

**Висновки.** В результаті розв'язування поставленої задачі знайдено вираз для потенціалу швидкості фільтрації (13), що дає можливість з одного боку отримати наближене рівняння вільної поверхні ґрунтових вод при безнапорному пружному режимі фільтрації, а з другого боку визначити величину витрати  $q$  при роботі свердловини.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме / Щелкачев В.Н. – М.: Гостехиздат, 1959. – 468с.
2. Положий Г.Н. Уравнения математической физики / Положий Г.Н. – М.: Высшая школа, 1964 – 560с.

Надійшла до редколегії 22.06.2015.

УДК 539.3

ДАШКО О.Г., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ РАСЩЕПЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ

**Введение.** Исследованию концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах посвящено много публикаций [1-4]. Для решения задач в этой области широко используется метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины [5-7]. В работе [7] найдено решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины, на граничной поверхности которой задано значение расщепляющей силы, т.е. уравновешенной по толщине пары сил, стремящейся расщепить пластину по срединной плоскости, при отсутствии нормального радиального напряжения.

В данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропного слоя с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой заданы однородные граничные условия для радиального смещения и действует уравновешенная по толщине пара сил (расщепляющая сила).

**Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченный трансверсально-изотропный слой толщиной  $2h$  ( $h = const$ ), содержащий круговую цилиндрическую полость, радиуса  $R$ . На поверхности полости  $R \times [-h; h]$  выполняются условия третьей краевой задачи теории упругости: заданы значения нормального перемещения и касательных напряжений. Будем считать, что нормальное смещение  $u_r(R, \theta, x_3)$  равно нулю, а касательные напряжения задаются формулами  $\sigma_{r\theta}(R, \theta, x_3) = 0$ ,  $\sigma_{r3}(R, \theta, x_3) = -q\xi(1 - \xi^2)$ , где  $q$  – некоторая константа,  $\xi = x_3/h \in [-1, 1]$ . Эти поперечные касательные напряжения представляют уравновешенную по толщине пару сил, стремящуюся расщепить (или сжать) слой вдоль срединной плоскости. Необходимо определить и исследовать напряженное состояние в окрестности полости.

**Результаты работы.** Для сведения трехмерной задачи к двумерной воспользуемся методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от третьей координаты. Предполагая, что деформирование слоя будет симметричным относительно срединной плоскости  $S$ , представим составляющие вектора перемещений и тензора напряжений таким образом [8, 9].

$$\begin{aligned} \{u_\alpha(x_1, x_2, x_3), \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3), \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^n \left\{ u_\alpha^{(2k)}(x), \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)}(x), \sigma_{33}^{(2k)}(x) \right\} P_{2k}(\xi), \\ \{u_3(x_1, x_2, x_3), \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^n \left\{ u_3^{(2k+1)}(x), \sigma_{\alpha 3}^{(2k+1)}(x) \right\} P_{2k+1}(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in S$ . Относительно коэффициентов разложений  $u_j^{(k)}(x)$ , как функций двух независимых переменных, имеем систему уравнений, общее решение которой представляется формулами [9]

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= \kappa^* \overline{\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)}} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m; \\ c_{66} u_+^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s; \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}); \\ c_{66} u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h \left[ \overline{\varphi'(z) + \varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(1)} V_m; \\ c_{66} u_3^{(2k+1)} &= \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(2k+1)} V_m \quad (k = \overline{2, n}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные голоморфные функции;  $V_m$  и  $W_s$  – метатармонические функции (решения уравнения Гельгольца)

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0, \quad (3)$$

$k_m$ ,  $\lambda_s$  – корни соответствующих характеристических уравнений;  $\kappa^*$ ,  $\kappa_1^*$ ,  $\kappa_2^*$  и  $a_m^{(2k)}$ ,  $b_s^{(2k)}$ ,  $c_m^{(2k+1)}$  – константы.

Коэффициенты разложения напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  в комплексной форме записываем таким образом

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4 \left[ \overline{\varphi'(z) + \varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(0)} V_m, \\ \sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} &= -4 \left[ \overline{z\varphi''(z) + \psi'(z)} \right] + 4h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m, \\ \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(2k)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_{3m}^{(2k)} V_m, \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + 4h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s, \\ \sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} &= 2 \sum_{m=1}^{2n+1} p_m^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{0, n}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu_*^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_*^{(2)} = 0$  ( $k > 1$ );  $\kappa^*$ ,  $\kappa_1^*$ ,  $\kappa_2^*$  и  $d_m^{(2k)}$ ,  $p_m^{(2k+1)}$ ,  $q_s^{(2k+1)}$  – константы.

На основе формул преобразований

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}, \quad \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = e^{-2i\theta} \left( \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right), \\ \sigma_{r3}^{(2k+1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k+1)} &= e^{-i\theta} \left( \sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} \right), \quad u_r^{(2k)} + iu_\theta^{(2k)} = e^{-i\theta} \left( u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

получаем выражения для коэффициентов разложения напряжений и перемещений в полярной системе координат. Отсюда получаем граничные условия при решении внутренней и внешней краевых задач.

