УДК 530.12 DOI 10.31319/2519-2884.36.2020.19

САМОХВАЛОВ С.Є., д.т.н., професор
ГРИЩЕНКО А.А., магістр, аспірант

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

КВАЗІЛОКАЛЬНІСТЬ КАЛІБРУВАЛЬНИХ ЗАРЯДІВ

Вступ. Всі відомі в наш час фундаментальні взаємодії є калібрувальними. Це означає, що рівняння, якими вони описуються, симетричні відносно відповідних калібрувальних груп. З іншого боку, згідно з теоремою Е.Ньотер [1] кожній симетрії відповідає величина, що зберігається. Для калібрувальних симетрій це так звані калібрувальні заряди. Важливою властивістю зарядів є квазілокальність [2], яка означає, що струм даного заряду виражається через дивергенцію антисиметричного тензора, який називається його суперпотенціалом. Це забезпечує „голографічність заряду, тобто можливість визначення його сумарної величини, обмеженої двовимірною поверхнею, через значення суперпотенціалу на поверхні. В роботі [3] доведено, що в калібрувальних теоріях з лагранжіанами, в яких польові змінні мають максимум перший порядок похідних, а інфінітезимальні перетворення залежать максимум від перших похідних від калібрувальних параметрів, калібрувальні заряди квазілокальні.

Постановка задачі. Узагальнити результати роботи [3] на випадок довільних порядків похідних.

Результати роботи. Хай на просторово-часовому многовиді M з координатами x^{μ} задано систему полів $q^I(x)$ і дію

$$S = \int L(q, \partial q \dots \partial^{(n)} q) dx \,, \tag{1}$$

де L – лагранжіан, який залежить від полів і їх похідних до n-го порядку включно, а dx – форма координатного об'єму. Розглянемо інфінітезимальні перетворення координат і полів

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \,, \quad q'^I(x) = q^I(x) + \delta q^I \,,$$

при яких дія здобуває доданок $\bar{\delta} S = \int \delta' L dx$, де $\delta' L = L'(x')J - L(x)$ – інтегральна варіація лагранжіану, причому $L'(x')$ означає лагранжіан, підрахований для полів q' в точці x', J – якобіан перетворення $x'(x)$. Безпосереднім варіюванням одержуємо:

$$\delta' L = [L]_I \delta q^I + \partial_{\sigma} \overline{W}^{\sigma} \,, \quad \overline{W}^{\sigma} = W^{\sigma} + L \delta x^{\sigma} \,, \tag{2}$$

де

$$[L]_I := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \partial^{(k)}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \partial_I^{\sigma_1 \dots \sigma_k} L = \partial_I L - \partial_{\sigma} \partial_I^{\sigma} L + \partial^{(2)}_{\sigma \rho} \partial_I^{\sigma \rho} L - \dots \tag{3}$$

– варіаційні похідні лагранжіану L по полях q^I,

$$W^{\sigma} := \sum_{k=0}^{n-1} [L]_I^{\nu_1 \dots \nu_k \sigma} \partial^{(k)}_{\nu_1 \dots \nu_k} \delta q^I = [L]_I^{\sigma} \delta q^I + [L]_I^{\nu \sigma} \partial_{\nu} \delta q^I + \dots \,, \tag{4}$$

де, в свою чергу,

$$[L]_I^{\nu_1 \dots \nu_l} := \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^k \partial^{(k)}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \partial_I^{\nu_1 \dots \nu_l \sigma_1 \dots \sigma_k} L = \partial_I^{\nu_1 \dots \nu_l} L - \partial_{\sigma} \partial_I^{\nu_1 \dots \nu_l \sigma} L + \dots \tag{5}$$

– варіаційні похідні лагранжіану L по похідним від полів $\partial^{(l)}_{\nu_1 .. \nu_l} q^I$. Тут використано по-
значення $\partial_\sigma := \partial / \partial x^\sigma$, $\partial^{(k)}_{\sigma_1 ... \sigma_k} := \partial^{(k)} / \partial x^{\sigma_1} ... \partial x^{\sigma_k}$, $\partial_I^{\sigma_1 .. \sigma_k} := \partial / \partial^{(k)}_{\sigma_1 .. \sigma_k} q^I$. Очевидно з (5) випливає (3) при $l = 0$.

