УДК 624.042

ІМОВІРНІСНИЙ РОЗРАХУНОК КОЕФІЦІЄНТА КРИТИЧНОГО ФАКТОРА ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СТИСНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Канд. техн. наук Н. О. Махінько

STOCHASTIC CALCULATION OF THE CRITICAL FACTOR COEFFICIENT FOR CENTRALLY CMPRESSED ELEMENTS

PhD (Tech.) N. Makhinko

Статтю присвячено проблемі визначення узагальненого критичного фактора в рамках імовірнісного розрахунку центрально-стиснутих елементів сталевих конструкцій. Запропоновано виконати апроксимацію функції коефіцієнта поздовжнього згину експоненціальною залежністю з визначеними параметрами кривих стійкості; здійснено обґрунтування такого підходу. На основі ряду перетворень отримано вирази для визначення випадкової величини критичного фактора центрально-стиснутого елемента в простій аналітичній формі.

Ключові слова: *надійність, випадковий процес, центрально-стиснутий стержень, коефіцієнт поздовжнього згину, критичний фактор.*

This paper deals with the problem of determining a generalized critical factor. It is the ratio of the generalized efforts to the strength. These values are random. Besides, the study is about the *stochastic calculation of the steel constructions' central-compressed elements. There is a complexity in using stochastic methods of calculation, because the coefficient of longitudinal bending is the function of the element's flexibility, the yield strength and the type of stability curve. For obtaining the final solution it is necessary to perform complex multi-stage mathematical operations. Therefore, the function's approximation of the coefficient of longitudinal bending was made by using exponential dependence. Exponential dependence was used for this purpose. The stability curves' parameters, which depend on the type of the transverse section, were calculated. A graphical comparison of the normative expression for the coefficient of longitudinal bending with the proposed dependence was made. The convergence of the results is sufficient in the values' range of elements flexibility from 0-100. The differences increase with values of flexibility greater than 100. However, the coefficient values of the longitudinal bending of more than 0.3 are seldom achieved. The expressions are obtained for determining the random value of the critical factor of the central-compressed element in a simple analytical form. It has been numerically proved that the values of an exponent in the formula of a critical factor could be equated to one. It simplifies the calculation greatly. The distribution density of the critical factor's random value of the central compressed element at the two coordinate planes, the classical and critical probability scale, is presented graphically. Distribution histograms were made for two variants on the basis of numerical simulation using the formulas of the State Construction Standards [1] and, respectively, statistical processing of the simulation results according to the obtained dependencies. The data analysis showed clear correspondence of the element's critical factor to the reference curve in the area of probability values.*

Keywords: *reliability, stochastic processes, centrally compressed rod, buckling coefficient, critical factor.*

Вступ. У задачах розрахунку надійності будівельних конструкцій узагальнені характеристики міцності та зусилля подано випадковими процесами, кількісна оцінка яких потребує залучення методів теорії імовірності та математичної статистики. Складність математичного апарату та відсутність простих аналітичних рішень унеможливлює застосування цих методів у практиці інженерного розрахунку. Відповідно, актуальним науковим завданням є перехід від класичних багатоетапних розрахунків показників надійності будівельного об'єкта чи його окремих конструктивних елементів до більш спрощеного вирішення цих питань шляхом залучення чисельних методів, відповідно до сучасного розвитку комп'ютерної техніки.

Такий підхід зумовлює потребу при розрахунках на міцність і стійкість користуватися величиною коефіцієнта критичного фактора, який виражає співвідношення узагальненого значення величини зовнішніх зусиль до міцності конструкції. Оперувати узагальненим критичним фактором досить зручно, оскільки він безрозмірний, має вузьку область можливих значень та фігурує в більшості комп'ютерних пакетів міцнісного аналізу.

Імовірнісне представлення коефіцієнта критичного фактора полягає у визначенні його статистичних характеристик, а також диференціальної та інтегральної функції розподілу. При цьому найбільшу цікавість становить область значень аргументу функції розподілу ймовірностей, яка відповідає ординаті, близькій до одиниці. Це зумовлено тим, що для будівельних конструкцій використання значень менших імовірностей не доцільне. В разі простого розтягу чи згину в одній площині, задача дослідження «хвоста» розподілу в області великих значень аргументу вирішується шляхом імітаційного моделювання на заданій координатній площині. В подальшому апроксимація певним аналітичним виразом в межах існуючого діапазону імовірностей, дає змогу отримати загальні вирази для коефіцієнта критичного фактора чи вирішити обернену задачу знаходження фактичної імовірності безвідмовної роботи конструкції.

