УДК 624.15.001

А.В. Шаповал, к.т.н., доцент
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры
В.Г. Шаповал, д.т.н., профессор
ГВУЗ «Национальный горный университет», г. Днепропетровск

МЕТОД ОБЪЕМНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предложена модификация метода граничных элементов, позволяющая решать плоские и пространственные задачи геомеханики для случаев конечных и бесконечных размеров расчетной области.

Ключевые слова: *метод объемных граничных элементов, напряженно-деформированное состояние, грунтовое основание.*

А.В. Шаповал, к.т.н., доцент
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури
В.Г. Шаповал, д.т.н., професор
ДВНЗ «Національний гірничий університет», м. Дніпропетровськ

МЕТОД ОБ'ЄМНИХ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Запропоновано модифікацію методу граничних елементів, що дозволяє розв'язувати плоскі та просторові задачі геомеханіки для випадків скінченних і нескінченних розмірів розрахункової області.

Ключові слова: *метод об'ємних граничних елементів, напружено-деформований стан, ґрунтова основа.*

A.V. Shapoval, Ph.D.
Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture
V.G. Shapoval, Prof., DrSc.
National Mining University, Dnipropetrovsk

THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY ELEMENTS METHOD

A modification of the boundary element method (BEM) solving two- and three-dimensional geomechanical problems for cases of finite and infinite calculation area dimensions is proposed.

Keywords: *three-dimensional boundary element method, stress-strain state (SSS), the foundation soil.*

Введение. Необходимость прогноза напряженно-деформированного состояния (НДС) систем «грунтовое основание – свайные фундаменты», «грунтовое основание – фундаменты глубокого заложения», «грунтовое основание – заглубленное сооружение» и им подобных весьма часто возникает в инженерной практике.

В настоящее время для этой цели используют метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. В этом случае имеет место проблема негативного влияния на точность определения НДС ограниченных размеров расчетной области основания.

При этом широкому применению для практических расчетов классического метода граничных элементов (МГЭ) (в данном случае мы имеем дело с внешней задачей) мешает громоздкость необходимых для составления матрицы влияния вычислений [3, 4].

Обзор последних источников исследований и публикаций. Решению задач механики грунтов и горных пород МКЭ и МГЭ посвящено большое количество работ [1 – 4]. Их суть заключается в следующем.

1. При расчете грунтовых оснований МКЭ вся расчетная область разбивается на участки, которые взаимодействуют друг с другом через узловые точки (рис. 1, *а*). Внешняя нагрузка в виде сосредоточенных сил прикладывается к этим узлам [1, 2].

2. При расчете грунтовых оснований МГЭ граница расчетной области разбивается на линейные или плоские участки (рис 1, *б*). Распределенная внешняя нагрузка прикладывается к этим участкам [3, 4].

Выделение не решенных ранее частей общей проблемы. Идея предлагаемого нами метода объемных граничных элементов (МОГЭ) заключается в том, что некоторая ограниченная подобласть в общем случае неограниченного основания (а не все основание) разбивается на объемные элементы (рис. 1, *в*), [1, 2]. При этом объемная внешняя нагрузка прикладывается внутри этих элементов.

Цель работы – разработка и обоснование алгоритма определения НДС грунтового основания МОГЭ.

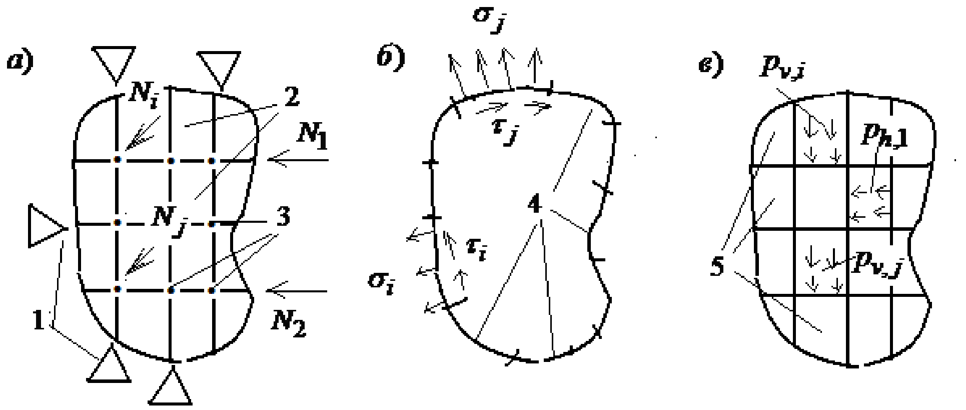

Рис. 1. Схемы разбивки основания в ходе определения его НДС на конечные (а), граничные (б) и объемные граничные (в) элементы: 1 – связи; 2 – конечные элементы; 3 – узлы; 4 – граничные элементы; 5 – объемные граничные элементы; N_1, N_2, N_i, N_{pj} – узловые силы (имеют размерность, кН); σ_i, σ_j, τ_i, τ_j – нормальная и касательная распределенные нагрузки (имеют размерность, кН/м^2); p_{vi}, p_{vj}, p_{h1} – нормальная и горизонтальная объемные нагрузки (имеют размерность, кН/м^3)

Задача исследований была сформулирована так:

I. Прямая задача.

1. Внутри основания находится некоторая ограниченная подобласть. Вертикальные (W) и горизонтальные перемещения (U и V) ее точек известны заранее.