Хай задано узагальнену калібрувальну групу G_M^g, інфінітезимальна дія якої задається формулами:

$$\delta x^\mu = h_a^\mu g^a , \tag{6}$$

$$\delta q^I = \sum_{p=0}^{m} a^{I\,\mu_1 ... \mu_p}_{a} \partial^{(p)}_{\mu_1 ... \mu_p} g^a = a^I{}_a g^a + a^{I\,\mu}_{a} \partial_\mu g^a + ... , \tag{7}$$

де h_a^μ і $a^{I\,\mu_1 ... \mu_s}_{a}$ – функції від x^μ і $q^I(x)$, що конкретизують дію групи G_M^g на M, а $g^a(x)$ – інфінітезимальні параметри групи G_M^g. В цьому випадку функції $\overline{W}^\sigma$, що визначають інтегральну варіацію лагранжіана (2), виражаються через параметри групи G_M^g і їх похідні:

$$\overline{W}^\sigma = - \sum_{p=0}^{m+n-1} J_a^{\mu_1 ... \mu_p \sigma} \partial^{(p)}_{\mu_1 ... \mu_p} g^a , \tag{8}$$

де при $p = 0$

$$J_a^\sigma := - \sum_{k=0}^{n-1} [L]_I^{\nu_1 ... \nu_k \sigma} \partial^{(k)}_{\nu_1 .. \nu_k} a^I{}_a - L h_a^\sigma , \tag{9}$$

а для $p > 0$

$$J_a^{\mu_1 ... \mu_p \sigma} := - \sum_{l=p-m}^{p} \sum_{k=l}^{n-1} C_k^l [L]_I^{\{\mu_1 ... \mu_l | \nu_{l+1} ... \nu_k \sigma} \partial^{(k-l)}_{\nu_{l+1} .. \nu_k} a^{I | \mu_{l+1} ... \mu_p \}}_{a} . \tag{10}$$

Тут C_k^l – біноміальні коефіцієнти, а круглі дужки означають симетризацію по індексах, що в них містяться, за винятком індексів, виділених вертикальними рисками. З виразу (10) безпосередньо випливає:

$$J_a^{\mu_1 ... \mu_p \sigma} = J_a^{\{\mu_1 ... \mu_p\} \sigma} . \tag{11}$$

Величини $J_a^{\mu_1 ... \mu_p \sigma}$, що задаються виразом (10), будемо називати *струмами* p *-го порядку*.

Окрім струму 0-го порядку J_a^σ (надалі часто просто струму), який задається виразом (9), випишемо вирази струмів першого і другого порядків, які будуть важливими нам надалі:

$$J_a^{\mu\sigma} = - \sum_{k=0}^{n-1} [L]_I^{\nu_1 .. \nu_k \sigma} \partial^{(k)}_{\nu_1 .. \nu_k} a^{I\,\mu}_{a} - \sum_{k=1}^{n-1} k [L]_I^{\mu \nu_2 ... \nu_k \sigma} \partial^{(k-1)}_{\nu_2 .. \nu_k} a^I{}_a , \tag{12}$$

$$J_a^{\mu\rho\sigma} = - \sum_{k=0}^{n-1} [L]_I^{\nu_1 .. \nu_k \sigma} \partial^{(k)}_{\nu_1 .. \nu_k} a^{I\,\mu\rho}_{a} - \sum_{k=1}^{n-1} k [L]_I^{\{\mu | \nu_2 ... \nu_k \sigma} \partial^{(k-1)}_{\nu_2 .. \nu_k} a^{I | \rho\}}_{a} -$$

$$-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k-1)}{2}[L]_I^{\mu\rho\nu_3\ldots\nu_k\sigma}\partial^{(k-2)}_{\nu_3\ldots\nu_k}a^I_a\,. \tag{13}$$

Безпосередньо з означення (8) випливає:

$$\partial_\sigma\overline{W}^\sigma=-\sum_{p=0}^{m+n}S_a^{\mu_1\ldots\mu_p}\partial^{(p)}_{\mu_1\ldots\mu_p}g^a\,, \tag{14}$$

де

$$S_a^{\mu_1\ldots\mu_p}:=J_a^{\mu_1\ldots\mu_p}+\partial_\sigma J_a^{\mu_1\ldots\mu_p\sigma}\,. \tag{15}$$

Властивість (11) дає властивість

$$S_a^{\mu_1\ldots\mu_p\sigma}=S_a^{\{\mu_1\ldots\mu_p\}\sigma}\,. \tag{16}$$

Величини $S_a^{\mu_1\ldots\mu_p\sigma}$, що задаються виразом (15), будемо називати *суперпотенціалами p-го порядку*, а суперпотенціали першого порядку далі просто – суперпотенціалами.

