УДК 517.93

Олександр Кільчинський,
Тетяна Крижановська,
Тетяна Семененко

ЗАДАЧА ПРО ЕЛІПТИЧНУ УПАКОВКУ

Розглянуто наближений метод розв'зування однієї із задач кластеризації – пошуку найщільнішої упаковки достатньо великої ємності. Потреби в таких дослідженнях виникають в медицині і екології, геофізиці й астрофізиці, дефектоскопі тощо . [1]***. Комплексні дослідження етіологічних чинників токсемії на базі еліптичних кластерів (відносно обмеженої ємностії) точними методами розглядалися в роботі*** [2]***.***

Рассмотрен приближенный метод решения одной из задач кластеризации – поиск наиболее плотной достаточно емкой упаковки. Потребности в таких исследованиях возникают в медицине и экологии, геофизике и астрофизике, дефектоскопии и т. д. [1]***. Комплексные исследования этиологических причин токсемии на основе эллиптических кластеров (относительно небольшой емкости) точными методами рассматривались в работе*** [2]***.***

The close method of decision of one of tasks of clusterization - search of the most dense capacious enough packing is considered. Requirements in such researches arise up in medicine and ecology, geophysics and astrophysics, fault detection and m. of d. [1]***. Complex researches of etiologic reasons of токсемии on the basis of elliptic clusters (relatively small capacities) exact in-process*** [2]***.***

Вступ. На перший погляд задача пошуку еліптичних кластерів виглядає оманливо простою. Насправді ж – навіть при невеликій кількості $(\mathrm{n} \geq 3)$ елементів кластеризації її розв'язання складає доволі не просту математичну проблему. З ростом числа n розв'язування суттєво ускладнюється і потребує великої кількості обчислювальних операцій. У руслі проблем [1],[2] нас зацікавила розробка наближених методів, що спрощують процедуру кластеризації і придатні для практичних застосувань при пошуку багатомісних кластерів.

Постановка задачі. Нехай точкові прояви досліджуваної властивості об'єкта задано *n*-елементною множиною $M = \{\mathrm{M_i}\}$, яка складається з точок $\mathrm{M_i}(x_i; y_i)$ на площині Oxy. Треба скласти рівняння еліпса найменшої площі (*K*-еліпса), що містить у собі всі точки $\mathrm{M_i}$.

Надалі цю задачу називатимемо задачею про еліптичну упаковку, або про еліптичний кластер. Центр *K*-еліпса можна трактувати як можливе джерело, а головні осі – як пріоритетні напрямки розповсюдження цих проявів.

Припустимо,що центр *K*-еліпса міститься у точці $O'(x_0; y_0)$, а головні осі $O'x'$, $O'y'$ складають з віссю Ox кути φ та $\varphi + \frac{\pi}{2}$ (відповідно) так, що $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ і мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} x' = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi, \\ y' = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi, \end{cases} \tag{1}$$

де $$\dot{x} = x - x_0, \dot{y} = y - y_0. \tag{2}$$

В системі Oxy *K*-еліпс задається рівнянням:

$$K\!: \ \frac{(\dot{x} + k\dot{y})^2}{a^2} + \frac{(\dot{y} - k\dot{x})^2}{b^2} = 1 + k^2, \tag{3}$$

де a, b – півосі еліпса, k – кутовий коефіцієнт осі $O'x'$: $k = \operatorname{tg}\varphi > 0$. Оскільки площа S еліпса (3) обчислюється за формулою $S = \pi ab$, то задачу про еліптичну упаковку можна сформулювати як задачу математичного програмування з п’ятьма керованими змінними $x_0, y_0, \mathrm{k}, \mathrm{u}, \mathrm{v}$:

$$\begin{cases} \mathrm{z} = \mathrm{uv} \to \max, & (4) \\ (\dot{x}_i + k\dot{y}_i)^2 u + (\dot{y}_i - k\dot{x}_i)^2 v \le 1 + k^2 \quad (i = \overline{1;n}), & (5) \\ u, v, k \ge 0, & (6) \end{cases}$$

