

КАЧУРА А.В., к.т.н., доцент  
РОЕНКО Е.С., ассистент  
ПОЛЯКОВ Р.М., аспирант

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Введение.** Во многих случаях, когда требуется регулировать производительность различных механизмов, на смену электроприводам постоянного тока приходят асинхронные приводы с преобразователями частоты. Иногда данное обстоятельство обусловлено действительными преимуществами новых технических решений – снижение габаритов электрооборудования, повышение его надёжности и долговечности, стандартизация и унификация систем управления.

Однако имеются обширные области, где электроприводы постоянного тока достаточно распространены: металлургическое оборудование, наземный транспорт, системы точного позиционирования, приборостроение и т. д. В связи с этим актуальной является задача исследования электромагнитных параметров машин постоянного тока (МПТ) и улучшение их характеристик в динамических режимах работы.

Важными факторами, которые должны учитываться при проектировании МПТ, являются их надёжность, экономичность, соответствие современным стандартам и техническим требованиям. С учетом этого разработаны и применяются ряд методик [1-5], в которых используется аналитический аппарат, дополняемый эмпирическими соотношениями и графическими зависимостями, полученными экспериментальным путём. Как правило, данные методики ориентированы на общепромышленные серии машин, имеющих стандартные типоразмеры и конструкцию. Модификация конструкции и применение новых материалов нередко вызывают сложности при проектировании. В связи с этим важным инструментом анализа МПТ становятся численные методы, которые позволяют исследовать характеристики и параметры МПТ с учетом новых конструктивных решений в статических, квазистатических и динамических режимах работы. Для решения задач проектирования МПТ можно выделить метод конечных элементов (МКЭ) [6, 7].

**Постановка задачи.** Разработать цепно-полевую модель серийной машины постоянного тока с модифицированной системой возбуждения на основе метода конечных элементов. Получить электромагнитные параметры МПТ в динамических режимах, исследовать электромеханические характеристики в режиме холостого хода и набросе нагрузки.

**Результаты работы.** На основе МКЭ в работе исследованы электромагнитные параметры и электромеханические характеристики серийной МПТ МУН-2 (рис.1) производства „Островский завод электрических машин” (г. Остров, Россия). С учетом особенностей локальной эксплуатации двигателя система возбуждения серийной машины изменена с последовательной (рис.2, а) на независимую (рис.2, б) при отсутствии конструктивных изменений в цепи якоря. Схема обмотки якоря двигателя показана на рис.3, его конструктивные параметры – на рис.4, паспортные данные представлены в табл.1.

