УДК 624.016.001.2

# НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О КРИТЕРИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

**Кандидаты техн. наук Ю.П. Китов, Г.Л. Ватуля, М.А. Веревичева**

# ДЕЯКІ МІРКУВАННЯ ЩОДО КРИТЕРІЇВ ОПТИМАЛЬНОСТІ

**Кандидати техн. наук Ю.П. Кітов, Г.Л. Ватуля, М.А. Веревічева**

# SOME CONSIDERATIONS ON THE CRITERIA OF OPTIMALITY

**Candidates of techn. sciences Y.P. Kitov, G.L.Vatulia, M.A. Verevicheva**

*В последнее время в качестве одного из подходов к формированию рациональных конструкций, помимо классического критерия (минимум объема или веса), используется подход, в основе которого лежат энергетические принципы (минимум потенциальной энергии деформации). В статье сравниваются результаты оптимизации по двум указанным критериям на примере стержневой конструкции (фермы).*

***Ключевые слова:*** *оптимизация, целевая функция, ограничения, объем, потенциальная энергия.*

*Останнім часом як один з підходів до формування раціональних конструкцій, окрім класичного критерію (мінімум об'єму або ваги), використовується підхід, в основі якого лежать енергетичні принципи (мінімум потенційної енергії деформації). У статті порів-нюються результати оптимізації за двома вказаними критеріями на прикладі стержневої конструкції (ферми).*

***Ключові слова:*** *оптимізація, цільова функція, обмеження, об'єм, потенційна енергія*.

*Lately as one of methods of rational constructions formation, besides a classic criterion (a minimum of volume or weight), is assumed the approach based on power principles (a minimum of potential energy of deformation). In the article the authors provide the comparison of optimization result on examples of bridge truss.*

***Keywords***: *Optimization, objective function, limitations, volume, potential energy.*

**Постановка задачи в общем виде**. В практике строительства необходимо использовать эффективные строительные конструкции. Для этого постоянно совершенствуются критерии и методы оптимизации как в общем виде, так и применительно к расчетным схемам.

**Обзор последних исследований.** Классическими критериями оптимальности конструкций из одного материала являются объем либо вес [1 – 4]. Если же конструкция состоит из различных материалов, например, из стали и бетона, то критерием считается стоимость.

Наряду с этим в качестве одного из подходов используется критерий минимальности потенциальной энергии деформации [5, 6]. Правомерность такого подхода обосновывается [6] следующим образом. Рассмотрим напряжения и потенциальную энергию для двух случаев напряженного состояния – сжатия и изгиба элементов, приведенных на рис. 1.

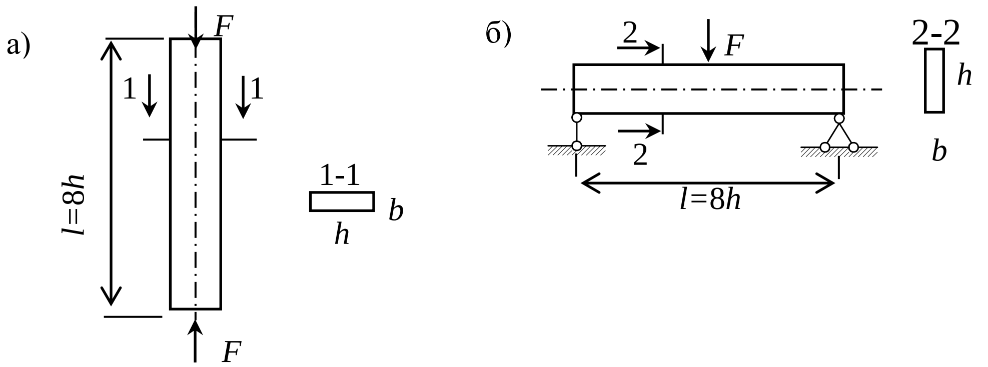


Рис. 1. Деформируемые элементы: а) сжатый, б) изогнутый

Соответствующие напряжения равны

$$\sigma_{\text{с}} = -\frac{F}{bh}, \;\; \sigma_{\text{и}} = \pm 12\frac{F}{bh},$$

т. е. напряжение в элементе при изгибе в 12 раз больше напряжения при осевом сжатии.