Проте якщо елемент працює на центральний стиск або завантажений осьовою силою з моментом, такий підхід вимагає ряду корегувань, пов’язаних із детерміністичними залежностями, відображеними в нормах проектування [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання стійкості стиснутих елементів у контексті методу граничних станів добре висвітлено в науковій та довідниковій літературі як з використанням аналітичних, так і за допомогою чисельних методів [2–4]. Розвиток теорії надійності будівельних конструкцій також налічує численні теоретичні та практичні розробки [5–10].

Визначення мети та задачі дослідження. Особливістю імовірнісних розрахунків центрально-стиснутих елементів є врахування функціональної залежності коефіцієнта поздовжнього згину від ряду параметрів. Безпосереднє використання процедури імітаційного моделювання при цьому є не виправданим, оскільки для отримання кінцевого рішення необхідно виконувати складні багатоетапні математичні операції. Тому постає логічне питання пошуку апроксимуючої функції для відображення окресленої залежності та обґрунтування можливості її застосування для вирішення задач імовірнісного розрахунку.

Основна частина дослідження. Статистичні характеристики коефіцієнта критичного фактора K_R можна виразити через нормовані випадкові величини узагальненої міцності $\tilde{\gamma}_R$ та узагальненого зусилля $\tilde{\gamma}_S$:

$$m_K = V_R p_S / V_S , \qquad (1)$$

де m_K – математичне сподівання коефіцієнта критичного фактора; $V_S = \sigma_S / m_S$; $V_R = \sigma_R / m_R$; $p_S = \sigma_S / \sigma_R$ – відповідно коефіцієнти варіації та відношення середньоквадратичних відхилень випадкових величин узагальненого зусилля $\tilde{S}$ та узагальненої міцності $\tilde{R}$.

Вирази для стандарту та коефіцієнта варіації критичного фактора:

$$\sigma_K \approx p_S \frac{V_R}{V_S}\sqrt{V_S^2 + V_R^2}\,; \qquad V_K \approx \sqrt{V_S^2 + V_R^2}\,. \qquad (2)$$

Щільність розподілу коефіцієнта критичного фактора $f_K(K_R)$ буде залежати від обраних законів розподілу випадкових величин $\tilde{R}$ та $\tilde{S}$. Якщо прийняти нормальний розподіл для обох величин, за класичним підходом [8], диференціальна функція набуде вигляду:

$$f_K(K_R) = \frac{1}{2\pi p_S V_R}\int_{-1/V_R}^{\infty}(1+K_R V_R)\exp\left[-A_K(K_R)x^2 - 2B_K(K_R)x - C_K(K_R)\right]dx, \qquad (3)$$

де $A_K(K_R)$, $B_K(K_R)$ і $C_K(K_R)$ – безрозмірні функції.

$$A_K(K_R) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{K_R^2}{p_S^2}\right), B_K(K_R) = \frac{K_R}{2p_S}\left(\frac{K_R}{p_S V_R} - \frac{1}{V_S}\right), C_K(K_R) = \frac{1}{2}\left(\frac{K_R}{p_S V_R} - \frac{1}{V_S}\right)^2.$$

Альтернативним підходом є отримання значень критичного фактора, застосовуючи пряме моделювання вибірки випадкових величин $\tilde{\gamma}_R$ та $\tilde{\gamma}_S$ на початковому етапі вирішення задачі. В цьому випадку вибірка значень критичного фактора дорівнює:

$$K_{R,i} = \frac{m_S}{m_R} \cdot \frac{1+\gamma_{S,i} V_S}{1+\gamma_{R,i} V_R} = m_K \cdot \gamma_{K,i}, \qquad \gamma_{K,i} = \frac{1+\gamma_{S,i} V_S}{1+\gamma_{R,i} V_R}. \quad (4)$$

Кінцевим результатом є отримання для критичного фактора виразу вигляду:

$$K_R = m_K \cdot \left(A_K y^2 + B_K y + C_K \right), \quad (5)$$

де коефіцієнти A_K, B_K і C_K знаходяться методом найменших квадратів для обраних законів розподілу випадкових величин $\tilde{\gamma}_R$, $\tilde{\gamma}_S$ та їх коефіцієнтів варіації.

