ 2,\ldots \quad -2\left[\dfrac{m}{2}\right].
\end{cases}
$$

Положим еще $F_1(x_m) = h^\alpha - (h-x)^\alpha$ при m – нечетном м $F_1(x_{m+1}) = F(x_{-m})$. На каждом из отрезков $[x_0,x],[x,x_1],[x_n,x_{n+1}],\ k = \pm1,\pm2,\ldots \pm m$, будем считать $F_1(t)$ линейной. Этим функция $F_1(t)$ полностью определена на промежутке $[x_{-m}, x_{m+1}]$ длиной 2π и остается ее продолжительность на всю ось по закону периодичности. Эту функцию рассмотрел впервые Н.П.Корнейчук и показал, что $F_1(t) \in lip\,\alpha$,

$$\begin{aligned} &F_1(x_k) - F_1(x_{k+1}) = \left(sign d_k^m\right) h^\alpha; \qquad k = -2, -3, \ldots -m, \\ &F_1(x_k) - F_1(x_{k-1}) = \left(sign d_k^m\right) h^\alpha; \qquad k = 2, 3, \ldots m-1, \end{aligned} \quad . \tag{7}$$

Функция $F_2(y)$ определяется аналогично и соответственно имеют место равенства

$$\begin{aligned} &F_2(y_l) = F_2(y_{l+1}) = \left(sign d_l^n\right) g^\beta; \qquad l = -2, -3, \ldots -m, \\ &F_2(y_l) = F_2(y_{l-1}) = \left(sign d_l^n\right) g^\beta; \qquad l = 2, 3, \ldots m-1 \end{aligned} \tag{8}$$

Покажем, что для достаточно больших m и n $F(t,z)$ принадлежит классу $H_{x,y}^{(\alpha,\beta)}$. В самом деле

$$\left|F(x',y')\right| - \left|F(x'',y'')\right| = \left|F(x',y')\right| - \left|F(x',y'')\right| - \left|F(x',y'')\right| - \left|F(x'',y'')\right| =$$
$$= \left|\left[F_1(x') - F_1(x'')\right]\left[M + L\left(F_2(y'') - g^\beta\right)\right] + \left[F_2(y') - F_2(y'')\right]\left[N + L\left(F_1(x') - h^\alpha\right)\right]\right|.$$

Легко видеть, что если

$$g^\beta < \frac{M}{L}, \qquad h^\alpha < \frac{N}{L},$$

то (1) выполнено.

Проверим выполнение условия (2). Действительно,

$$\left|F(x',y')\right| - \left|F(x'',y'') - F(x',y'') - F(x'',y')\right| = L\left|\left(F_1(x') - F_1(x'')\right) \times\right.$$
$$\left.\times \left(F_2(y') - F_2(y'')\right)\right| \le L\left|x' - x''\right|^\alpha \left|y' - y''\right|^\beta.$$

С учетом равенства (7) и (8) получаем

$$\begin{gathered} F_{1,1} = M(h-x)^\alpha + N(g-y)^\beta + O\left(\frac{1}{m^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\beta}\right), \qquad F_{0,0} = Mx^\alpha + Ny^\beta + O\left(\frac{1}{m^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\beta}\right); \\ F_{1,0} = M(h-x)^\alpha + Ny^\beta + O\left(\frac{1}{m^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\beta}\right), \qquad F_{0,1} = Mx^\alpha + N(g-y)^\beta + O\left(\frac{1}{m^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\beta}\right); \\ \Delta_y F_{k,\pm l} = N\left(sign\, d_{\pm l}^n\right) g^\beta, \qquad \Delta_x F_{\pm k,l} = M\left(sign\, d_{\pm k}^m\right) h^\alpha + O\left(\frac{1}{m^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\beta}\right); \\ \Delta^2 F_{\pm k,\pm l} = L\left(sign\, d_{\pm k}^m\right) h^\alpha g^\beta, \qquad k = 2,3,\ldots m, \quad l = 2,3,\ldots n. \end{gathered} \tag{9}$$

Учитывая известные асимптотические равенства для d_0^m, d_0^n, d_1^m, h^α, g^β, $\sum_{k=2}^m \left|d_k^m\right|$, $\sum_{k=2}^m d_k^m$, $\sum_{l=2}^m \left|d_l^n\right|$, $\sum_{l=2}^m d_l^n$, $\sum_{k=1}^m \left|d_k^m\right|$, $\sum_{l=1}^m \left|d_l^n\right|$ полученные Н.П.Корнейчуком (3), и равенства (4), (5), (6) и (9), имеем

$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)} = A + O\left(\frac{\ln m + \ln n}{m^{\alpha} \cdot n^{\beta}}\right). \tag{10}$$

После некоторых преобразований правой части равенства (10) получим (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Давидчик А.Н. Неравенство типа Джексона для операторов Фейера / Давидчик А.Н. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2009. – С.229.
2. Давидчик А.Н. О точних константах в неравенствах типа Джексона / Давидчик А.Н., Власенко С.Е. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2010. – С.40.
3. Давидчик А.Н. К вопросу о приближении оператором Валле-Пусена / Давидчик А.Н. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2010. – С.41.

Поступила в редколлегию 26.09.2014.

УДК 517.5

ДАВИДЧИК А.Н., к. физ.-мат. н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Введение. Обозначим через H_{ω} класс непрерывных, 2π – периодически по каждой из переменных функций, модуль непрерывности которых

$$\omega(f;h,\delta) = \sup_{\substack{|x'-x''|\le h \\ |y'-y''|\le\delta}} \left| f(x',y') - f(x'',y') - f(x',y'') - f(x'',y'')\right| \tag{1}$$

не превосходит заданного модуля $\omega(h,\delta)$.

Через $W^{x,\delta}H_{\omega}(r,s=1,2,3,...)$ обозначим класс 2π–периодических по каждой из переменных функций, у которых *r*-я производная по *x* и *s*-я по *y* принадлежит H_{ω}.

Постановка задачи. Известно следующее интегральное представление для функций из класса W^{p} (класс функций имеющих (*p* – 1)-ю непрерывную производную и $\left|f^{(p)}(x)\right| \le 1$ почти всюду).

$$f(x) = \frac{1}{2x}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\cos\left(v(x-t) - p\frac{\pi}{2}\right)}{v^{p}}dt\,.$$

А для функций двух переменных можно получить следующее представление:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)dxdy + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(o,s)}(x,v)\cdot K_s(y-v)dxdv +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(o,s)}(u,y)\cdot K_s(x-u)dudy + \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r,s)}(u,v)\cdot K_r(x-u)K_s(y-v)dudv,$$