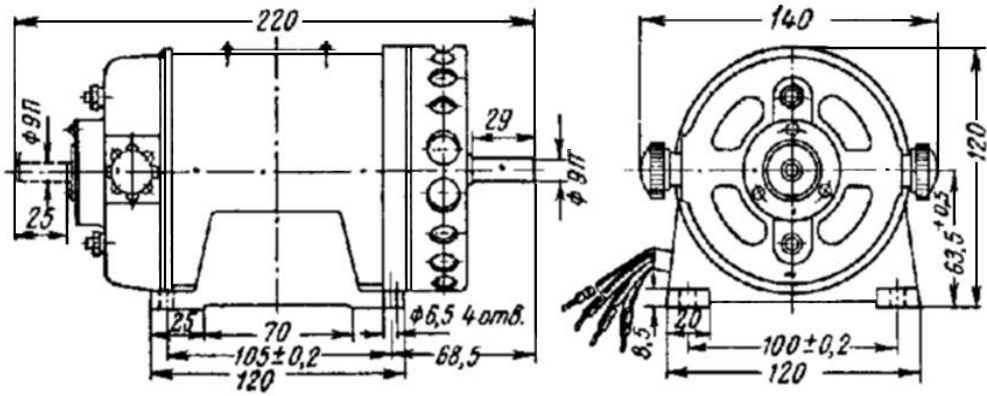


Рисунок 1 – Габаритні розміри серійної МПТ МУН-2

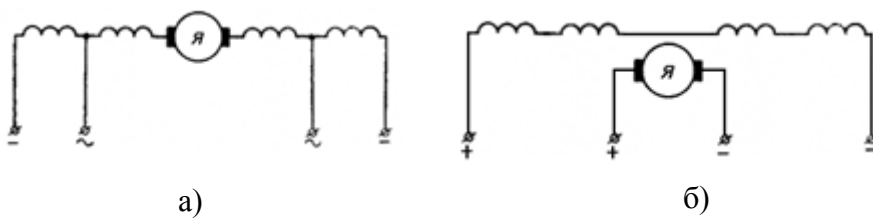


Рисунок 2 – Система возбуждения МПТ МУН-2

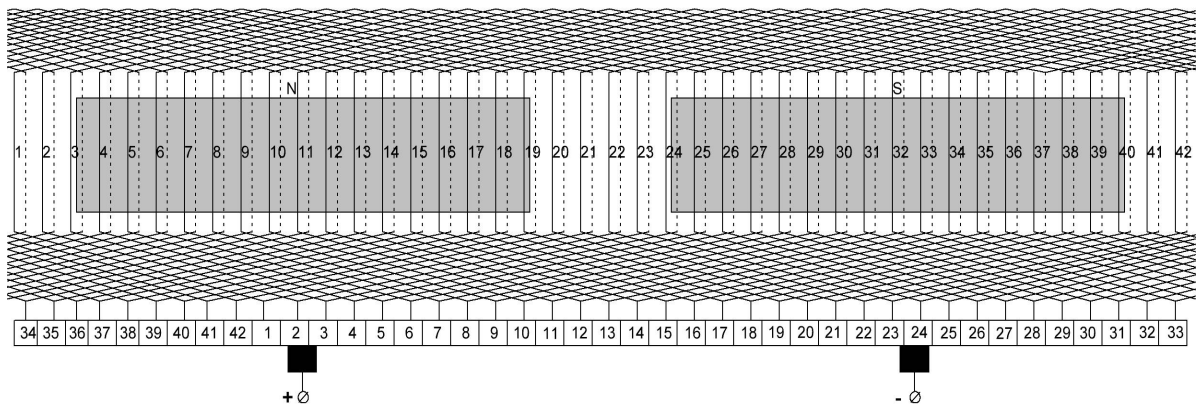


Рисунок 3 – Схема обмотки якоря двигателя

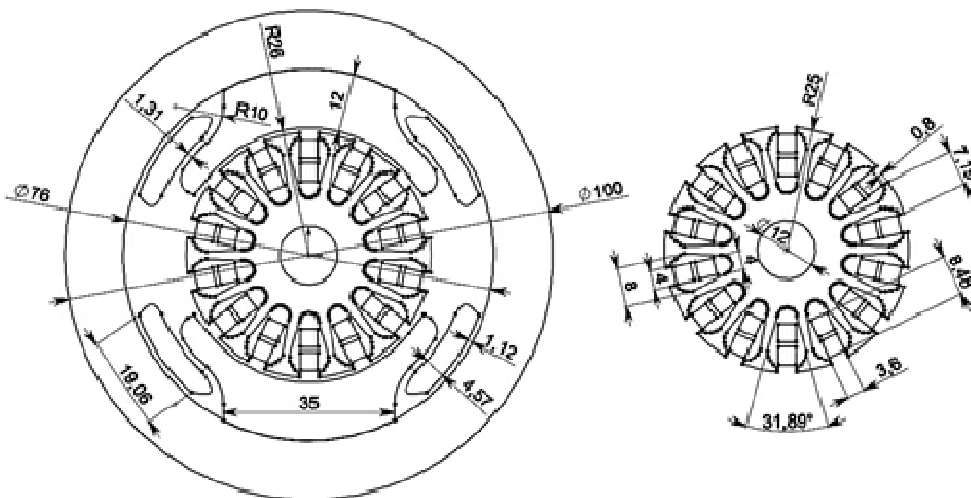


Рисунок 4 – Конструктивні параметри МПТ

Таблица 1 – Технические данные МПТ МУН-2 (паспортные)

Тип	Вид тока	Номинальная мощность, Вт	Номинальное напряжение, В	Номинальная частота вращения, об/мин	Номинальный момент, кг·см	Номинальный ток, А	Климатическое исполнение	Категория размещения	Режим работы	Масса, кг
МУН-2	постоянный	100	220	2200	4,3	0,9	УХЛ	4	S1	4

Для проведения поверочного проектирования используется модель МПТ, представленная в виде уравнений поля. Их решение выполним на основе МКЭ [10, 12], который позволяет корректно описать сложную геометрию двигателя с учетом нелинейных свойств материалов в стационарных и переходных режимах работы [6, 7]. При разработке модели приняты следующие допущения:

- 1) модель двигателя является плоской и рассматривается в прямоугольной системе координат;
- 2) плотность тока в обмотке распределяется равномерно по всему сечению;
- 3) упрощены конструктивные детали (технологические канавки, крепежные соединения и отверстия в них);
- 4) обмотка якоря и обмотка возбуждения питаются от источника постоянного напряжения бесконечной мощности.