Для центрально-стиснутих елементів основна складність застосування імовірнісних методів розрахунку полягає в тому, що коефіцієнт поздовжнього згину φ є функцією гнучкості елемента λ, границі текучості сталі R_y і типу кривої стійкості. В цьому випадку вид функції коефіцієнта поздовжнього згину $\varphi(R_y, \lambda)$ має досить складний та нелінійний відносно R_y характер

$$\varphi = \frac{E}{2\lambda^2 R_y} \left[\pi^2 \left(1 - \alpha + \beta\lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}} \right) + \lambda^2 \frac{R_y}{E} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{ \left(\pi^2 \left(1 - \alpha + \beta\lambda\sqrt{R_y/E} \right) + \lambda^2 R_y/E \right)^2 - 39.48\lambda^2 R_y/E } \right], \quad (6)$$

де α і β – параметри кривої стійкості [1].

Для спрощення пропонується використання експоненціальної залежності

$$\varphi = \exp\left(-\beta \cdot \frac{\lambda^{\varepsilon}}{\pi^2} \cdot \frac{R_y}{E} \right), \quad (7)$$

де ε і δ – параметри кривої стійкості, що залежать від типу поперечного перерізу елемента та нормуються аналогічно до α і β (табл. 1).

Аналіз порівняння нормативного виразу для коефіцієнта поздовжнього згину (6) із запропонованою залежністю (7) (рис. 1) свідчить, що в діапазоні значень гнучкості елементів від 0 до 100 збіжність результатів є достатньою. При $\lambda > 100$ відмінності зростають, проте варто враховувати, що, по-перше, формула (6) дає нижню оцінку коефіцієнта поздовжнього згину φ, а по друге, в практиці рідко досягаються значення $\varphi < 0{,}3$. Враховуючи ці обставини, застосування формули (7) будемо вважати обґрунтованим.

Таблиця 1

Характеристики параметрів кривої стійкості

Тип кривої стійкості	Значення коефіцієнтів			
	α	β	δ	ε
a	0,03	0,06	0,4	2
b	0,04	0,09	0,5	2
c	0,04	0,14	0,6	2