Потенциальная энергия

$$U_{\text{с}} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}dx = \frac{1}{2}\frac{F^2 l}{Ebh} = \frac{4F^2}{Eb},$$

$$U_{\text{и}} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ}dx = \frac{64F^2}{Eb},$$

т. е. потенциальная энергия деформаций при изгибе в 16 раз больше, чем при сжатии. Очевидно, в обоих случаях, энергия деформаций является интегральной строго положительной величиной, отражающей уровень напряженно-деформированного состояния. Поэтому минимум потенциальной энергии деформаций можно принимать в качестве критерия рациональности конструкции.

**Цель исследований**. Цель работы – сравнить результаты оптимизации по двум указанным критериям (минимум объема и потенциальной энергии) на примере стержневой конструкции – фермы как элемента подмножества систем с заданной топологией.

**Постановка задачи.** Рассмотрим сначала гипотетический случай, когда все стержни системы испытывают только деформацию растяжения. Тогда потенциальная энергия системы

$$U=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i^2 l_i}{2EA_i}, \qquad (1)$$

где $n$ – количество элементов системы;

$l_i$ – длина $i$-го стержня;

$N_i$ – усилие в $i$-м стержне;

$A_i$ – площадь сечения $i$-го стержня;

$E$ – модуль упругости.

Площади сечения стержней определяются из условия прочности:

$$A_i \geq \frac{N_i}{mR_y}, \qquad (2)$$

где $mR_y$ – расчетное сопротивление материала стержня при растяжении.

Преобразуем выражение (1), умножив числитель и знаменатель на $A_i$. С учетом того, что $A_i l_i = V_i$ – объем материала $i$-го стержня, а отношение $\frac{N_i}{A_i}=mR_y$ согласно формуле (2), получим:

$$U=k\sum_{i=1}^{n}V_i=kV, \qquad (3)$$

где $V$ – объем материала всей конструкции;

$k$ – постоянный множитель,

$$k=\frac{\left(mR_y\right)^2}{2E}. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что при одних и тех же оптимальных значениях топологических переменных

$$\min U = k \min V, \qquad (5)$$

т. е. оптимальные проекты, найденные по критерию минимума объема и энергии, тождественны.

В действительности же в стержнях системы возникают как растягивающие, так и сжимающие усилия. Для сжатых стержней площади сечений определяются из условия устойчивости

$$A_i \geq \frac{N_i}{\varphi_i mR_y}, \qquad (6)$$

где $\varphi_i$ – коэффициент уменьшения основного расчетного сопротивления при растяжении, $\varphi_i \leq 1$.

Потенциальная энергия системы в этом случае выражается через объем материала следующим образом:

$$U=k\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2 V_i, \qquad (7)$$

где $V_i$ – объем $i$-го стержня с учетом формулы (6).

Из выражения (7) следует, что $\min U$ и $\min V$ достигаются при различных значениях геометрических параметров оптимизируемой системы. Таким образом, оптимальные системы, полученные из условий минимальности потенциальной энергии и минимальности объема, не совпадают. Исследуем, какая из них является более рациональной и в каком смысле.

**Сравнение двух оптимальных решений на примере фермы с одним оптимизируемым размером $y_1 \equiv y_{1-2}$** (рис. 2, а).

Ферма состоит из стальных стержней трубчатого сечения (рис. 2, б), $mR_y = 180$ МПа, длины стержней выражаются в метрах, площади сечений и объемы материала, соответственно, в сантиметрах квадратных и сантиметрах кубических. Усилия – в килоньютонах.