Основываясь на математической модели, рассмотренной в [8, 9], система уравнений, описывающая МПТ, может быть представлена как:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \times (\nu_{\epsilon} \nabla \times \vec{A}) = 0 - \text{воздушный зазор;} \\ -\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = 0 - \text{станина;} \\ -\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = 0 - \text{главные полюсы;} \\ -\nabla \times (\nu_{\epsilon} \nabla \times \vec{A}) = \frac{N_{\epsilon} i_{\epsilon}}{S_{\epsilon}} - \text{полюсная обмотка;} \\ -\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -\nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \text{сердечник якоря;} \\ -\nabla \times (\nu_{\epsilon} \nabla \times \vec{A}) = -\nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{N_a i_a}{S_a} - \text{обмотка якоря;} \\ -\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \text{вал,} \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\nabla$  – оператор набла;  $\nu$  – удельное магнитное сопротивление стали;  $\nu_{\epsilon}$  – удельное магнитное сопротивление;  $\vec{A}$  – векторный магнитный потенциал;  $i_{\epsilon}$  – ток в обмотке возбуждения;  $i_a$  – ток в обмотке якоря;  $N_{\epsilon}, S_{\epsilon}$  – число витков и площадь поперечного сечения обмотки возбуждения;  $N_a, S_a$  – число витков и площадь поперечного сечения обмотки якоря;  $\sigma$  – удельная электрическая проводимость материала;  $\nu$  – линейная скорость вращения точки на поверхности якоря.

В прямоугольной двухмерной системе координат система (1) преобразуется к виду [8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 - \text{воздушный зазор;} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 - \text{станина;} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 - \text{главные полюсы;} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \frac{N_{\epsilon} i_{\epsilon}}{S_{\epsilon}} - \text{полюсная обмотка;} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -v \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \text{сердечник якоря;} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{\epsilon} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -v \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{N_a i_a}{S_a} - \text{якорь;} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - v \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \text{вал.} \end{array} \right. \quad (2)$$

Система (2) должна быть дополнена уравнениями равновесия напряжения для обмоток якоря и возбуждения:

$$U_a = R_a \cdot i_a + \frac{dL_a(\gamma, i_a) \cdot i_a}{dt}; \quad (3)$$

$$U_{\epsilon} = R_{\epsilon} \cdot i_{\epsilon} + \frac{dL_{\epsilon}(\gamma, i_{\epsilon}) \cdot i_{\epsilon}}{dt}, \quad (4)$$

где  $U_a, U_{\epsilon}$  – питающие напряжения обмоток якоря и возбуждения;  $R_a, R_{\epsilon}, L_a, L_{\epsilon}$  – омические сопротивления обмоток и их индуктивности;  $i_a, i_{\epsilon}$  – токи якоря и обмотки возбуждения;  $\gamma$  – угол поворота якоря относительно обмотки полюсов.

На основе уравнения (3) реализована математическая модель электрической цепи, имитирующая работу щеточно-коллекторного узла совместно с обмоткой якоря (рис.5).

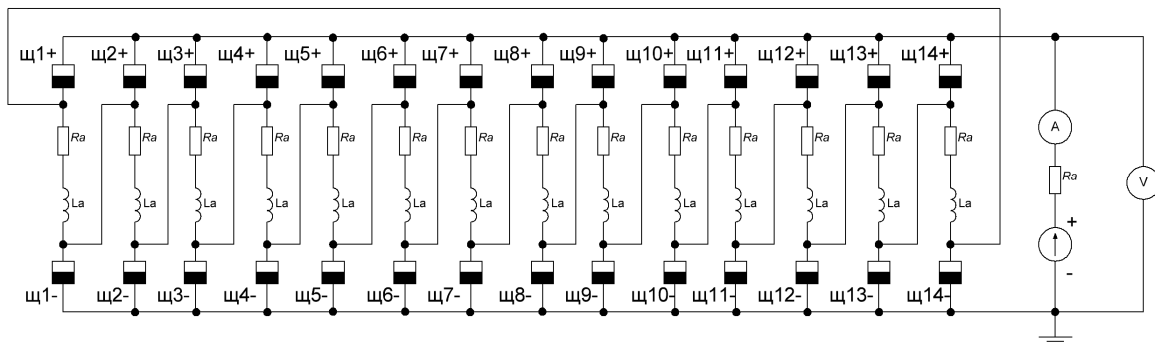


Рисунок 5 – Цепная диаграмма обмотки якоря

Для исследования электромеханических процессов математическая модель МПТ включает основное уравнение динамики вращательного движения

