$$C_{mn}^{(\alpha,\beta)} = A + O\left(\frac{\ln m + \ln n}{m^{\alpha} \cdot n^{\beta}}\right). \quad (10)$$

После некоторых преобразований правой части равенства (10) получим (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Давидчик А.Н. Неравенство типа Джексона для операторов Фейера / Давидчик А.Н. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2009. – С.229.
2. Давидчик А.Н. О точних константах в неравенствах типа Джексона / Давидчик А.Н., Власенко С.Е. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2010. – С.40.
3. Давидчик А.Н. К вопросу о приближении оператором Валле-Пусена / Давидчик А.Н. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2010. – С.41.

Поступила в редколлегию 26.09.2014.

УДК 517.5

ДАВИДЧИК А.Н., к. физ.-мат. н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Введение. Обозначим через H_{ω} класс непрерывных, 2π – периодически по каждой из переменных функций, модуль непрерывности которых

$$\omega(f;h,\delta) = \sup_{\substack{|x'-x''|\le h \\ |y'-y''|\le\delta}} \left| f(x',y') - f(x'',y') - f(x',y'') - f(x'',y'') \right| \quad (1)$$

не превосходит заданного модуля $\omega(h,\delta)$.

Через $W^{x,\delta}H_{\omega}(r,s=1,2,3,\ldots)$ обозначим класс 2π–периодических по каждой из переменных функций, у которых r-я производная по x и s-я по y принадлежит H_{ω}.

Постановка задачи. Известно следующее интегральное представление для функций из класса W^{p} (класс функций имеющих (p – 1)-ю непрерывную производную и $\left|f^{(p)}(x)\right| \le 1$ почти всюду).

$$f(x) = \frac{1}{2x}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\cos\left(v(x-t) - p\frac{\pi}{2}\right)}{v^{p}}dt.$$

А для функций двух переменных можно получить следующее представление:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)dxdy + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(o,s)}(x,v)\cdot K_s(y-v)dxdv +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(o,s)}(u,y)\cdot K_s(x-u)dudy + \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r,s)}(u,v)\cdot K_r(x-u)K_s(y-v)dudv,$$

где $K_n(z)=\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\cos\left(vz-n\frac{\pi}{2}\right)}{v^n}$.

Результаты работы. В настоящей работе находятся оценки модуля непрерывности (1) из некоторых классах функций. Обозначим $\sup\limits_{f\in W^{r,s}H_\omega}\omega(f;h,\delta)$ через $M_{r,s}(\omega;h,\delta)$.

Отсюда получим

$$M_{r,s}(\omega;h,\delta)=\sup_{f\in W^{r,s}H_\omega}\sup_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\frac{1}{\pi^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r,s)}(u,v)D_r(x,u)D_s(y,v)dudv\right|,$$

где через $D_i(\alpha,t)$обозначено $K_i\left(\frac{\alpha}{2}-t\right)-K_i\left(\frac{\alpha}{2}-t\right)$.

Рассмотрим случай, когда r – нечетное, s – четное. Ход доказательства в других случаях аналогичен.

При доказательстве используем лемму, доказанную А.И.Степанцом, которая является аналогом замечательной леммы Н.П.Корнейчука.

$$M_{r,s}(\omega;h,\delta)=\frac{2}{\pi^2}\sup_{f\in Wr,sH_\omega}\sup_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\left|\int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f^{(r,s)}(u,v)D_r(x,u)D_s(y,v)dudv+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f^{(r,s)}(u,v)D_r(x,u)D_s(y,v)dudv\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sup_{f\in W^{r,s}H_\omega}\sup_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\left|\int_0^{u_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left[f^{(r,s)}(u,v)-f^{(r,s)}(\rho(\omega,v))-\right.\right.$$

$$-f^{(r,s)}(u,\delta_1(v))+f^{(r,s)}(\rho(u),\delta_1(v))\big]D_r(x,u)D_s(y,v)dudv+$$

$$+\int_0^{u_0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f^{(r,s)}(u,v)-f^{(r,s)}(\rho(u),v)-f^{(r,s)}(u,\delta_2(v))+\right.$$

$$\left.+f^{(r,s)}(\rho(u),\delta_2(v))\right]D_r(x,u)D_s(y,v)dudv\le$$

$$\le\frac{2}{\pi^2}\sup_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\int_0^{u_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(\rho(u)-u,2v)|D_r(x,u)|\cdot(|D_s(y,v)|+|D_s(y,\pi-v)|)dudv,$$

где $u_0,\rho(u),\ \delta_1(v),\ \delta_2(v)$ определяются из уравнений

$$D_r(x,u_0)=0,\qquad u_0\in[0,\pi];$$

$$\int_0^{u}D_r(x,t)dt=\int_0^{\rho(u)}D_r(x,t)dt,\quad u\in[0,u_0],\quad \rho(u)\in[u_0,\pi];$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{v} D_S(y,z)dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\delta_1(v)} D_S(y,z)dz, \qquad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ \ \delta_1(v) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{v} D_S(y,z)dz = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\delta_2(v)} D_S(y,z)dz, \qquad v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ \ \delta_2(v) \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right];$$

Получаем следующее утверждение.