де $$\dot{x}_i = x_i - x_0,\ \dot{y}_i = y_i - y_0,\ u = a^{-2},\ v = b^{-2},\ M(x_i; y_i) \in Q. \tag{7}$$

У загальному випадку задача (4) – (6) є достатньо складною. Її точний розв’язок можна знайти, якщо діяти за такою схемою:

1) замінити обмеження-нерівності (5) відповідними обмеженнями-рівностями;

2) скласти та розв’язати $\mathrm{N} = \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^4 + \mathrm{C}_n^5$ задач на пошук $\max \mathrm{z}$, в яких перебираються усі можливі комбінації з трьох, чотирьох та п’яти обмежень-рівностей;

3) вибрати серед знайдених розв’язків той, якому відповідає найбільше значення $\max \mathrm{z}$ і при цьому задовольняються усі обмеження-нерівності (5).

Виходячи зі специфіки досліджуваних властивостей, задачу кластерізації доводиться розглядати у двох постановках (***П₁*** і ***П₂***). У постановці ***П₁*** приймемо, що центр та напрямки головних осей *K*-еліпса цілком визначаються опуклою оболонкою M' точок множини M (такий еліпс назвемо спостереженим). У постановці ***П₂*** приймемо, що центр та напрямки головних осей *K*-еліпса визначаються точками усієї множини M (не тільки оболонкою), що може знадобитись при вивченні історії виникнення та поширення кластерної зони (такий еліпс назвемо прогнозованим).

Метод розв’язування. В обох постановках задачу (4) – (6) будемо розв’язувати наближено в два етапи.

I етап. Головні осі еліпса ($O'x'$ та $O'y'$) еліпса знайдемо як прямі:

$$B_j\!: \quad y = k_j x + h_j \quad (j = 1;2), \tag{8}$$

на яких сума квадратів відхилень від усіх точок множини M, тобто функція:

$$\Delta = \Delta(\mathrm{k},\mathrm{h}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - kx_i - h}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2, \tag{9}$$

приймає екстремальне значення. Параметри $\mathrm{k}_1, k_2, h_1, h_2$ знайдемо як точки екстремуму функції (9) з умов:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial \mathrm{k}} = 0,\ \frac{\partial\Delta}{\partial \mathrm{h}} = 0. \tag{10}$$

Центр $O'(x_0; y_0)$ еліпса визначимо як точку перетину прямих B_1, B_2. Задовольняючи умовам (10), знайдемо:

$$\mathrm{h}_\mathrm{j} = \bar{y} - k_\mathrm{j}\bar{x},\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\quad \mathrm{x}_0 = \bar{x},\quad \mathrm{y}_0 = \bar{y}. \tag{11}$$

Кутові коефіцієнти k_1, k_2 є коренями квадратного рівняння:

$$K_{xy}(k^2 - 1) + (D_y - D_x)k = 0, \tag{12}$$

$$D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2,\ D_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i^2,\ K_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \dot{y}_i. \tag{13}$$

Розв’язуючи рівняння (12), знайдемо:

$$\mathrm{k}_{1,2} = t \pm \sqrt{t^2+1},\ t = \frac{D_y - D_x}{2K_{xy}}, \tag{14}$$

Тобто прямі B_1 і B_2 є взаємно перпендикулярними ($\mathrm{k}_1\,\mathrm{k}_2 = -1$). Для кутового коефіцієнта осі $O'x'$ (прямої B_1) матимемо:

$$k = \mathrm{k}_1 = t + \sqrt{t^2+1}. \tag{15}$$

II етап. За формулами (11) і (15) виключимо значення x_0, y_0, k з нерівностей (5) і розв’яжемо нову (вже спрощену) задачу математичного програмування з двома керованими змінними u, v та лінійними обмеженнями-нерівностями:

$$\begin{cases} z = uv \to \max, & (16)\\ \dfrac{u}{a_i} + \dfrac{v}{b_i} \le 1 \quad (i = \overline{1;n}), & (17)\\ u, v \ge 0, & (18)\end{cases}$$

де

$$a_i = \frac{1+k^2}{(\dot{x}_i + k\dot{y}_i)^2},\ b_i = \frac{1+k^2}{(\dot{y}_i - k\dot{x}_i)^2}. \tag{19}$$