$$M - M_c = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (5)$$

где  $M$  – величина электромагнитного момента;  $M_c$  – статический момент сопротивления на валу;  $J$  – момент инерции якоря;  $\omega$  – угловая скорость вращения якоря.

Решение системы (2) сводится к краевой задаче на основе уравнений Пуассона и Лапласа относительно векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$  [6]. Приведем краевую задачу к вариационной и применим МКЭ [6]. При этом система (2) трансформируется к

матричному виду

$$[S] \times \{A\} + [N] \times \frac{\partial \{A\}}{\partial t} = [C] \times \{i\}, \quad (6)$$

где  $[S], [C], [N]$  определены в [8].

После расчета значения магнитной индукции в каждой точке поля области МПТ, электромагнитный момент, действующий на якорь, может быть вычислен через тензоры напряжений [9]:

$$\bar{M} = \oint_S [\bar{r} \bar{T}_n] dS = \bar{q}_x M_x + \bar{q}_y M_y + \bar{q}_z M_z, \quad (7)$$

где

$$M_x = \bar{q}_x \bar{M} = \oint_S (y T_{nz} - z T_{ny}) dS; \quad (8)$$

$$M_y = \bar{q}_y \bar{M} = \oint_S (z T_{nx} - x T_{nz}) dS; \quad (9)$$

$$M_z = \bar{q}_z \bar{M} = \oint_S (x T_{ny} - y T_{nx}) dS. \quad (10)$$

Здесь  $T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}$  – компоненты тензора натяжений по осям системы координат.

Объединив полевую задачу (2) с цепной (3), (4), получим цепно-полевую модель машины постоянного тока. Дополним систему (2)-(4) уравнением движения (5).

На основе разработанной математической модели выполнен расчет режима пуска МПТ МУН-2 с независимым возбуждением без нагрузки с последующим нагружением до номинального момента. В результате расчета получены следующие характеристики: частоты вращения якоря (рис.6), электромагнитного момента двигателя (рис.7), тока в обмотке якоря (рис.8), тока в обмотке возбуждения (рис.9), потокосцепления секции обмотки якоря (рис.10), э.д.с. секции обмотки якоря (рис.11). На рис.12-15 представлены графики распределения магнитного потенциала и магнитной индукции в сечении МПТ для моментов времени 0,001с и 0,2с.