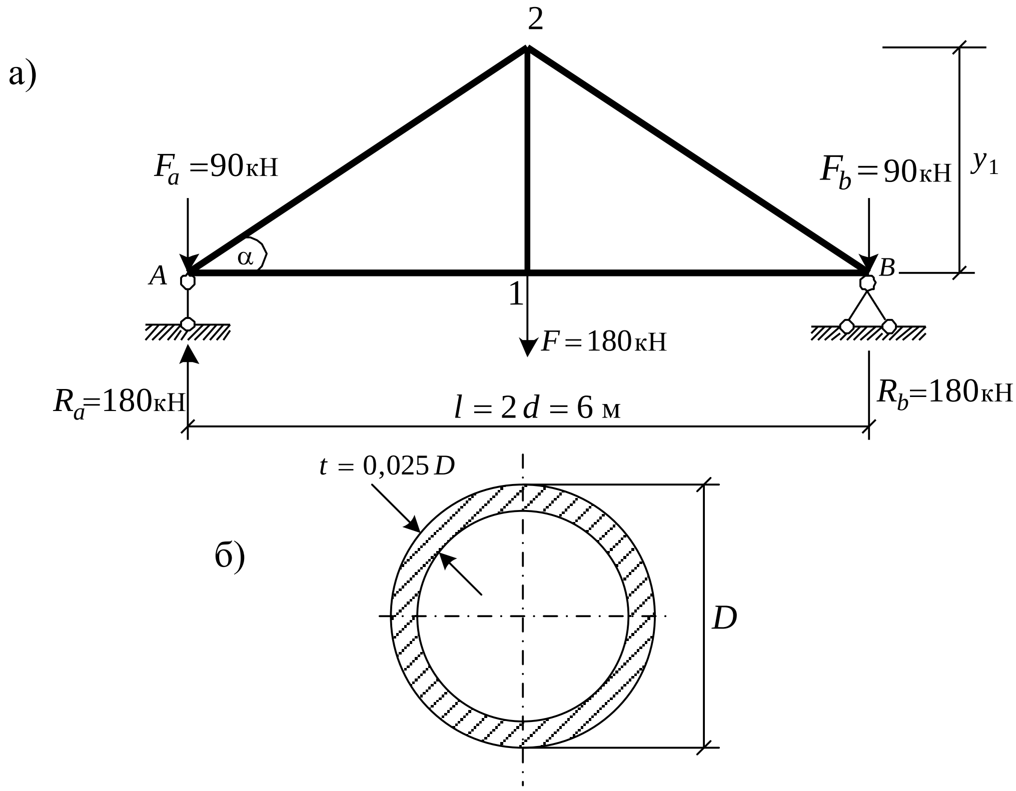


Рис. 2. Ферма: а – расчетная схема, б – трубчатое сечение стержня фермы

Геометрические характеристики сечения и гибкость элемента:

$$A = \frac{\pi}{4}\left[D^2 - (D - 2t)^2\right] = 0{,}07657632D^2, \quad J = \frac{\pi}{64}\left[D^4 - (D - 2t)^4\right],$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{0{,}11890635D^2} \approx 1{,}2461\sqrt{A}\ ; \quad \lambda = \frac{l}{i} = \frac{l}{1{,}2461\sqrt{A}}.$$

**1. Оптимизация размеров из условия минимизации объема материала фермы**

$$V(y_1) = 2\frac{|N_{A-2}(y_1)|l_{A-2}(y_1)}{\varphi_{A-2}(y_1)mR_y} + 2\frac{N_{A-1}(y_1)l_{A-1}(y_1)}{mR_y} + \frac{N_{1-2}(y_1)l_{1-2}(y_1)}{mR_y}, \tag{8}$$

где усилия определяются по формулам:

$$N_{A-2} = -\frac{R_a - F_a}{\sin\alpha} = -\frac{R_a - F_a}{y_1}\sqrt{d^2 + y_1^2} = -\frac{90\sqrt{9 + y_1^2}}{y_1}, \ l_{A-2} = \sqrt{d^2 + y_1^2}\ ;$$

$$N_{A-1} = -N_{A-2}\cos\alpha = \frac{R_a - F_a}{y_1}d = \frac{270}{y_1}, \ l_{A-1} = d\ ; \ N_{1-2} = 180\,\text{кН}, \ l_{1-2} = y_1,$$

площади сечений и гибкости:

$$A_{A-2} = \frac{|N_{A-2}|}{\varphi_{A-2}\, mR_y} \cdot 10, \quad \lambda_{A-2} = \frac{\sqrt{9 + y_1^2} \cdot 100}{m_1 \sqrt{A_{A-2}}}, \quad m_1 = 1{,}2461,$$

$$A_{A-1} = \frac{N_{A-1}}{\varphi_{A-2}\, mR_y} \cdot 10, \quad \lambda_{A-1} = \frac{100d}{m_1 \sqrt{A_{A-1}}},$$

$$A_{1-2} = \frac{N_{1-2}}{\varphi_{A-2}\, mR_y} \cdot 10, \quad \lambda_{1-2} = \frac{100 y_1}{m_1 \sqrt{A_{1-2}}}.$$