Рассмотрим граничную поверхность полости. В плоскости  $S$  на контуре кругового отверстия радиуса  $R$  имеем такие граничные условия для коэффициентов разложения в ряды перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} u_r^{(2k)}(R, \theta) &= 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2k)}(R, \theta) = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \sigma_{r3}^{(1)}(R, \theta) &= -0,4q, \quad \sigma_{r3}^{(3)}(R, \theta) = 0,4q, \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}(R, \theta) = 0 \quad (k = \overline{2, n}). \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения данной осесимметричной задачи голоморфные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  примем в виде  $\varphi(z) = 0$ ;  $\psi(z) = b_2 z^{-2}$ , а метагармонические функции  $V_m$  представим таким образом

$$V_1 = B_0 K_0(\rho x_1), \quad V_2 = C_0 H_0^{(1)}(\rho x_2), \quad V_3 = D_0 H_0^{(2)}(\rho x_3), \quad (7)$$

где  $\rho = r/R$ ,  $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$ ,  $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{k_2}$ ,  $x_3 = \bar{x}_2$ ,  $K_0(\rho x_1)$  – модифицированная функция Бесселя,  $H_0^{(1)}(\rho x_2)$  и  $H_0^{(2)}(\rho x_3)$  – модифицированные функции Ханкеля первого и второго рода,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$  – постоянные величины. Функции  $W_s$  вихревого решения в осесимметричной задаче отсутствуют. Алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных констант получим, подставляя значения данных функций в равенства (2), (4) и учитывая граничные условия (6).

**Результаты численных исследований.** Проведем исследование напряженного состояния трансверсально-изотропного слоя с круговой полостью, на граничной поверхности  $R \times [-h; h]$  которой  $u_r(R, \theta, x_3) = 0$  равно нулю, а касательные напряжения заданы формулами  $\sigma_{r\theta}(R, \theta, x_3) = 0$ ,  $\sigma_{r3}(R, \theta, x_3) = -q\xi(1 - \xi^2)$ ,  $q = const$ ,  $\xi = x_3/h$ . Предполагаем, что для данного слоя коэффициенты Пуассона  $\nu = 0,25$  и  $\nu' = 0,15$ , а отношения модулей упругости  $E/E' = 1,25$  и  $E/G' = 2,5$ . При заданном типе нагрузки и закрепления граничной поверхности доминирующими напряжениями становятся радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  и нормальное поперечное напряжение  $\sigma_{33}$ . Свои максимальные значения радиальные напряжения достигают на граничных плоскостях слоя  $\xi = \pm 1$ , а нормальные поперечные напряжения – на срединной плоскости  $\xi = 0$ .

На рис.1 и 2 представлены кривые зависимости значений напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{33}$  относительной толщины слоя в точках на контуре отверстия на граничной плоскости слоя для радиального напряжения и на срединной плоскости для нормального поперечного напряжения.