Областю допустимих розв’язків для задачі (16) – (18) є опуклий багатокутник *D*, що утворюється при перетині *n* + 2 півплощин, обмежених прямими l_i ($i = \overline{0; n+1}$) на площині *Ouv*:

$$l_0 : u = 0,\quad l_{n+1} : v = 0,\quad l_i : \frac{u}{a_i} + \frac{v}{b_i} = 1\ (i = \overline{1;n}). \tag{20}$$

Межа багатокутника *D* складається з відрізків прямих (20). Вершинами цього багатокутника є ті з точок $\mathrm{P}_{\mathrm{ij}}(u_{ij}; v_{ij})$ перетину прямих l_i та l_j, координати яких задовольняють обмеженням (17),(18). Координати точок P_{ij} можна знайти за формулами:

$$u_{ij} = u_{ji}; v_{ij} = v_{ji}; \ u_{i0} = 0, \ v_{i0} = b_i; \ u_{in+1} = a_i, \ v_{in+1} = 0; \qquad (21)$$

$$u_{ij} = \frac{b_i - b_j}{p_i - p_j}, \ v_{ij} = \frac{a_i - a_j}{q_i - q_j}, \ p_k = \frac{b_k}{a_k}, \ q_k = \frac{a_k}{b_k} \quad (i, j, k = \overline{1;n}, \ i \neq j).$$

Алгоритм пошуку вершин $\mathrm{P}_{\mathrm{ij}} \in \boldsymbol{D}$

1) Просіємо множину $\mathrm{L} = \{l_i, \mathrm{i} = \overline{1;\mathrm{n}}\}$ прямих $l_i: \dfrac{u}{a_i} + \dfrac{v}{b_i} = 1$, вилучивши з неї кожну пряму l_k, яка домінує над деякою прямою l_j, тобто задовольняє нерівностям:

$$\begin{cases} a_k \geq a_j, \\ b_k \geq b_j. \end{cases} \qquad (22)$$

Відповідно до вилучених прямих (нехай їх кількість дорівнює r) зменшимо до величини $m = n - r$ кількість обмежень (17).

2) Елементи просіяної множини L' перенумеруємо в порядку зростання коефіцієнтів a_i і на її основі складемо реєстр $\mathrm{R} = \{l_i', \mathrm{i} = \overline{1;\mathrm{m}}\}$. За формулами (21) знайдемо всі точки $\mathrm{P}_{\mathrm{ij}}(u_{ij}; v_{ij})$ перетину прямих l_i', l_j' $(i, j = \overline{1;\mathrm{m}}, \ i \neq j)$. Точки P_{ij} розподілимо по множинах $\mathrm{L}_{\mathrm{s}} = \{\mathrm{P}_{sk} \in l_s', \ k = \overline{1;m}\}$; впорядкуємо ці множини по зростанню координати u точок P_{sk}.

3) Просіємо множини L_{s} $(s = \overline{1;m})$, вилучивши з усіх об'єднань $\mathrm{L}_{\mathrm{i}} \cup \mathrm{L}_{\mathrm{j}}$ $(i, j = \overline{1;\mathrm{m}}, \ i < j)$, точки $\mathrm{P}(u; v)$, що домінують над точками $\mathrm{P}_{\mathrm{ij}}(u_{ij}; v_{ij})$ тобто задовольняють умові:

$$\mathrm{P}(u; v) \in \overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{ij}} = \{P \in L_i \,|\, u < u_{ij}\} \cup \{P \in L_j \,|\, u > u_{ij}\}. \qquad (23)$$

Вершини багатокутника *D* визначимо як елементи просіяних множин L_{s}'.