Окончательно получаем:

$$V(y_1) = \frac{180 \cdot 10^3}{mR_y} \left( \frac{9 + y_1^2}{\varphi_{A-2}(y_1) y_1} + \frac{9}{y_1} + y_1 \right). \tag{9}$$

Для вычисления коэффициента $\varphi$ в зависимости от гибкости $\lambda$ в интервале $60 \le \lambda \le 150$ используется выражение, полученное интерполяцией табличных данных [7]:

$$\varphi(\lambda) = 1{,}111 \cdot 10^{-6} \cdot \lambda_{\text{пр}}^3 - 1{,}389 \cdot 10^{-4} \lambda_{\text{пр}}^2 - 2{,}5 \cdot 10^{-3} \lambda_{\text{пр}} + 0{,}86, \tag{10}$$

$$\lambda_{\text{пр}} = \left( l / m_1 \sqrt{A} - 0{,}6 \right) \cdot 10^2,$$

где $l$ выражается в метрах.

В общем случае функцию (8), заданную аналитически, можно оптимизировать с помощью метода Ньютона [8], записав условия оптимальности. Определение площадей сечений сжатых стержней производилось методом последовательных приближений с использованием зависимости (10).

Получено минимальное значение $\min V$ и соответствующее значение переменной $y_1$:

$$y_1 = 2{,}32 \text{ м}, \quad \min V = 15026 \text{ см}^3.$$

**2. Оптимизация размеров фермы из условия минимизации потенциальной энергии**

Согласно выражениям (9), (7), получаем

$$U(y_1) = \frac{180 \cdot 10^3}{mR_y} \left( \frac{9 + y_1^2}{y_1} \varphi_{A-2}(y_1) + \frac{9}{y_1} + y_1 \right). \tag{11}$$

Выразим, как и в предыдущем случае, функцию $U(y_1)$ в табличном виде. Получим:

$$y_1 = 3{,}92 \text{ м}, \quad \min U = 937 \text{ Дж}.$$

При этом объем $V(y_1) = 18466 \text{ см}^3$, что на 23 % превышает $\min V$.

На рис. 3 показан вид фермы, полученной в соответствии с двумя критериями оптимальности.

Очевидна бóльшая материалоемкость фермы, полученной по критерию минимальной потенциальной энергии. На рис. 4 показаны графики зависимости $V(y_1)$ и $U(y_1)$.

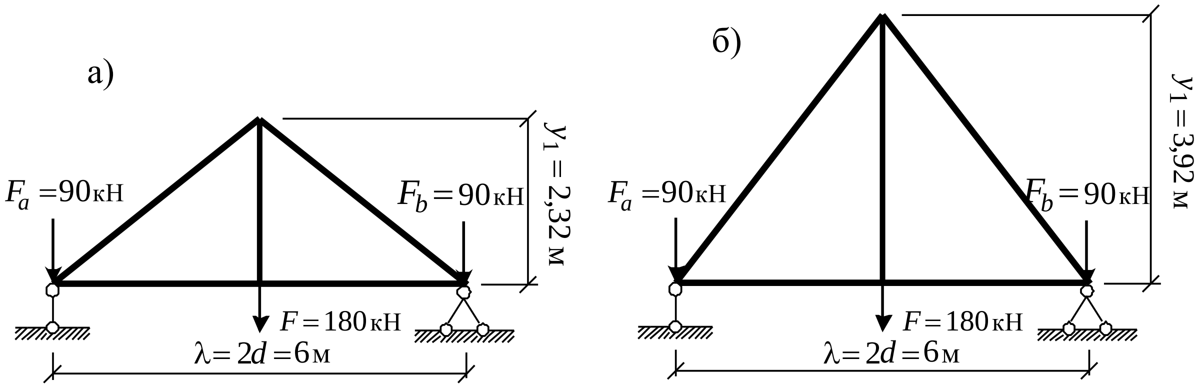


Рис. 3. Оптимальная ферма, полученная при минимизации объема (а); при минимизации потенциальной энергии (б)

Однако для фермы, полученной для $\min U$, увеличивается жесткость системы и, соответственно, уменьшаются прогибы. Прогиб вычислялся методом Мора по формуле

$$f(y_1)=\frac{1}{EF}\left[2\frac{N_{A-2}^2(y_1)l_{A-2}(y_1)}{A_{A-2}(y_1)}+2\frac{N_{A-1}^2(y_1)l_{A-1}(y_1)}{A_{A-1}}+\frac{N_{1-2}^2(y_1)l_{1-2}(y_1)}{A_{1-2}}\right].$$