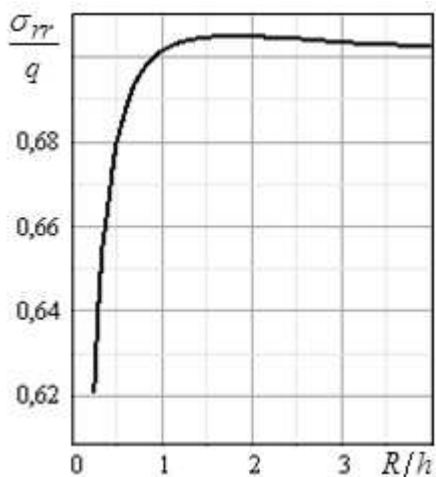


Рисунок 1

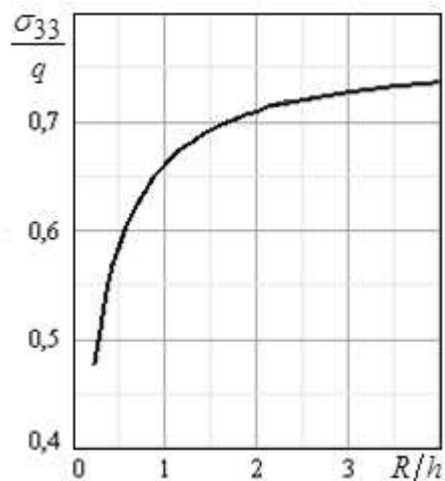


Рисунок 2

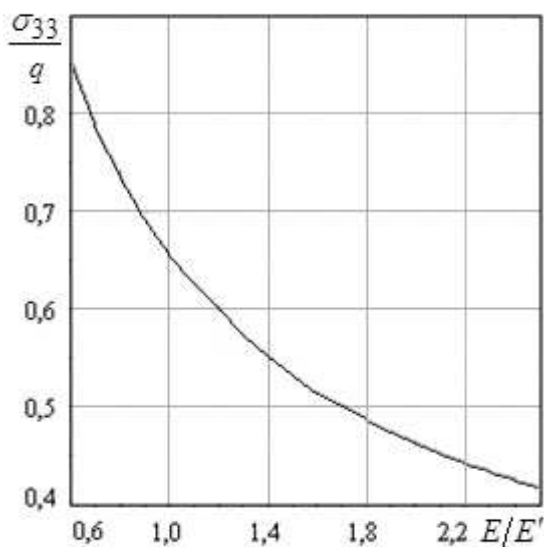


Рисунок 3

Кривая на рис.3 характеризует изменение нормальных поперечных напряжений в зависимости от значения отношения модулей упругости материала слоя на окружности отверстия на срединной плоскости при относительной толщине слоя  $R/h = 0,5$ . С увеличением данного отношения напряжения монотонно убывают.

**Выводы.** В данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропного слоя с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой отсутствуют радиальные перемещения и действует уравновешенная по толщине пара сил (расщепляющая сила). Приведены результаты численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А.С. О концентрации напряжений в трансформной пластине с цилиндрической полостью / Космодамианский А.С., Милишевский И.Х., Шалдырван В.А. // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41, № 5. – С.957-960.
2. Роменская Г.И. Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально-изотропной плиты / Роменская Г.И., Шленёв М.А. // Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин: труды. – Тбилиси, 1975. – С.260-269.
3. Фильштинский Л.А. Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел / Фильштинский Л.А., Кушнир Д.В. // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С.90-99.
4. Чехов В.Н. Исследование поля смещений в трехмерной задаче Кирша / Чехов В.Н., Королев К.А. // Современные проблемы концентрации напряжений: междунар. науч. конф.: труды. – Донецк, 1998. – С.253-257.
5. Меунаргия Т.В. Исследование концентрации напряжений около отверстий в пластинах постоянной толщины / Меунаргия Т.В. // Исследование некоторых уравнений математической физики. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та. – 1974. – С.107-120.

6. Хома И.Ю. Влияние расщепляющей силы на напряженное состояние пластины, ослабленной отверстием / Хома И.Ю. // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1969. – № 7. – С.643-646.
7. Хома И.Ю. Напряженное состояние трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью при заданной расщепляющей силе / Хома И.Ю., Дашко О.Г., Коваленко И.Г. // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 8 (54). – С.3-10.
8. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / Векуа И.Н. // Труды Тбилисского матем. ин-та. – 1965. – 30. – С.3-103.
9. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates / Khoma I.Yu. // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – 101, № 6. – P.3577-3584.

Поступила в редколлегию 03.07.2015.

УДК 372.851

КРИЛОВА Т.В., д-р пед.н., профессор

Дніпродзержинський державний технічний університет

## ПЕДАГОГІЧНИЙ КОНТРОЛЬ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

**Вступ.** Згідно із Законом України «Про вищу освіту» збільшилась кількість годин на самостійну роботу студентів. Це означає, що таку роботу треба організовувати, навчити студентів самостійно вчитися та удосконалювати систему педагогічного контролю.

**Постановка задачі.** Висвітлити проблему педагогічного контролю у вищій школі, визначити його види, форми, функції. Проілюструвати прикладами.

**Результати роботи.** «Контроль (фр. controle) – перевірка чого-небудь, наприклад виконання законів, планів; облік, перевірка рахунків, звітності; установа, що займається перевіркою звітів» [1].

«Педагогічний контроль – це система перевірки результатів навчання, розвитку і виховання студентів» [2].

Залежно від часу проведення педагогічний контроль має наступні види: попередній або вхідний, повторний, поточний, тематичний, рубіжний, підсумковий і заключний.

*Попередній контроль* здійснюється на початку навчального року, семестру або перед вивченням великого розділу програми. Цей контроль здійснюється для діагностування залишкових засвоєних знань, набутих навичок і вмінь. Для його проведення використовуються письмові контрольні роботи, тестування. При навчанні математики вхідний контроль краще проводити за допомогою письмових контрольних робіт, тому що тестування не дає змоги проаналізувати помилки, прослідкувати за логікою мислення виконавця. При перевірці контрольних робіт бажано було б за кожний приклад виставляти окремі бали. З тієї теми, з якої більшість студентів отримали низькі бали, провести додаткові заняття, консультації, а потім знову в поза- аудиторний час провести контрольну роботу. Для першокурсників на початку навчального року провести, так звану, «нульову» контрольну роботу. Зміст письмової контрольної роботи повинен містити приклади на розв'язання дій за звичайними та десятковими дробами, алгебраїчні дії з числами різних знаків, алгебраїчних та тригонометричних перетворень, алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь, алгебраїчних та тригонометричних рівнянь й нерівностей, алгебраїчних та геометричних задач. Після переві-