Припустимо тепер, що дія S інваріантна відносно перетворень (6), (7) групи G_M^g. Умовою G_M^g-симетрії дії S є $\delta' L=0$, звідки, з врахуванням (2), випливає $[L]_I\delta q^I=-\partial_\sigma\overline{W}^\sigma$, отже з врахуванням (7) та (14) одержуємо:

$$\sum_{p=0}^{m}[L]_I\,a_a^{I\,\mu_1\ldots\mu_p}\partial^{(p)}_{\mu_1\ldots\mu_p}g^a=\sum_{p=0}^{m+n}S_a^{\mu_1\ldots\mu_p}\partial^{(p)}_{\mu_1\ldots\mu_p}g^a\,, \tag{17}$$

що завдяки довільності функцій $g^a(x)$, які параметризують групу G_M^g, дає:

I $\quad [L]_I\,a_a^{I\,\mu_1\ldots\mu_p}=S_a^{\{\mu_1\ldots\mu_p\}} \qquad 0\le p\le m\,;$ (18)

II $\quad S_a^{\{\mu_1\ldots\mu_p\}}=0 \qquad m<p\le m+n\,.$ (19)

Остання рівність, з врахуванням властивості (16), зводиться до антисиметричності суперпотенціалів за останніми двома індексами:

II $\quad S_a^{\mu_1\ldots\{\mu_{p-1}\mu_p\}}=0\,.$ (20)

On shell $[L]_I=0$ співвідношення (20) виконується $\forall p$.

Для $p=m+n$ маємо:

$$S_a^{\mu_1\ldots\mu_p}=J_a^{\mu_1\ldots\mu_p}\,, \tag{21}$$

отже

$$S_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}}=J_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}}+\partial_\sigma S_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}\sigma}\,. \tag{22}$$

Оскільки має місце тотожність (20), з (22) одержуємо:

$$\partial_{p-1}S_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}}=\partial_{p-1}J_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}}\,, \tag{23}$$

отже і для наступного меншого p має місце рівність, аналогічна (22):

$$S_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-2}}=J_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-2}}+\partial_\sigma S_a^{\mu_1\ldots\mu_{p-2}\sigma}\,. \tag{24}$$

По індукції доводимо, що це справедливо $\forall p$, зокрема:

$$S_a^{\mu} = J_a^{\mu} + \partial_\sigma S_a^{\mu\sigma} = 0\,, \qquad (25)$$

$$\partial_\sigma J_a^{\sigma} = 0\,. \qquad (26)$$

Величину J_a^{μ} будемо називати струмом, а $S_a^{\mu\sigma}$ – його суперпотенціалом. Внаслідок (26) калібрувальні заряди $Q_a = \int_V J_a^0 dV$, пов'язані зі струмами J_a^{σ}, зберігаються $\partial_0 Q_a = 0$ (тут x^0 – часова координата, а dV – форма тривимірного об'єму V).

Отже справедливо наступне.

Теорема. *В калібрувальній теорії групи G_M^g калібрувальні заряди Q_a квазілокальні, тобто їх струми J_a^{μ} мають суперпотенціали $S_a^{\mu\nu} = J_a^{\mu\nu} + \partial_\sigma J_a^{\mu\nu\sigma} = -S_a^{\nu\mu}$:*

$$J_a^{\mu} = -\partial_\sigma S_a^{\mu\sigma}\,. \qquad (27)$$

Конкретизуємо одержані співвідношення для $m = 1$. В цьому випадку

$$\delta q^I = a^I_{\ a} g^a + b^{I\mu}_{\ a} \partial_\mu g^a \qquad (28)$$

(тут коефіцієнти $a^{I\mu}_{\ a}$ з формули (7) позначено як $b^{I\mu}_{\ a}$).

$$\begin{aligned} J_a^{\mu_1 \ldots \mu_p \sigma} = &-\sum_{k=p-1}^{n-1} C_k^{p-1} [L]_I^{\{\mu_1 \ldots \mu_{p-1} | \nu_p \ldots \nu_k \sigma} \partial^{(k-p+1)}_{\nu_p \ldots \nu_k} b^{I | \mu_p\}}_{\ a} \\ &- \sum_{k=p}^{n-1} C_k^{p} [L]_I^{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_{p+1} \ldots \nu_k \sigma} \partial^{(k-p)}_{\nu_{p+1} \ldots \nu_k} a^I_{\ a} \end{aligned}, \qquad (29)$$

зокрема

$$J_a^{\mu\sigma} = -\sum_{k=0}^{n-1} [L]_I^{\nu_1 \ldots \nu_k \sigma} \partial^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_k} b^{I\mu}_{\ a} - \sum_{k=1}^{n-1} k\, [L]_I^{\mu \nu_2 \ldots \nu_k \sigma} \partial^{(k-1)}_{\nu_2 \ldots \nu_k} a^I_{\ a}\,; \qquad (30)$$

$$J_a^{\mu\rho\sigma} = -\sum_{k=1}^{n-1} k\, [L]_I^{\{\mu | \nu_2 \ldots \nu_k \sigma} \partial^{(k-1)}_{\nu_2 \ldots \nu_k} b^{I|\rho\}}_{\ a} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} [L]_I^{\mu\rho\nu_3 \ldots \nu_k \sigma} \partial^{(k-2)}_{\nu_3 \ldots \nu_k} a^I_{\ a} \qquad (31)$$

(вираз (9) для струму J_a^{σ} залишається без змін).