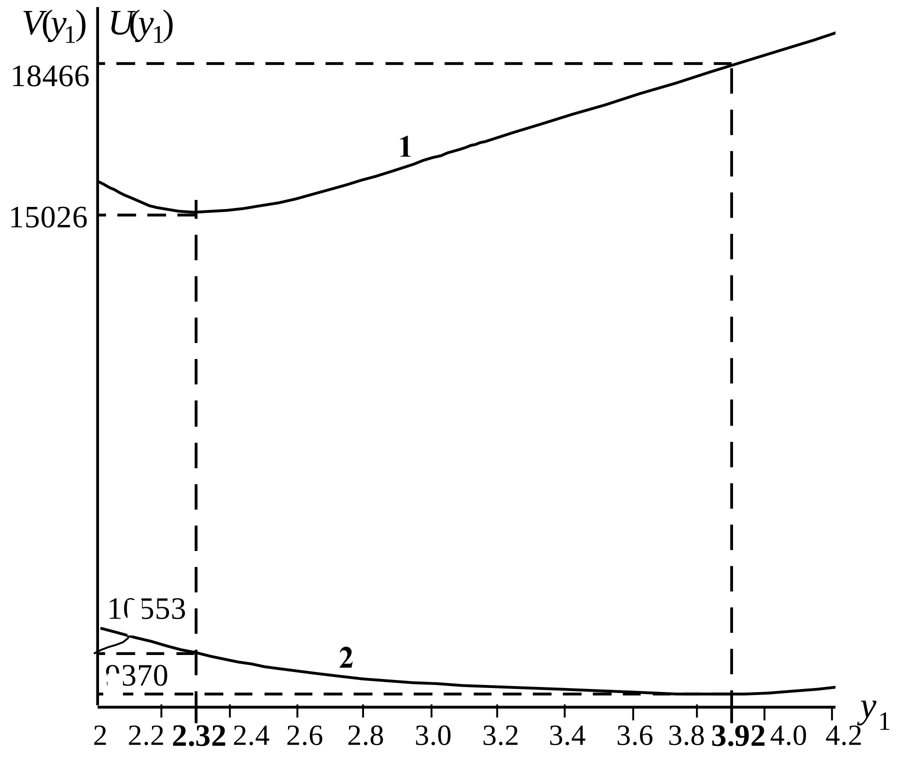


Рис. 4. Графики зависимостей 1) $V(y_1)$, см$^3$; 2) $U(y_1)$, Дж

Значение прогиба $f_V(y_1)$ при $y_1 = 2{,}32$ м (т. е. при $\min V$) в точке приложения силы составляет 0,950 см. Прогиб $f_U(y_1)$, который достигается при $y_1 = 3{,}92$ м (т. е. при $\min U$), равен 0,843 см, т.е. на 11,3 % меньше.

**Оптимизация фермы минимального объема с ограничением по жесткости**

Изменим площади поперечных сечений элементов полученной фермы с минимальным объемом (рис. 3, а) так, чтобы прогиб точки приложения силы $f_V(y_1)$ при $y_1 = 2{,}32$ м уменьшился и стал как можно ближе к прогибу $f_U(y_1)$ при $y_1 = 3{,}92$ м (т. е. при $\min U$). Для этого минимизируем целевую функцию

$$F = \left| f_V(2{,}32) - f_U(3{,}92) \right|, \qquad (12)$$

где $f_U(3{,}92) = 0{,}843$ см, $f_V(2{,}32)$ вычисляется методом Мора по формуле

$$f_V = \frac{1}{EF}\left[ 2\frac{N_{A-2}^2 l_{A-2}}{A_{A-2} + \delta A_{A-2}} + 2\frac{N_{A-1}^2 l_{A-1}}{A_{A-1} + \delta A_{A-1}} + \frac{N_{1-2}^2 l_{1-2}}{A_{1-2} + \delta A_{1-2}} \right].$$

В этой формуле усилия в элементах, их длины и площади получены при минимизации объема, параметрами оптимизации функции (12) являются добавки к площадям поперечных сечений $\delta A_{A-2}, \delta A_{A-1}, \delta A_{1-2}$.