Имеет место неравенство

$$M_{r,s}(\omega;h,\delta) \le \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2} \sup\limits_{\substack{0\le x\le h \\ 0\le y\le\delta}} \int\limits_0^{u_0}\int\limits_0^{v_0} \omega(\rho(u)-u,\delta(v)-v)\cdot|D_r(x,u)\cdot D_s(y,v)|dudv, \\ \qquad\qquad r,s-\text{нечетные}, \\ \dfrac{2}{\pi^2} \sup\limits_{\substack{0\le x\le h \\ 0\le y\le\delta}} \int\limits_0^{u_0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\rho(u)-u,2v)|D_r(x,u)|\times \\ \qquad \times(|D_s(y,v)|+|D_s(y,\pi-v)|)dudv \\ \qquad\qquad r-\text{нечетное},\ s-\text{четное}, \\ \dfrac{2}{\pi^2} \sup\limits_{\substack{0\le x\le h \\ 0\le y\le\delta}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{v_0} \omega(2u,\delta(v)-v)(|D_r(x,u)|+|D_r(x,\pi-u)|)\times \\ \qquad \times(|D_s(y,v)|+|D_s(y,\pi-v)|)dudv, \\ \qquad\qquad r,s-\text{четные}, \end{cases}$$

где $v_0, \delta(v)$ определяются из следующих уравнений: $D_s(y,v_0)=0, \qquad v_0 \in [0,\pi];$

$$\int\limits_0^{v} D_s(y,z)dz = \int\limits_0^{\delta(v)} D_s(y,z)dz, \qquad v \in [0,v_0], \quad \delta(v) \in [v_0,\pi].$$

Неравенство (3) будет точным, если $\omega(f;h,\delta)$выпуклая вверх функции по δ при фиксированном *h*, и по *h* при фиксированном δ.

Рассмотрим теперь класс $W^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}$ – класс 2π – периодических по каждой из переменных функций, имеющих *r*-ю производную по *x* и *s*-ю по *y*, которая удовлетворяет условию

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y'')\right| \le \omega_1(|x'-x''|)+\omega_2(|y'-y''|).$$

Рассуждая как и при доказательстве предыдущей теоремы, получим

Для всех $f(x,y) \in W^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}$ имеет место неравенство, которое будет точным, если $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ выпуклые вверх функции:

$$M_{r,s}(\omega;h,\delta)\le\begin{cases}\dfrac{8}{\pi^2}\sup\limits_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\int\limits_0^{u_0}\int\limits_0^{v_0}\min\{\omega_1(\rho(u)-u);\omega_2(\delta(v)-v)\}\times\\ \qquad\times\left|D_r(x,u)\cdot D_s(y,v)\right|dudv,\\ \qquad\qquad r,s-\text{нечетные},\\ \dfrac{4}{\pi^2}\sup\limits_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\int\limits_0^{u_0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\min\{\omega_1(\rho(u)-u);\omega_2(2v)\}\times\\ \qquad\times\left|D_r(x,u)\right|\cdot\left(\left|D_s(y,v)\right|+\left|D_s(y,\pi-v)\right|\right)dudv\\ \qquad\qquad r-\text{нечетное},\ s-\text{четное},\\ \dfrac{4}{\pi^2}\sup\limits_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{v_0}\min\{\omega\omega_1(2u,);\omega_2(\delta(v)-v)\}\times\times\\ \qquad\times\left(\left|D_r(x,u)\right|+\left|D_r(x,\pi-u)\right|\right)\cdot\left|D_s(y,v)\right|dudv,\\ \qquad\qquad r-\text{нечетное},s-\text{четные},\\ \dfrac{2}{\pi^2}\sup\limits_{\substack{0\le x\le h\\0\le y\le\delta}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\min\{\omega_1(2u,);\omega_2(2v)\}\cdot\left(\left|D_r(x,u)\right|+\left|D_r(x,\pi-u)\right|\right)\times\\ \qquad\times\cdot\left(\left|D_s(y,v)\right|+D_s(y,\pi-v)\right)dudv,\\ \qquad\qquad r,s-\text{четные},\end{cases}$$

Выводы. В настоящей работе находятся оценки модуля непрерывности.

$$\omega(f;h,\delta)=\sup_{\substack{|x'-x''|\le h\\|y'-y''|\le\delta}}\left|f(x',y')-f(x'',y')-f(x',y'')-f(x'',y'')\right|$$

Для класса $W^{x,\delta}H_\omega(r,s=1,2,3,\ldots)$ 2π– периодических по каждой из переменных функций, у которых r-я производная по x и s-я по y принадлежит H_ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давидчик А.Н. О приближении линейными положительными операторами / Давидчик А.Н., Павлюченко А.В. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск, 2011. – С.160.
2. Давидчик А.Н. О приближении функций двух переменных / Давидчик А.Н.. // Сборник научных трудов Днепродзержинского государственного технического университета: тематический выпуск «Математические проблемы технической механики». – Днепродзержинск: ДГТУ. – 2013. – Выпуск 2 (22). – С.64-68.
3. Давидчик А.Н. О приближении кубическими сплайнами / Давидчик А.Н., Павлюченко А.В. // Математические проблемы технической механики: междунар. науч. конф.: тезисы докл. – Днепродзержинск-Днепропетровск, 2013. – С.139.

Поступила в редколлегию 26.09.2014.