Визначивши вершини багатокутника *D*, зведемо розв'язування задачі (16) – (18) до пошуку точки $\mathrm{P}^*(u^*; v^*) \in D$, в якій цільова функція $\mathrm{z} = uv$ досягає свого найбільшого значення z^*:

$$\mathrm{z}^* = \max \mathrm{z}\Big|_D = \mathrm{z}^*(\mathrm{P}^*) = u^* v^*. \qquad (24)$$

За властивостями цільової функції (16) її максимум може досягатись лише на межі багатокутника *D* (у вершинах P_{ij} або у внутрішніх точках межевих відрізків, що їх з'єднують). Значення цільової функції у вершинах $\mathrm{P}_{\mathrm{ij}}(u_{ij}; v_{ij})$ знайдемо у вигляді добутків:

$$\mathrm{z}(\mathrm{P}_{\mathrm{ij}}) = \mathrm{z}_{\mathrm{ij}} = u_{ij} v_{ij}; \qquad (25)$$

множники u_{ij}, v_{ij} обчислимо за формулами (21). Максимальні значення цільової функції у внутрішній точках межевих відрізків прямих l_i' існуть лише при умові, що відповідні їм точки $P_i(0{,}5a_i; 0{,}5b_i) \in D$; ці значення обчислюється за формулою

$$\max z\Big|_{l_i} = z_i = z\left(P_i^*\right) = 0{,}25 a_i b_i \quad (\text{якщо } P_i^* \in D). \qquad (26)$$

Значення $z^* = \max z\Big|_D$ отримаємо як найбільше серед чисел z_{ij} та z_i, що знаходяться за формулами (25),(26).

Якщо задачу (16) – (18) розв'язано і знайдено точку $P^*(u^*; v^*) \in D$, в якій цільова функція досягає свого найбільшого значення (24), то відповідно до співвідношень (7) півосі і площу *K*-еліпса обчислимо за формулами:

$$a = \frac{1}{\sqrt{u^*}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{v^*}}, \quad S = \frac{\pi}{\sqrt{u^* v^*}}. \qquad (27)$$

Центр еліпса знайдемо у точці $O'(x_0; y_0)$, її координати визначимо за формулами (11). Рівняння головних осей знайдемо у вигляді (8), значення коефіцієнтів h_1, h_2, k_1, k_2 визначимо за формулами (11),(13),(14).

Приклад розв'язування. Розв'яжемо задачу: *побудувати еліптичну упаковку* (*K*-еліпс) для множини $M = \{M_i\}$ точок $M_i(x_i; y_i)$ $(i = \overline{1;20})$, координати яких задано у табл. 1.

Таблиця 1. **Координати точок** $M_i(x_i; y_i)$ **у площині** *Oxy*

i	x_i	y_i	*i*	x_i	y_i
1	5	35	11	75	85
2	10	90	12	70	80
3	35	125	13	80	75
4	50	135	14	55	70
5	95	140	15	70	65
6	115	125	16	55	115
7	115	90	17	40	75
8	105	60	18	85	45
9	80	30	19	90	85
10	20	20	20	50	55

◄ 1) По даних табл.1 за формулами(11) – (15) (при *n* = 20) знайдемо

$$\bar{x} = 65, \quad \bar{y} = 80, \quad k = 1{,}156968477 \approx 1{,}157.$$

2) За формулами (7), (11) та (19) обчислимо величини a_i, b_i відрізків, що відтинаються прямими l_i $(i = \overline{1;20})$ на координатних осях площини *Ouv*; результати зведемо у табл. 2.