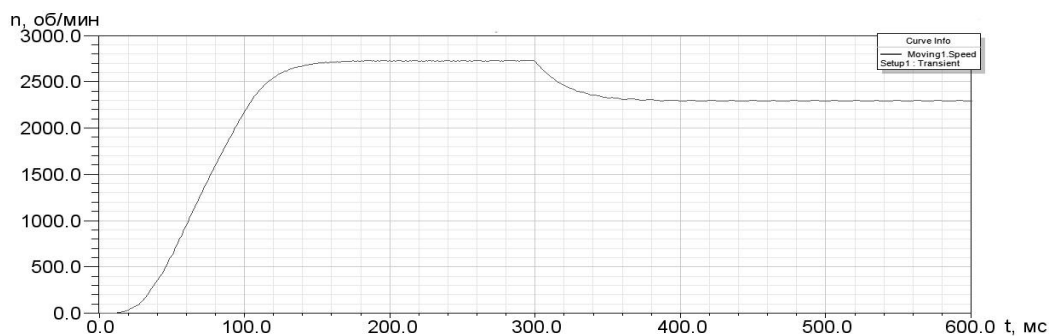


Рисунок 6 – Частота вращения МПТ

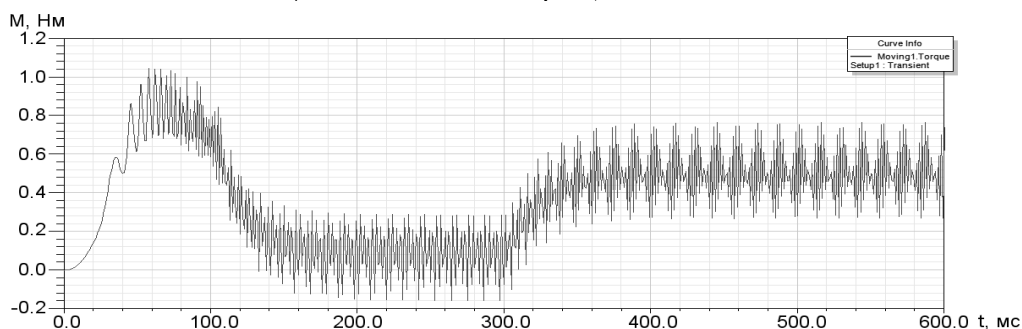


Рисунок 7 – Электромагнитный момент двигателя

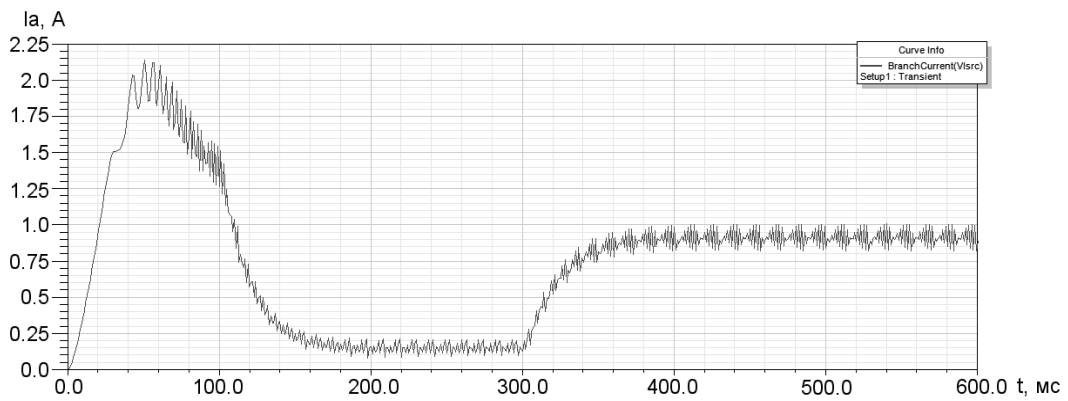


Рисунок 8 – Ток в обмотке якоря

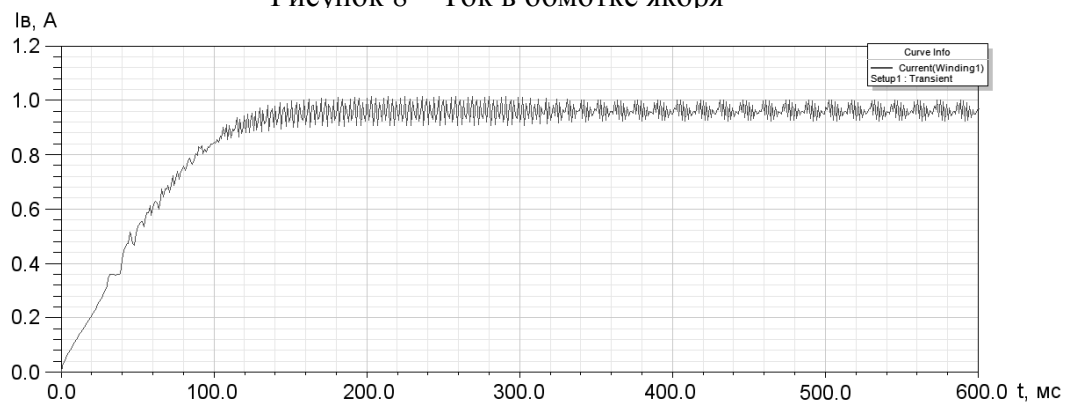


Рисунок 9 – Ток в обмотке возбуждения