Оптимизация осуществлялась двумя методами: комплекс-методом Бокса [8, 9] и методом динамического программирования [2]. Ограничение в комплекс-методе ставилось на процент приращения каждой из площадей:

$$\delta A \le \alpha A .$$

Получено значение прогиба $f(2{,}32) = 0{,}843$ см; увеличение площадей растянутых стержней (т. е. А-1 и 1-2) составило соответственно 16 % и 4,56 %, увеличение площади сжатого стержня А-2 – 0,14 %. При этом объем материала фермы стал равным $V = 17015$ см$^3$, увеличившись по сравнению с минимальным на 13,2 % и оставшись меньше полученного при минимуме потенциальной энергии на 7,9 %.

**Выводы**. В работе приведено сравнение двух критериев оптимизации стержневой системы на примере фермы. Показано, что с точки зрения экономичности предпочтителен критерий минимальности объема материала. Однако критерий минимальности потенциальной энергии обеспечивает бóльшую жесткость системы.

Предложено проводить оптимизацию в два этапа: сначала минимизировать объем, а затем с использованием полученных размеров стоек минимизировать прогибы. Показано, что при этом можно получить ферму менее ресурсоемкую, чем полученная по критерию минимума энергии, при равных условиях по прочности и жесткости.

***Список использованных источников***

1. Виноградов, А.И. Проблема оптимального проектирования в строительной механике [Текст] / А.И. Виноградов. – Харьков: Вища школа, 1973. – 168 с.

2. Китов, Ю.П. Применение динамического программирования к расчету оптимальных статически определимых ферм [Текст] / Ю.П. Китов, И.С. Храповицкий // Труды ХИИТ. – Харьков: ХИИТ, 1971. – Вып. 127.– С. 54 – 62.

3. Клюев, С.В. Оптимальное проектирование стержневых систем [Текст]: монография / С.В. Клюев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2007. – 130 с.

4. Китов, Ю.П. Оптимизация статически неопределимых балок переменного сечения [Текст] / Ю.П. Китов, М.А. Веревичева // Зб. наук. праць. – Харків: УкрДАЗТ, 2013. – Вип. 138. – С. 236 – 243.

5. Васильков, Г.В. Эволюционная теория жизненного цикла механических систем: Теория сооружений. Изд. 2. Синергетика: от прошлого к будущему [Текст] / Г.В. Васильков. – М.: URSS, 2013. – № 39. – 320 с.

6. Шмуклер, В.С. Каркасные системы облегченного типа [Текст] / В.С. Шмуклер, Ю.А. Климов, Н.П. Бурак. – Харьков: Золотые страницы, 2008. – 336 с.

7. Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.

8. Ермуратский, П.В. Разработка и исследование методов экспериментальной оптимизации многофакторных объектов [Текст]: дис. … канд. техн. наук / П.В. Ермуратский. – М.: Московский энергетический ин-т, 1970. – 211 с.

9. M.J. Box. A new method of constrained optimization and a Comparison with other methods [Text] // The Computer Journal. – 1965. – Vol. 8. – P. 42 – 52.

Рецензент д-р техн., наук, профессор А.Н. Даренский

Ватуля Глеб Леонідович, канд. техн. наук, доцент, завідуючий кафедрою будівельної механіки та гідравліки Української державної академії залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-71.

Кітов Юрій Петрович, канд. техн. наук, професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Української державної академії залізничного транспорту. Тел.(057) 730-10-71.

Веревічева Марина Анатоліївна, канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки та гідравліки Української державної академії залізничного транспорту. Тел. (057) 730-10-71.

Vatulia Gleb Leonidovich, cand. of techn. sciences, associate professor, department zaveduyuschyy stroitelnaya mechanics and gidravlika Ukrainian State Academy of Railway Transport. Tel .. (057) 730-10-71.

Kitov Yuri Petrovich cand. of techn. sciences, professor of the department stroitelnaya mechanics and gidravlika Ukrainian State Academy of Railway Transport. Tel. (057) 730-10-71.

Verevicheva Marina Anatolevna, cand. of techn. sciences, associate professor, the department stroitelnaya mechanics and gidravlika Ukrainian State Academy of Railway Transport. Tel. (057) 730-10-71.