Таблиця 2. **Відрізки, що відтинаються прямими** l_i **на осях** *Ou, Ov*

i	a_i	b_i	i	a_i	b_i
1	7,252	$1{,}778\cdot 10^{-4}$	11	$2{,}369\cdot 10^{-1}$	$8{,}280\cdot 10^{-3}$
2	$5{,}895\cdot 10^{-4}$	$7{,}000\cdot 10^{-4}$	12	$1{,}097\cdot 10^{-1}$	$6{,}297\cdot 10^{-2}$
3	$3{,}431\cdot 10^{-4}$	$9{,}367\cdot 10^{-2}$	13	$5{,}877\cdot 10^{-3}$	$1{,}252\cdot 10^{-2}$
4	$3{,}574\cdot 10^{-4}$	$2{,}212\cdot 10^{-3}$	14	$2.683\cdot 10^{-1}$	$5{,}095\cdot 10^{-3}$
5	$1{,}133\cdot 10^{-3}$	$2{,}764\cdot 10^{-4}$	15	$4{,}459\cdot 10^{-3}$	$3{,}884\cdot 10^{-2}$
6	$3{,}113\cdot 10^{-2}$	$2{,}226\cdot 10^{-4}$	16	$1{,}231\cdot 10^{-3}$	$5{,}767\cdot 10^{-3}$
7	$2{,}024\cdot 10^{-3}$	$4{,}748\cdot 10^{-4}$	17	$8{,}096\cdot 10^{-3}$	$1{,}899\cdot 10^{-3}$
8	$6{,}219\cdot 10^{-4}$	$2{,}550\cdot 10^{-3}$	18	$6{,}258\cdot 10^{-4}$	$3{,}701\cdot 10^{-2}$
9	$4{,}180\cdot 10^{-4}$	$3{,}005\cdot 10^{-3}$	19	$8{,}096\cdot 10^{-3}$	$1{,}899\cdot 10^{-3}$
10	$2{,}347\cdot 10^{-3}$	$1{,}924\cdot 10^{-4}$	20	$8{,}469\cdot 10^{-3}$	$1{,}366\cdot 10^{-3}$

3) Просіємо множину $\mathrm{L} = \{l_i, \mathrm{i} = \overline{1;20}\}$ прямих l_i, вилучивши з неї кожну пряму l_k, яка домінує над деякою прямою l_j, тобто задовольняє нерівностям (22). Отримаємо просіяну множину $\mathrm{L}' = \{l_2, l_3, l_4, l_8, l_9, l_{10}\}$.
4) Елементи просіяної множини L' перенумеруємо в порядку зростання коефіцієнтів a_i і на її основі складемо реєстр $\mathrm{R} = \{l'_i, \mathrm{i} = \overline{1;6}\}$. Перенумерацію здійснимо за схемою: $l_3 \to l'_1$, $l_4 \to l'_2$, $l_2 \to l'_3$, $l_5 \to l'_4$, $l_{10} \to l'_5$, $l_1 \to l'_6$.
За формулами (21) знайдемо всі точки $\mathrm{P_{ij}}$ перетину реєстрових прямих l'_i, l'_j; результати подамо у табл. 3.

Точки $\mathrm{P_{ij}}$ розподілимо по множинах $\mathrm{L_s} = \{\mathrm{P}_{sk} \in l'_s,\ k = \overline{1;6}\}$; впорядкуємо ці множини по зростанню координати u точок P_{sk}. Співставляючи табличні значення величини u_{ij}, складемо шість множин:
$\mathrm{L}_1 = \{\mathrm{P}_{13};\mathrm{P}_{14};\mathrm{P}_{16};\mathrm{P}_{15};\mathrm{P}_{12}\}$, $\mathrm{L}_2 = \{\mathrm{P}_{23};\mathrm{P}_{24};\mathrm{P}_{26};\mathrm{P}_{25};\mathrm{P}_{12}\}$, $\mathrm{L}_3 = \{\mathrm{P}_{23};\mathrm{P}_{13};\mathrm{P}_{36};\mathrm{P}_{34};\mathrm{P}_{35}\}$, $\mathrm{L}_4 = \{\mathrm{P}_{24};\mathrm{P}_{14};\mathrm{P}_{46};\mathrm{P}_{34};\mathrm{P}_{45}\}$, $\mathrm{L}_5 = \{\mathrm{P}_{56};\mathrm{P}_{25};\mathrm{P}_{15};\mathrm{P}_{35};\mathrm{P}_{45}\}$, $\mathrm{L}_6 = \{\mathrm{P}_{56};\mathrm{P}_{26};\mathrm{P}_{16};\mathrm{P}_{46};\mathrm{P}_{36}\}$.
5) Просіємо множини $\mathrm{L_s}$ $(s = \overline{1;6})$, вилучивши з усіх об'єднань $\mathrm{L_i} \cup \mathrm{L_j}$ $(i, j = \overline{1;6},\ i < j)$, точки $\mathrm{P}(u;v)$, що домінують над точками $\mathrm{P_{ij}}(u_{ij};v_{ij})$ тобто виходять за межі області *D* (задовольняють умові (23)). Пересвідчимось, що межею області *D* є багатокутник з вершинами в точках $\mathrm{P}_{12}(u_{12};v_{12})$, $\mathrm{P}_{25}(u_{25};v_{25})$, $\mathrm{P}_{56}(u_{56};v_{56})$, O(0;0), $\mathrm{P}_{06}(0;\mathrm{b}_6)$ та $\mathrm{P}_{17}(\mathrm{a}_1;0)$.
6) Проведемо необхідні обчислення і з допомогою формул (25),(26) знайдемо, що найбільше значення цільової функції досягається в точці P_{25}: $\mathrm{z}^* = \mathrm{z}^*(\mathrm{P}_{25}) = u_{25}v_{25} = 5{,}465\cdot 10^{-8}$, $u^* = u_{25} = 3{,}307\cdot 10^{-4}$, $v^* = v_{25} = 1{,}652\cdot 10^{-4}$.