2. Известна геометрия данной области и ее границы.

3. Известны свойства грунтового основания.

4. Требуется определить НДС основания.

Представленная выше формулировка имеет такие интерпретации.

II. Обратная задача.

1. Внутри основания находится некоторая ограниченная подобласть. Вертикальные (p_z) и горизонтальные объемные напряжения (p_x и p_y) внутри этой области известны заранее.

2. Известна геометрия данной области и ее границы.

3. Известны свойства грунтового основания.

4. Требуется определить НДС основания.

III. Смешанная задача.

1. Внутри основания находится некоторая ограниченная подобласть. В некоторой ее части заранее известны вертикальные (p_z) и горизонтальные объемные напряжения (p_x и p_y). При этом в оставшейся части данной области заранее известны вертикальные (U_z) и горизонтальные перемещения (U_x и U_y) ее точек.

2. Известна геометрия данной области и ее границы.

3. Известны свойства грунтового основания.

4. Требуется определить НДС основания.

Ввиду ограниченности данной статьи рассмотрим только лишь первый вариант задачи.

При этом для простоты изложения материала исследований рассмотрим модель основания в виде линейной упругой изотропной среды.

Кроме того, ограничимся декартовой системой координат.

Основной материал и результаты. Суть предлагаемого алгоритма определения НДС грунтовых оснований заключается в следующем:

1. Вначале следует выделить в полупространстве (это также могут быть пространство, плоскость, полуплоскость и т.д.) область, внутри которой известны вертикальные и горизонтальные перемещения (рис. 1, *в*).

Для определенности обозначим векторы этих перемещений так:

- вертикальные (в направлении оси $0z$) перемещения – $\bar{U}_z$;
- горизонтальные (в направлении оси $0x$) перемещения – $\bar{U}_x$;
- горизонтальные (в направлении оси $0y$) перемещения – $\bar{U}_y$.

2. После этого следует разбить эту область на конечное число объемных элементов n.

3. Внутри каждого из элементов необходимо поочередно приложить единичные объемные нагрузки, действующие в направлении осей $0x$, $0y$ и $0z$. Обозначим эти нагрузки p_x, p_y и p_z.

4. Далее рассмотрим перемещения *j*-того объемного элемента под воздействием действующего внутри *i*-того объемного элемента объемной нагрузки p_z. Поскольку под воздействием вертикальной нагрузки

одновременно возникают перемещения в направлении координатных осей $0x$, $0y$ и $0z$, обозначим их соответственно B_{ij}^{zz}, B_{ij}^{zx} *и* B_{ij}^{zy}.

Запись B_{ij}^{zz} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0z$ под воздействием действующего внутри i-того объемного элемента объемной нагрузки p_z.

Запись B_{ij}^{zx} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0x$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_z.

Запись B_{ij}^{zy} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0y$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_z.

5. После этого рассмотрим перемещения j-го объемного элемента под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_x. Поскольку под воздействием горизонтальной нагрузки одновременно возникают перемещения в направлении координатных осей $0x$, $0y$ и $0z$, обозначим их соответственно B_{ij}^{xz}, B_{ij}^{xx} *и* B_{ij}^{xy}.

Запись B_{ij}^{xz} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0z$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_x.

Запись B_{ij}^{xx} означает, что рассматривается перемещение j-го объемного элемента в направлении оси $0x$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_x.

Запись B_{ij}^{xy} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0y$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_x.

6. Далее рассмотрим перемещения j-го объемного элемента под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_y. Поскольку под воздействием горизонтальной нагрузки одновременно возникают перемещения в направлении координатных осей $0x$, $0y$ и $0z$, обозначим их соответственно B_{ij}^{yz}, B_{ij}^{yx} *и* B_{ij}^{yy}.

Запись B_{ij}^{yz} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0z$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_y.

Запись B_{ij}^{yx} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0x$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_y.

Запись B_{ij}^{yy} означает, что рассматривается перемещение центра j-го объемного элемента в направлении оси $0y$ под воздействием действующего внутри i-го объемного элемента объемной нагрузки p_y.