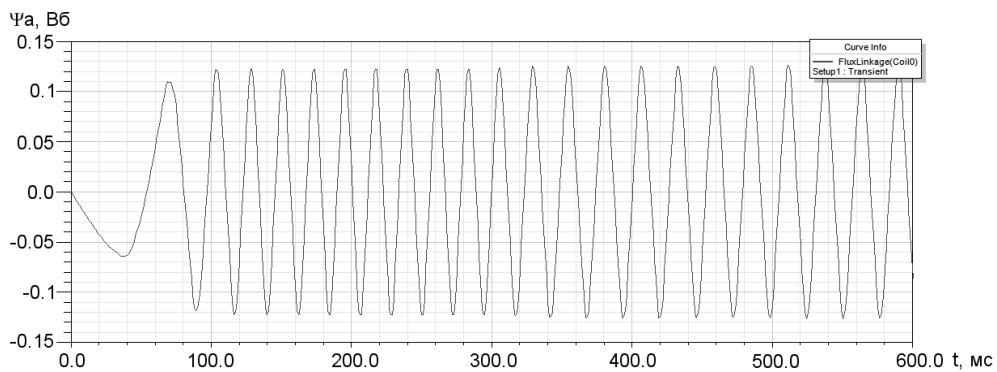


Рисунок 10 – Потокосцепление ветви обмотки якоря

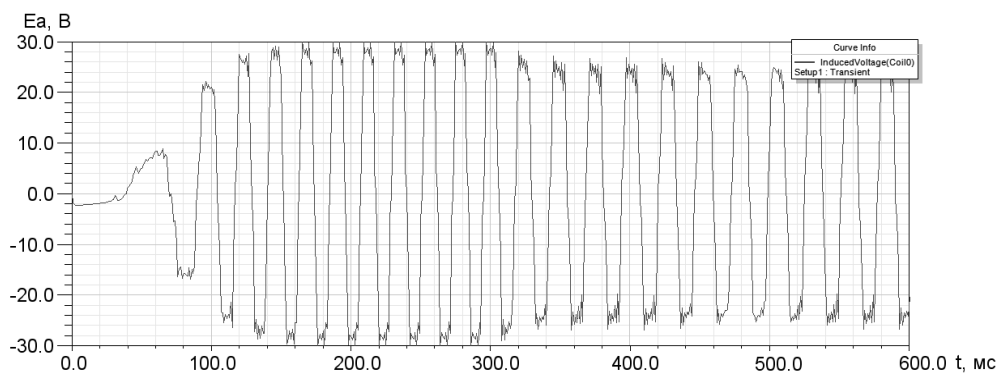


Рисунок 11 – Электродвижущая сила, наводимая в секции обмотки якоря

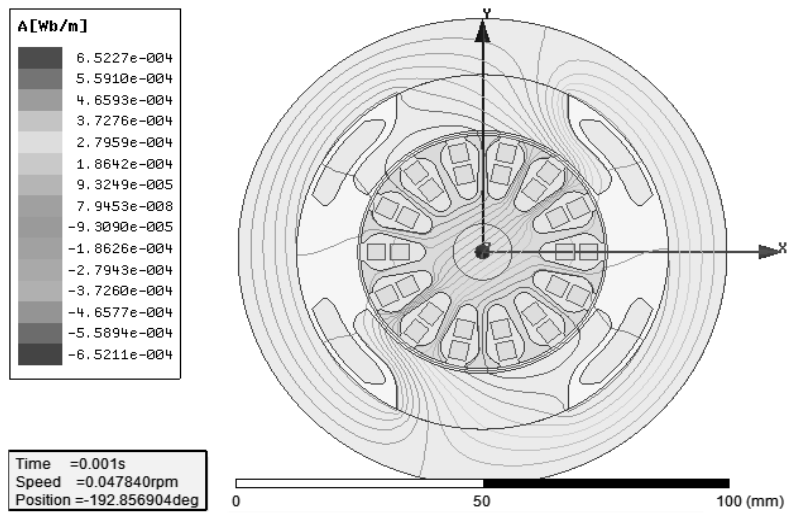


Рисунок 12 – Распределение векторного магнитного потенциала МПТ при  $t = 0,001c$