Таблиця 3. **Координати точок** $P_{ij}(u_{ij}; v_{ij})$ **у площині** *Ouv*

u_{ij}	v_{ij}
$u_{12} = 3{,}428 \cdot 10^{-4}$	$v_{12} = 9{,}040 \cdot 10^{-5}$
$u_{13} = 3{,}421 \cdot 10^{-4}$	$v_{13} = 2{,}938 \cdot 10^{-4}$
$u_{14} = 3{,}424 \cdot 10^{-4}$	$v_{14} = 1{,}929 \cdot 10^{-4}$
$u_{15} = 3{,}425 \cdot 10^{-4}$	$v_{15} = 1{,}643 \cdot 10^{-4}$
$u_{16} = 3{,}425 \cdot 10^{-4}$	$v_{16} = 1{,}778 \cdot 10^{-4}$
$u_{23} = 3{,}023 \cdot 10^{-4}$	$v_{23} = 3{,}410 \cdot 10^{-4}$
$u_{24} = 3{,}256 \cdot 10^{-4}$	$v_{24} = 1{,}970 \cdot 10^{-4}$
$u_{25} = 3{,}307 \cdot 10^{-4}$	$v_{25} = 1{,}652 \cdot 10^{-4}$
$u_{26} = 3{,}287 \cdot 10^{-4}$	$v_{26} = 1{,}778 \cdot 10^{-4}$
$u_{34} = 4{,}489 \cdot 10^{-4}$	$v_{34} = 1{,}669 \cdot 10^{-4}$
$u_{35} = 4{,}592 \cdot 10^{-4}$	$v_{35} = 1{,}547 \cdot 10^{-4}$
$u_{36} = 4{,}398 \cdot 10^{-4}$	$v_{36} = 1{,}778 \cdot 10^{-4}$
$u_{45} = 5{,}193 \cdot 10^{-4}$	$v_{45} = 1{,}498 \cdot 10^{-4}$
$u_{46} = 4{,}045 \cdot 10^{-4}$	$v_{46} = 1{,}778 \cdot 10^{-4}$
$u_{56} = !{,}778 \cdot 10^{-4}$	$v_{56} = 1{,}778 \cdot 10^{-4}$

7) За формулами (27) визначимо півосі та площу еліпса:

$$a = 54{,}99, \quad b = 77{,}79, \quad S = 1{,}344 \cdot 10^4 \text{ кв. од.};$$

за формулами (11) обчислимо координати центра $O'(x_0; y_0)$:

$$x_0 = 65, \quad y_0 = 80;$$

за формулами (8), (11), (13) і (14) знайдемо кутові коефіцієнти та рівняння головних осей $O'u, O'v$ (або прямих B_1, B_2) еліпса:

$$k_1 = 1{,}320, \quad k_2 = -7{,}578 \cdot 10^{-1}, \quad B_j: \; y_j = y_0 + k_j(x - x_0) \quad (j = 1; 2). \; \blacktriangleright$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Тихонов А .Н., Арсенин Б. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. – М.: Наука, 1987. – 159 с.
2. *Шкуліпа О. В., Рублев Б .В.* Кластерізація медичних даних на основі побудови еліпса мінімальної площі. / Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. М. Кравчука; т.3. – К.: НТУУ, 2010. – 120 с.