7. Теперь можем составить уравнения, необходимые для определения неизвестных объемных сил. Имеем:

7.1. Перемещения в направлении оси $0z$ равны

$$\left|B_{ij}^{zz}\right| \cdot \bar{p}_z + \left|B_{ij}^{xz}\right| \cdot \bar{p}_x + \left|B_{ij}^{yz}\right| \cdot \bar{p}_y = \bar{U}_z. \tag{1}$$

7.2. Перемещения в направлении оси $0x$ равны

$$\left|B_{ij}^{zx}\right| \cdot \bar{p}_z + \left|B_{ij}^{xx}\right| \cdot \bar{p}_x + \left|B_{ij}^{yx}\right| \cdot \bar{p}_y = \bar{U}_x. \tag{2}$$

7.3. Перемещения в направлении оси $0y$ равны

$$\left|B_{ij}^{zy}\right| \cdot \bar{p}_z + \left|B_{ij}^{xy}\right| \cdot \bar{p}_x + \left|B_{ij}^{yy}\right| \cdot \bar{p}_y = \bar{U}_y. \tag{3}$$

Окончательно для определения векторов неизвестных объемных сил мы имеем такую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\left|B_{ij}^{zz}\right| \cdot \bar{p}_z + \left|B_{ij}^{xz}\right| \cdot \bar{p}_x + \left|B_{ij}^{yz}\right| \cdot \bar{p}_y = \bar{U}_z; \\ &\left|B_{ij}^{zx}\right| \cdot \bar{p}_z + \left|B_{ij}^{xx}\right| \cdot \bar{p}_x + \left|B_{ij}^{yx}\right| \cdot \bar{p}_y = \bar{U}_x; \\ &\left|B_{ij}^{zy}\right| \cdot \bar{p}_z + \left|B_{ij}^{xy}\right| \cdot \bar{p}_x + \left|B_{ij}^{yy}\right| \cdot \bar{p}_y = \bar{U}_y. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

8. Окончательное решение задачи следует находить путем приложения к расчетной подобласти установленной в ходе решения системы уравнений (4).

9. Обычно вертикальные деформации оснований, обусловленные горизонтальными нагрузками, значительно меньше деформаций, обусловленных вертикальными нагрузками (т.е. влиянием напряжений p_x и p_y на вертикальные осадки основания можно пренебречь). В этом случае система уравнений (4) примет вид

$$\left|B_{ij}^{zz}\right| \cdot \bar{p}_z = \bar{U}_z. \tag{5}$$

10. Для определения функций влияния B_{ij} в зависимости от решаемой задачи следует использовать известные решения Кельвина, Миндлина [6] или [7], заменив в них сосредоточенные силы их дифференциалами и выполнив интегрирование по объему граничного элемента.

В общем случае расчетная формула имеет вид

$$B_{ij}=\iiint\limits_{V} N\left(x-\xi, y-\eta, z-\chi\right)\cdot d\xi\cdot d\eta\cdot d\chi, \qquad (6)$$

где $N\left(x,y,z\right)$ – фундаментальное решение о вертикальной или горизонтальной сосредоточенной силе, приложенной внутри основания; ξ, η, χ – имеющие размерность длины параметры; V – область, внутри которой выполняется интегрирование.

Выводы. Изложенные в настоящей работе материалы исследований позволили нам сделать такие выводы:

1. Для решения задач геомеханики предложен МОГЭ.

2. Отличие предлагаемого метода от классического МГЭ заключается в том, что в нашем случае граничные элементы имеют вид объемных, а не плоских (в случае пространственной задачи) или плоских, а не линейных (в случае плоской задачи).

3. Отличие предлагаемого метода от классического МКЭ заключается в том, что в нашем случае на конечные элементы разбивается не вся расчетная область, а лишь только ее ограниченная часть.

4. Достоинством предлагаемого метода по сравнению с классическим МКЭ является значительное сокращение вычислений и возможность удовлетворения граничных условий на бесконечности.

5. Достоинством предлагаемого метода решения задач геомеханики по сравнению с классическим МГЭ является отсутствие необходимости вычисления фиктивных напряжений, выполнения правил обхода контуров и т.д. При этом данный метод имеет четкий физический смысл.

6. Область применения предлагаемого метода – определение НДС оснований свайных фундаментов и фундаментов глубокого заложения, а также НДС оснований заглубленных и подземных сооружений.

Литература

1. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

2. Бойко, І.П. Чисельне моделювання взаємодії фундаментів з ґрунтовою основою на зсувонебезпечних територіях / І.П. Бойко // Світ геотехніки. – 2008 – № 1.– С. 13 – 17.

3. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

4. Моргун, А.С. Метод граничних елементів у розрахунках буронабивних паль / А.С. Моргун. – Вінниця: ВНТУ, 2011. – 108 с.

5. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 840 с.

6. Флорин, В.А. Основы механики грунтов / В.А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1959. – Т. 1. – 357 с.

7. Напряженно-деформированное состояние грунтового полупространства, внутри которого приложена осесимметричная распределенная нагрузка: монография / А.В. Шаповал, Б.В. Моркляник, В.С. Андреев, В.Г. Шаповал, В.И. Кабрель. – Днепропетровск: Пороги, 2011 – 94 с.

Надійшла до редакції 01.10.2013