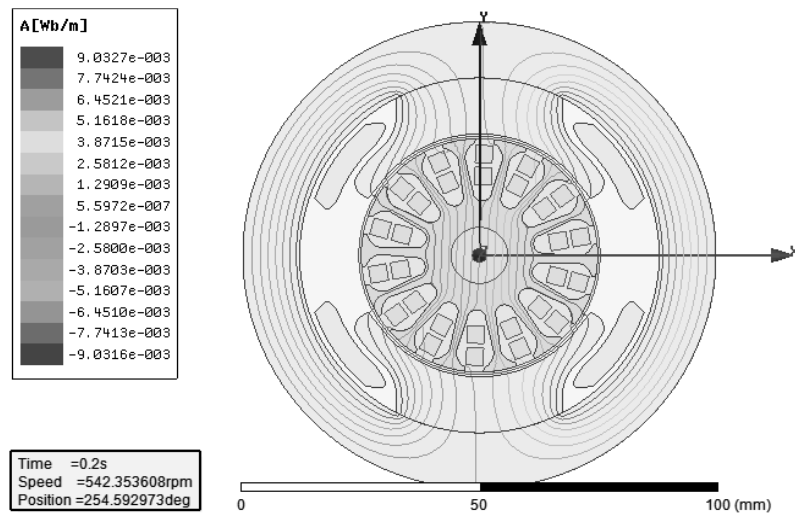


Рисунок 13 – Распределение векторного магнитного потенциала МПТ при  $t = 0,2c$

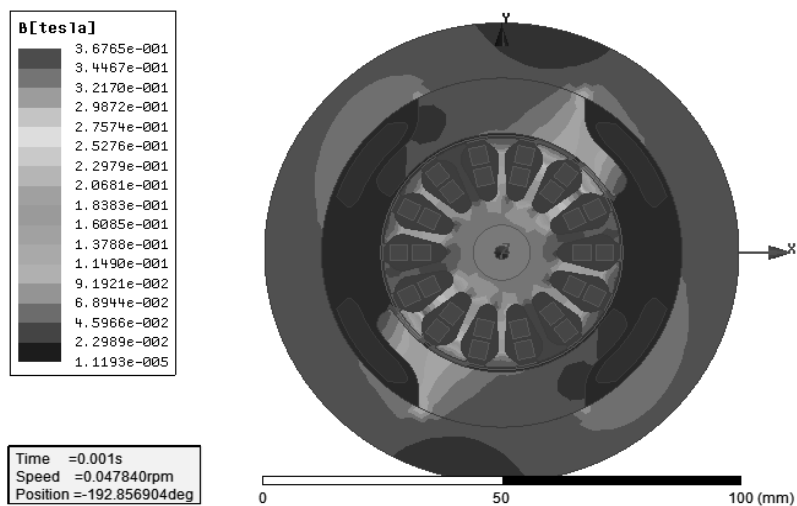


Рисунок 14 – Распределение магнитной индукции МПТ при  $t = 0,001c$

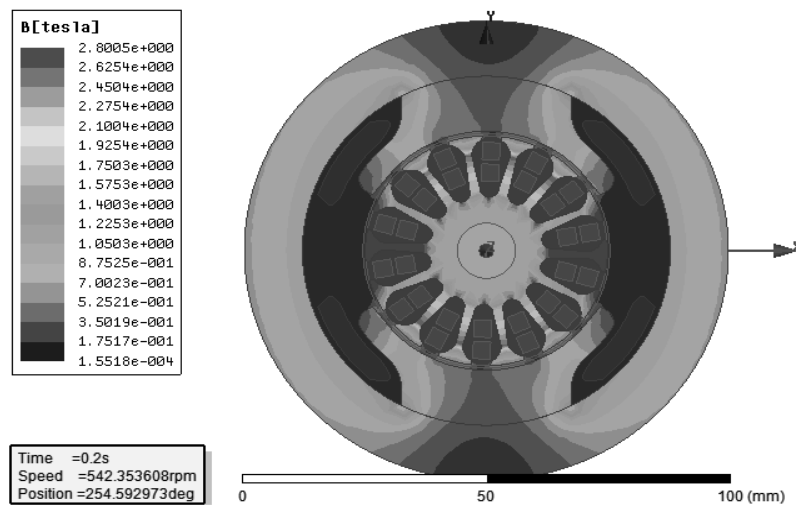


Рисунок 15 – Распределение магнитной индукции МПТ при  $t = 0,2$  с

**Выводы.** На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы: 1) выполнен поверочный расчет МПТ МУН-2 с модифицированной системой возбуждения на основе МКЭ, который позволяет исследовать характеристики и электромагнитные параметры МПТ с учетом новых конструктивных решений в динамических режимах работы; 2) полевая модель МПТ может быть объединена с цепной моделью источника питания на основе совместного решения уравнений поля и цепей, что позволяет исследовать характеристики двигателя в различных режимах при питании якорной обмотки сигналами любой формы; 3) установлено, что двигатель достигает максимальной скорости вращения через 300 мс с напряжением на якорной обмотке 160 В. При этом наблюдается бросок пускового тока якоря до 2,0 А с последующей стабилизацией на уровне 0,15 А, а пусковой момент достигает 0,8 Нм; 4) при набросе номинальной нагрузки МУН-2 выходит на номинальную частоту вращения, что сопровождается ростом тока в обмотке якоря до 0,9 А; 5) в процессе работы двигателя в обмотке якоря индуцируется электродвижущая сила, которая при достижении двигателем номинальной скорости вращения стабилизируется на уровне 24 В и имеет пиковый характер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг О.Д. Проектирование электрических машин: учебник для втузов / О.Д.Гольдберг, Я.С.Гурин, И.С.Свириденко. – М.: Высшая школа, 1984. – 431с.
2. Проектирование электрических машин: учебник для вузов / И.П.Копылов, Б.К.Клоков, В.П.Морозкин, Б.Ф.Токарев; под ред. И.П.Копылова. – М.: Высшая школа, 2011. – 767с.
3. Кацман М.М. Расчет и конструирование электрических машин: учеб. пособ. для техникумов / М.М.Кацман. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 360с.
4. Гурин Я.С. Проектирование серий электрических машин / Я.С.Гурин, Б.И.Кузнецов. – М.: Энергия, 1978. – 480с.
5. Качура, О.В. Курсове проектування двигунів постійного струму з дисципліни "Електричні машини": навчальний посібник / О. В. Качура, О. М. С'янов. - Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. - 255 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О.Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541с.