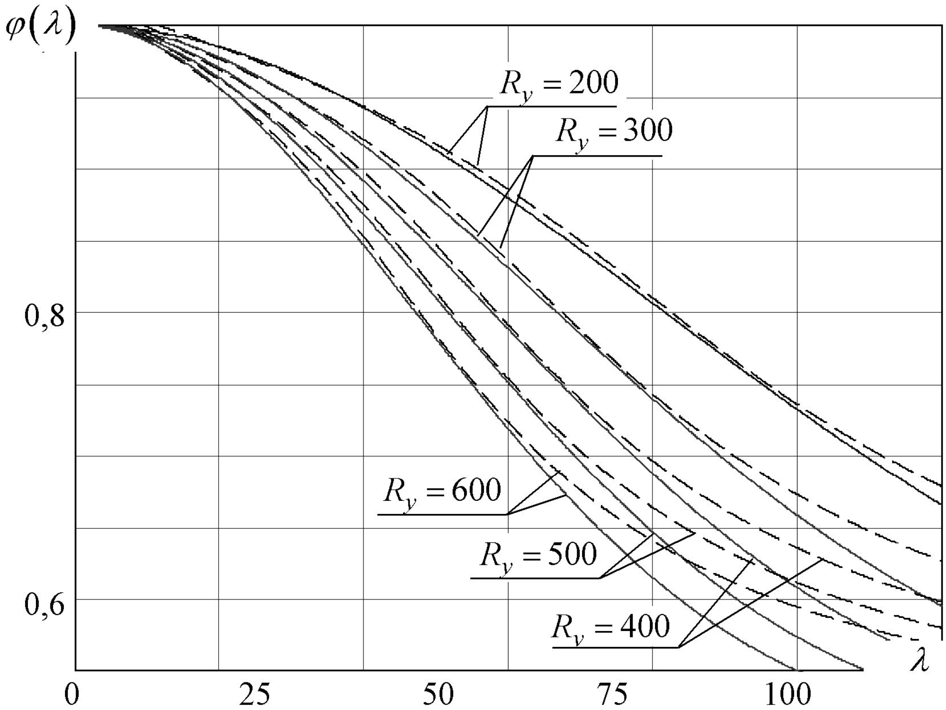

Рис. 1. До апроксимації функції поздовжнього згину для типу кривої стійкості «а»: рівні лінії – нормативний вираз; пунктирні лінії – відповідно (7)

Резерв несучої здатності $\tilde{R}$ стиснутого елемента буде характеризуватися добутком $\varphi \cdot R_y$. Враховуючи, що коефіцієнт поздовжнього згину є функцією границі текучості R_y, застосовувати нормальний закон розподілу для резерву несучої здатності не можна. За аналогією до виразу (4) запишемо формулу для випадкової величини критичного фактора центрально-стиснутого елемента.

$$K_{R,i} = m_K \cdot \gamma_{K,i} \cdot \exp\left[\delta \cdot \lambda^2 / \pi^2 \cdot m_R / E \cdot \gamma_{R,i} V_R\right], \qquad (8)$$

де $\gamma_{K,i}$ – ранжована змінна за формулою (4).

Проведені обчислення показали, що значення експоненти у виразі (8) приблизно дорівнює одиниці, в широкому діапазоні гнучкостей λ та метематичного сподівання m_R границі текучості. На графіку (рис. 2) зображено порівняльний аналіз запропонованого підходу з еталонними залежностями. Порівняння «хвостів» функцій розподілу на критичній імовірнісній шкалі наведено на рис. 3. Зазначимо досить чітку відповідність графіків функції розподілу критичного фактора центрально-стиснутого елемента (рис. 3) в зоні малих гнучкостей $\lambda < 80$ та дещо гіршу при більших значеннях λ.

Висновки:

1. Запропоновано застосування експоненціальної залежності для функції коефіцієнта поздовжнього згину при виконанні імовірнісних розрахунків коефіцієнта критичного фактора. Графічно обґрунтовано, що в діапазоні значень гнучкості елементів від 0 до 100 збіжність результатів є достатньою.

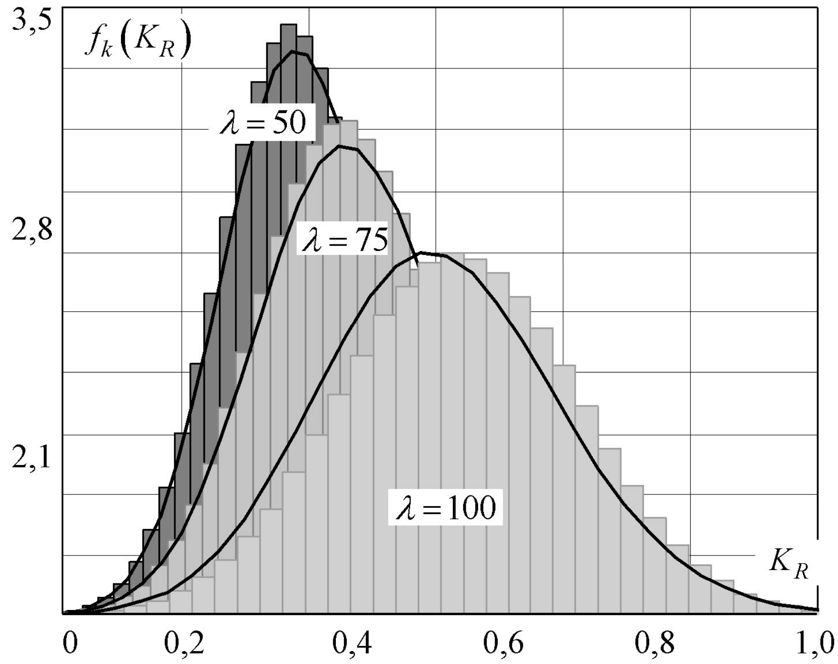

Рис. 2. Щільність розподілу критичного фактора центрально-стиснутого елемента

2. Надано пропозиції щодо визначення випадкової величини критичного фактора центрально-стиснутого елемента в простій аналітичній формі.