Тотожності (18), (20) в нашому випадку записуються наступним чином:

I $\quad [L]_I\, a^I_{\ a} = \partial_\sigma J_a^{\sigma}\,;$ (32)

II $\quad [L]_I\, b^{I\mu}_{\ a} = J_a^{\mu} + \partial_\sigma S_a^{\mu\sigma}\,;$ (33)

III $\quad S_a^{\mu\nu} = J_a^{\mu\nu} + \partial_\sigma J_a^{\mu\nu\sigma} = -S_a^{\nu\mu}\,.$ (34)

Тотожність (33) дозволяє виразити струм через варіаційні похідні лагранжіана та дивергенцію суперпотенціалу:

$$J_a^{\mu} = [L]_I\, b^{I\mu}_{\ a} - \partial_\sigma S_a^{\mu\sigma}\,, \qquad (35)$$

а також дивергенцію струму через лінійну комбінацію варіаційних похідних лагранжіану і похідних від них:

$$\partial_\sigma J_a^{\sigma} = [L]_I\, \partial_\sigma b^{I\sigma}_{\ a} + \partial_\sigma [L]_I\, b^{I\sigma}_{\ a}\,, \qquad (36)$$

що з врахуванням тотожності (32) дозволяє записати тотожність

$$[L]_I (a^I_a - \partial_\sigma b^{I\sigma}_a) - \partial_\sigma [L]_I b^{I\sigma}_a = 0 . \qquad (37)$$

Якщо лагранжіан залежить максимум від перших похідних від полів, тобто при $n = 1$, маємо:

$$J^\sigma_a = -\partial^\sigma_I L a^I_a - L h^\sigma_a , \qquad (38)$$

$$S^{\mu\sigma}_a = J^{\mu\sigma}_a = -\partial^\sigma_I L b^{I\mu}_a , \qquad (39)$$

а формула (35) спрощується до

$$J^\mu_a = \partial_I L b^{I\mu}_a + \partial^\sigma_I L \partial_\sigma b^{I\mu}_a . \qquad (40)$$

Висновки. Доведена теорема і спосіб її доведення дають алгоритм побудови струмів калібрувальних зарядів, а також їх суперпотенціалів для широкого кола теорій з калібрувальними симетріями. Найбільш цікаві і практично важливі приклади таких теорій ми плануємо розглянути в подальшому.

ЛІТЕРАТУРА

1. Noether E. Invariant variation problems. *Transport theory and statistical physics*. 1971. № 1(3). P.183-207.
2. Szabados L.B. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in GR: A review article. *Living rev. relativity*. 2004. № 4. P.1-140.
3. Самохвалов С.Є. Теоретико-групове підґрунтя голографічного принципу. *Математичне моделювання*, 2010. № 2(23). С.7-11.

Надійшла до редколегії 27.05.2020.

УДК 681.3

DOI 10.31319/2519-2884.36.2020.20

ЛИСЕНКО Г.Л., к.т.н., професор
КУЗЬМЕНКО Л.В., аспірантка

Вінницький національний технічний університет

ХЕШУВАННЯ ДАНИХ ОПТОЕЛЕКТРОННОГО ПРИСТРОЮ НА ОСНОВІ ОПТИЧНО-КЕРОВАНИХ ТРАНСПАРАНТІВ З НАБОРОМ ЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ ДЛЯ РОБОТИ З МАСИВАМИ ДАНИХ

Вступ. Станом на сьогодні в сфері інформаційних технологій має місце збільшення як об'єму даних, що підлягають обробці, так і зростання складності алгоритмів обробки. Для першої складової характерним є збільшення кількості компонентів, що описують дані, їх розмірність та розрядність, взаємозв'язок між різними компонентами даних тощо. Друга складова пов'язана з відображенням більш «тонких» взаємозалежнос-тей між даними та моделлю, яка використовується. Зростання обох складових призводить до значного збільшення часу отримання результату обчислень. Тому важливим є збільшення швидкості оброблення цієї інформації. Одним з ефективних методів, що доз-воляють реалізовувати збільшення швидкості обробки інформації, є метод паралельного одночасного обчислення групи даних, представлених у вигляді матриці. Реалізація цих методів обробки можлива на багатопроцесорних комп'ютерах, масивно-паралельних структурах, конвеєрних пристроях та інших спеціалізованих обчислювачах, які виконують такі функції. Проте вони мають недостатню швидкодію для обробки великорозмірних масивів даних, що пов'язано з обмеженими можливостями електрон-