7. Качура А. В. Разработка математической модели вентильного реактивного двигателя на основе метода конечных элементов для систем точного позиционирования / А.В.Качура, А.М.Съянов // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2015. – Вип. 1. – С.87-93.
8. Иванов-Смоленский А.В. Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах: учеб. пособ. для вузов по спец. „Электромеханіка” / А.В.Иванов-Смоленский. – М.: Высшая школа, 1989. – 312с.
9. Zienkiewicz O.C. Finite elements in the solution of field problems / O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung // The Engineer. – 1965. – №24. – С.507-510.
10. Тиховод С.М. Метод ускоренного численного расчета переходных процессов в электрических цепях на основе аппроксимации решения алгебраическими полиномами / С.М.Тиховод, Т.М.Корнус, Д.Г.Паталах // Електротехніка та електроенергетика. – 2015. – №2. – С.48-54.
11. Silvester P. Finite element solution of homogeneous waveguide problems / P.Silvester // Alia Frequenza. – 1969. – №38. – С.313-317.

Поступила в редколлегию 24.04.2018.

УДК 621.35

DOI 10.31319/2519-2884.32.2018.170

ПРОЦЕНКО А.В., к.х.н., доцент  
ТРИКИЛО А.И., к.т.н., доцент  
МУСИЕНКО К.А., к.т.н., доцент  
КОЛЫЧЕВ С.В., к.т.н., доцент  
ТКАЛЕНКО Д.А.\*, д.т.н., профес-

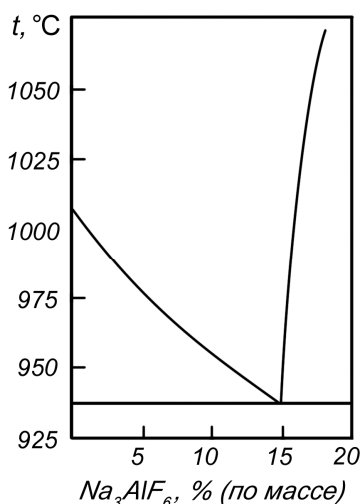
сор

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское  
\*Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев

## АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ВЕРСИЯ О ПРИРОДЕ АНОДНОГО ЭФФЕКТА ПРИ ЭЛЕКТРОЛИЗЕ КРИОЛИТО-ГЛИНОЗЕМНЫХ РАСПЛАВОВ

**Введение.** Анодный эффект как аномальное явление в электрохимии впервые был обнаружен при электролитическом выделении алюминия из криолито-глиноземного расплава [1]. Этот эффект играет важную роль в процессе промышленного получения алюминия, поэтому исследованию его природы и причин появления уделялось достаточно большое внимание.

В настоящее время практически весь алюминий получают электролизом криолито-глиноземного расплава при температуре 950°C в гальваностатическом режиме [1-3]. Электролит представляет собой высокотемпературный раствор  $Al_2O_3$  в  $Na_3AlF_6$ . Как сле-



80  
Рисунок 1 – Фрагмент диаграммы плавкости системы криолит-глинозем