3. Відповідно до запропонованого підходу, виконано імовірнісне представлення критичного фактора центрально-стиснутого елемента на критичній імовірнісній шкалі. Отриманий результат свідчить про чітку відповідність еталонній кривій критичного фактора елемента в області великих значень імовірностей.

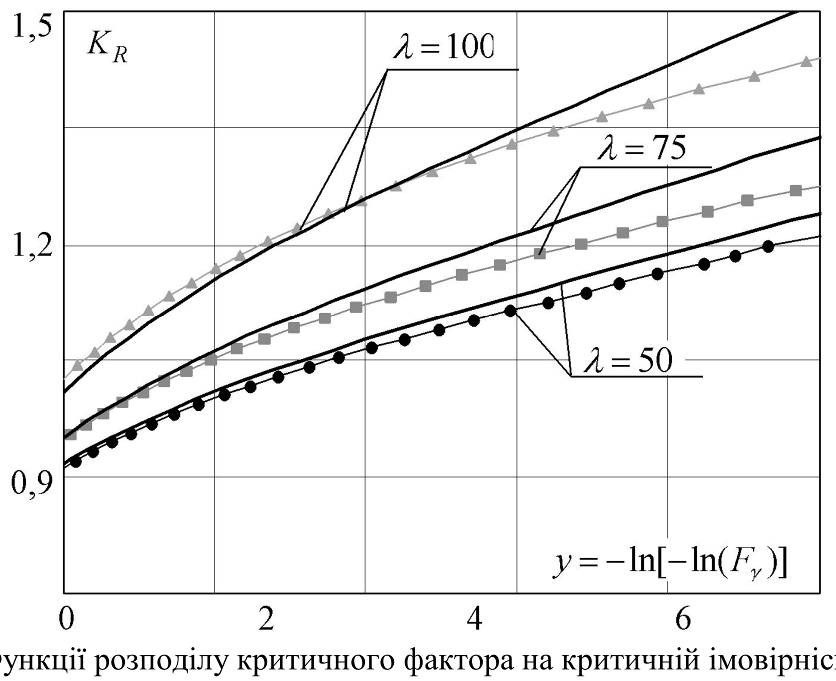

Рис. 3. Функції розподілу критичного фактора на критичній імовірнісній шкалі (рівні лінії – еталонна крива)

Список використаних джерел

1. ДБН В.1.2-2:2006 Системи забезпечення надійності і безпеки будівельних конструкцій. Навантаження і впливи. Київ: Мінбуд України, 2006. 78 с.
2. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів. Київ: Вища школа,1993. 655 с.
3. Стрелецкий Н. С. Металлические конструкции. Москва: Госстройиздат, 1962. 769 с.
4. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва: СКАД СОФТ, 2011. 736 с.
5. Аугуети Г., Баратти А., Кашиати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании. Москва: Стройиздат, 1988. 584 с.
6. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Москва: Стройиздат, 1982. 255 с.
7. Пичугин С. Ф. Надежность строительных конструкций. Работа научной школы проф. С. Ф. Пичугина. Полтава: АСМИ, 2010. 434 с.
8. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Москва: Высшая школа, 2000. 383 с.
9. Wang C., Zhang H., Li Q. Moment-based evaluation of structural reliability. *Reliability Engineering & System Safety*. *ELSEVIER*, 2019. Vol.181. P. 38–45. URL: https://doi.org/10.1016/j.ress.2018.09.006.
10. Krejsa M., Janas P., Krejsa V. Structural Reliability Analysis Using DOProC Method. *Procedia Engineering*. *ELSEVIER*, 2016. Vol. 142. P. 34–41. URL: https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.02.010.

Махінько Наталія Олександрівна, канд. техн. наук, доцент кафедри комп’ютерних технологій будівництва Національного авіаційного університету. E-mail: pasargada1985@gmail.com.

Makhinko Nataliia, PhD (Tech.), Associate Professor, Department of Computer Technology Building, National Aviation University. E-mail: pasargada1985@gmail.com.

Статтю прийнято 27.02.2019 р.